Exercice1

Proposition 1 : VRAIE

$(1+i)^{4n}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}=\left(4e^{i\pi}\right)^{n}=(-4)^{n}$.

Proposition 2 : FAUSSE

$(z-4)(z^2-4z+8)=0 \Leftrightarrow z=4$ ou $z^2-4z+8=0$ $(\Delta=-16=\left(-4i\right)^2)$

$\Leftrightarrow z=4$ ou $z=2\pm 2i$

Avec une figure, on voit facilement que l'aire du triangle ayant pour sommets les points images de ces solutions est 4.

Proposition 3 : VRAIE

Pour tout $\alpha, 1+e^{2i\alpha}=e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}\right)=e^{i\alpha}\left(\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\alpha+i\sin\alpha\right)=2e^{i\alpha}\cos\alpha$.

Proposition 4 : VRAIE

$z_A=\frac{1}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. $\quad z_{M_n}=(z_A)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

O, A et M_n sont alignés

$\Leftrightarrow \arg(z_{M_n})=\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow n=1[4]$

Proposition 5 : VRAIE

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $j^3=1$, donc $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0$

Exercice 2

Partie A

K	W	U	V
0		2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B

Pour tout entier naturel n, par : $u_0=2$, $v_0=10$, $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. a) Pour tout n, on a :

$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{2u_n+v_n}{3}=\frac{3u_n+9v_n-8u_n-4v_n}{12}=\frac{5}{12}\left(v_n-u_n\right)$.

b) Pour tout entier naturel n, $w_n=v_n-u_n$.

D'après 1a, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

$w_0=v_0-u_0=8$, donc, pour tout n, $w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a) Pour tout n, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+v_n}{3}-u_n=\frac{2u_n+v_n-3u_n}{3}=\frac{1}{3}(v_n-u_n)=\frac{1}{3}w_n>0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour tout n, on a : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}=-\frac{1}{4}(v_n-u_n)=-\frac{1}{4}w_n<0$.

On en déduit que la suite (v_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout n, $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $v_n > u_n$.

Pour tout n, $2 = u_0 \le u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \le v_0 = 10$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10, donc elle converge, soit $\lim u_n = L$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge, soit $\lim v_n = L'$

3. Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$, en passant à la limite on a : $L = \dfrac{2L + L'}{3}$, d'où L = L'.

4. Pour tout entier naturel n, $t_n = 3u_n + 4v_n$.

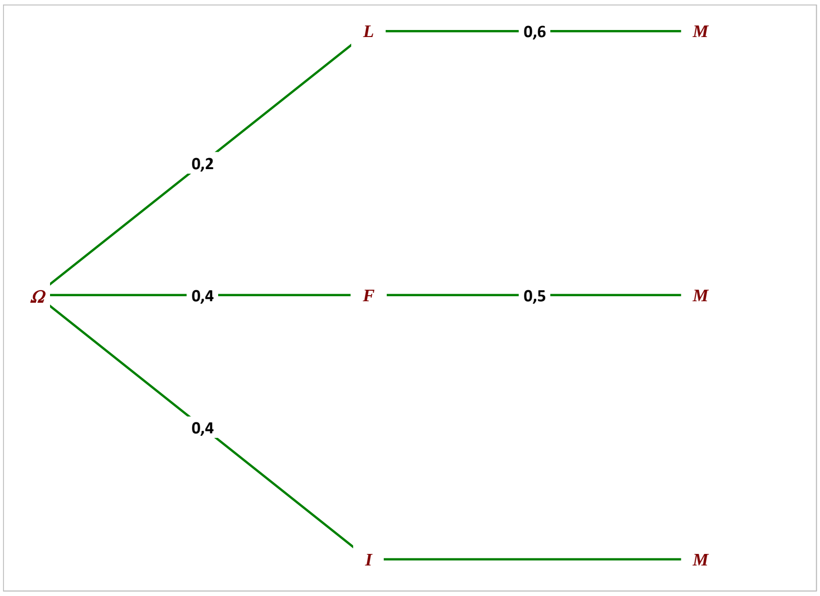
a) Pour tout n, on a : $t_{n+1} - t_n = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} - 3u_n - 4v_n = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n - 3u_n - 4v_n = 0$.

La suite est constante. Pour tout n, $t_n = t_0 = 46$.

$\lim t_n = 3L + 4L = 46$. D'où $L = \dfrac{46}{7}$.

Exercice 3

1. Arbre



2. $P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$

$P(F \cap M) = P(F) \times P_F(M) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$

3. a) $P(M) = 0,5$ et $P(M) = P(L \cap M) + P(F \cap M) + P(I \cap M)$, d'où :

$P(I \cap M) = P(M) - P(L \cap M) - P(F \cap M) = 0,5 - 0,12 - 0,2 = 0,18$.

b) $P_I(M) = \dfrac{P(I \cap M)}{P(I)} = \dfrac{0,18}{0,4} = 0,45$.

4. $P_M(F) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$

5. $P(F \cap M) = 0,2$ et $P(M) \times P(F) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$, donc les événements M et F sont indépendants.

6. Soit X le prix de vente d'un poulet.

k	12	8	4	0
P(X=k)	0,08	0,2	0,22	0,5

D'où E(X) = 3,44.

Pour 10000 poulets, l'exploitant peut espérer un prix de vente de 34400.

Exercice 4

Soit l'équation (E) : 11x – 7y = 5, où x et y sont des entiers relatifs.
1. a. PGCD(11, 7) = 1 , donc par le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs a et b tels que : $11a + 7b = 1$, le couple (u, v) = (a, -b) convient.
On voit facilement que : $11\times 2 - 7\times 3 = 1$.
b. On en déduit que : $11\times 10 - 7\times 15 = 5$, le couple (10, 15) est une solution particulière de (E).
c. Pour tous x et y $\in \mathbb{Z}$, on a :
$11x - 7y = 5$
$\Leftrightarrow 11x - 7y = 11(10) - 7(15)$
$\Leftrightarrow 11(x-10) = 7(y-15) \qquad (1)$
7 divise 11(x -10) et PGCD(11 ,7) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise x -10 ; il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que x -10 = 7k. Il vient alors, en remplaçant dans (1), $11\times 7k = 7(y-15)$, soit y -15 = 11k.
Les solutions sont donc :
$$\begin{cases} x = 10 + 7k \\ y = 15 + 11k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

d. On cherche les solutions telles que : $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.

k	-1	0	1	2	3
x	3	10	17	24	31
y	4	15	26	37	48

2. Soit l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
a. $11 \equiv 1[5]$ et $7 \equiv 2[5]$, donc $11x^2 - 7y^2 \equiv x^2 - 2y^2\,[5]$.
Si $11x^2 - 7y^2 = 5$, alors $x^2 - 2y^2 \equiv 0[5]$, d'où $x^2 \equiv 2y^2\,[5]$.
b. Tableau de congruences modulo 5 :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

x	0	1	2	3	4
$2y^2$	0	2	3	3	2

Les restes possibles de x^2 sont 0, 1 et 4.
Les restes possibles de $2y^2$ sont 0, 2 et 3.
c. Si le couple (x, y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2\,[5]$, d'après 2b, la seule possibilité est $x^2 \equiv 0[5]$ et $2y^2 \equiv 0[5]$, d'où $x \equiv 0[5]$ et $y \equiv 0[5]$.
3. Supposons x et y multiples de 5, alors x = 5a et y = 5b, où a et b sont des entiers relatifs.
En remplaçant dans (F), il vient : $25(11a^2 - 7b^2) = 5$, or 25 ne divise pas 5, donc cette équation est impossible.
Conclusion : l'équation (F) n'a pas de solution.