Terminale S4

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad B : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$A : (-4 ; 0 ; 0) \quad B : \left(\frac{6}{5} ; \frac{-9}{5} ; \frac{3}{5}\right) \quad C : \left(\frac{7}{9} ; \frac{-2}{3} ; \frac{1}{3}\right) \quad D ; \left(\frac{8}{11} ; \frac{-25}{11} ; \frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$A : \frac{\sqrt{11}}{3} \qquad B : \frac{3}{\sqrt{11}} \qquad C : \frac{9}{\sqrt{11}} \qquad D : \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A : au point I(1 ; −5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

Exercice 2

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

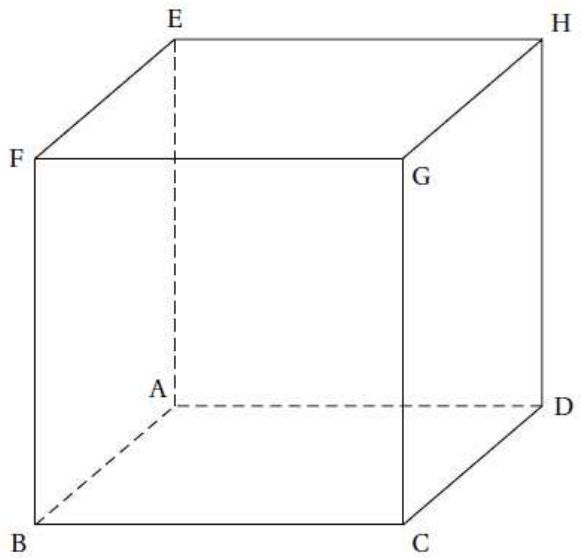
Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

1. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x-3y+4z-13=0$.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.
   d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?
2. On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

Exercice 3

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

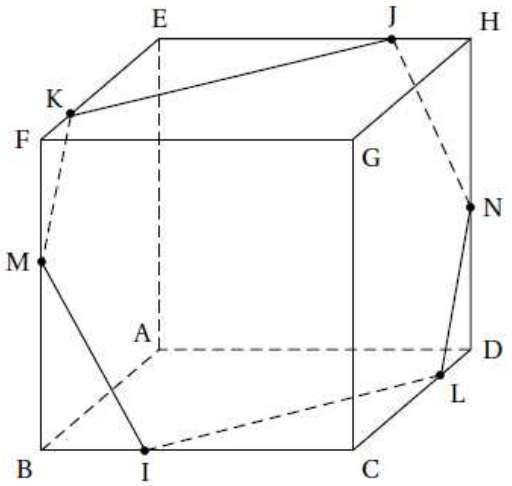
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

   a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
   c. En déduire les coordonnées des points M et N