Exercice 1

1. D
2. D
3. B
4. B

Exercice 2

Partie A

On suppose que les hauteurs issues des points A et B sont concourantes en E.
H est le projeté orthogonal de A sur le plan (ABC).
B' est le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD).
(BB') est perpendiculaire au plan (ACD), donc (BB') est orthogonale à (CD).
(AH) est perpendiculaire au plan (BCD), donc (AH) est orthogonale à (CD).
On en déduit que (CD) est perpendiculaire au plan (BEA).
En particulier (CD) est perpendiculaire à (BH).

Partie B

On a : A(3, 2, -1), B(-6, 1, 1), C(4, -3, 3) et D(-1, -5, -1).

1. a. $\overrightarrow{BC}(10,-4,2)$ et $\overrightarrow{BD}(5,-6,-2)$. Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, les 3 points ne sont donc pas alignés, ils définissent bien un plan.
On vérifie que les coordonnées de B, C et D vérifient bien l'équation : $-2x-3y+4z-13=0$.
Donc le plan d'équation $-2x-3y+4z-13=0$ est bien le plan (BCD).

b. Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

c. (AH) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}(-2,-3,4)$, un vecteur normal à (BCD).
Une représentation paramétrique de (AH) est :

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-3t \\ z=-1+4t, \quad t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$H(x,y,z)\in(BCD)\cap(AH)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2t, y=2-3t, z=-1+4t \\ -2x-3y+4z-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2t, y=2-3t, z=-1+4t \\ -6+4t-6+9t-4+16t-13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2t, y=2-3t, z=-1+4t \\ t=1 \end{cases}$$

On en déduit H(1, -1, 3).

c. $\overrightarrow{BH}(7,-2,2)$ et $\overrightarrow{CD}(-5,-2,-4)$, d'où $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}=-35+4-8=-39$.

d. Il s'ensuit que (BH) n'est pas une hauteur du triangle (BCD), le tétraèdre ABCD n'est donc pas orthocentrique.

2. Soit I(1,0,0), J(0,1,0) et K(0,0,1), les hauteurs issues de I,J et K sont respectivement (OI), (OJ) et (OK), et celle issue de O passe par O, donc toutes les hauteurs passent par O, le tétraèdre est donc orthocentrique.

Exercice 3

Partie A

1. I(1,1/3,0), J(0,2/3,1), $\overrightarrow{IJ}(-1,1/3,1)$. Une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}t \\ z=t, \quad t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

2. K(3/4,0,1), L(a,1,0), $\overrightarrow{KL}(a-3/4,1,-1)$. Une représentation paramétrique de (KL) est :

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t',\ \ t'\in\mathbb{R} \end{cases}$$

3. On a :

$$\begin{cases} 1-t=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4t=t'(4a-3) \\ 1+t=3t' \\ 3t'-1=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=\dfrac{1}{2}(4a-3) \\ t=\dfrac{1}{2} \\ t'=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ t=\dfrac{1}{2} \\ t'=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et ssi $a=\dfrac{1}{4}$.

Le point d'intersection a alors pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Partie B

On prend $a=\dfrac{1}{4}$. $L\left(\dfrac{1}{4},1,0\right)$.

1. On a : $\overrightarrow{IL}\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3},0\right)$ et $\overrightarrow{KJ}\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3},0\right)$, donc IKJL est bien un parallélogramme.

2. a. $\overrightarrow{IJ}(-1,1/3,1)$ et $\overrightarrow{KJ}\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3},0\right)$, soit $\vec{n}(8,9,5)$, on a :

$\vec{n}.\overrightarrow{IJ}=-8+3+5=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{KJ}=-6+6+0=0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b. Une équation cartésienne de (IJK) est $8x+9y+5z+d=0$.

$I(1,1/3,0)\in(IJK)\Leftrightarrow 8+3+d=0\Leftrightarrow d=-11$.

$8x+9y+5z-11=0$ est une équation cartésienne de (IJK).

c. M est le point du plan (IJK) pour lequel x = 1 et y = 0, d'où z = 3/5, $M\left(1,0,\dfrac{3}{5}\right)$.

N est le point du plan (IJK) pour lequel x = 0 et y = 1, d'où z = 2/5, $N\left(0,1,\dfrac{2}{5}\right)$.