Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et h la fonction définie, pour tout t, par $h(t) = (\cos t)^{n+1} \sin t$.

a. Montrer que, pour tout t, $h'(t) = (n+2)(\cos t)^{n+2} - (n+1)(\cos t)^n$.

b. En déduire que, pour tout n, $(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n = 0$, soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Calculer I_2 et I_3.

Exercice 3

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?

Exercice 4

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point. Toute réponse juste rapporte* 0,5 *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit P le plan d'équation $2x+3y+4z-1=0$.

a. La distance du point O au plan P est égale à 1.

b. La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

c. Le vecteur $\vec{n}\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ est un vecteur normal au plan P.

d. Le plan Q d'équation $-5x+2y+z=0$ est parallèle au plan P.

2. On désigne par P le plan d'équation $2x+y-z=0$, et par D la droite passant par le point A$(1\ ;1\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ (1\ ;\ -4\ ;\ -2)$.

a. La droite D est parallèle au plan P.

b. La droite D est orthogonale au plan P.

c. La droite D est sécante avec le plan P.

d. Un système d'équations paramétriques de D est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 1-4t \\ z & = & 1-2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$.

3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $x+y+z=3$ et $2x-z=1$. Soit le point A$(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.

b. L'ensemble E est une droite passant par A.

c. L'ensemble E est un plan passant par A.

d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\ (1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a. Le plan P contient toujours le point D.

b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{\text{B}M}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}.$$

d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].