Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Montrons que la suite (u_n) est décroissante.
1. Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a successivement :

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^{n+1} \le x^n$ car $x^n \ge 0$

$0 \le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \le \frac{x^n}{1+x^2}$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \le u_{n+1} \le u_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a successivement :

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$1 \le 1+x^2 \le 2$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$

$0 \le \frac{x^n}{1+x^2} \le x^n$ car $x^n \ge 0$

3. D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient :

$0 \le u_n \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Or $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim u_n = 0$.

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et h la fonction définie, pour tout t, par $h(t) = (\cos t)^{n+1} \sin t$.

a. Pour tout t,

$$\begin{aligned} h'(t) &= (n+1)(\cos t)^n(-\sin^2 t) + (\cos t)^{n+1}\cos t \\ &= (n+1)(\cos t)^n(\cos^2 t - 1) + (\cos t)^{n+2} \\ &= (n+2)(\cos t)^{n+2} - (n+1)(\cos t)^n \end{aligned}.$$

b. On en déduit que, pour tout n, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((n+2)(\cos t)^{n+2} - (n+1)(\cos t)^n)dt$.

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(t)dt = [h(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, d'où $0 = (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2}dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$, soit

$(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n = 0$. D'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$.

Exercice 3

Partie A

On suppose que les hauteurs issues de A et B se coupent en E.

$(BE) \perp (ACD) \Rightarrow (BE) \perp (CD)$

$(AH) \perp (BCD) \Rightarrow (AH) \perp (CD)$

Donc le plan (BEA) est orthogonal à la droite (CD).

$(BH) \subset (BEA)$, donc $(BH) \perp (CD)$

Partie B

a. $\overrightarrow{BC}(10,-4,2)$ et $\overrightarrow{BD}(5,-6,-2)$, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les points B, C et D ne sont donc pas alignés, ils définissent bien un plan.

Les cordonnées de ces points vérifient l'équation $-2x-3y+4z-13=0$, donc cette équation est bien une équation cartésienne de (BCD).

b. Une représentation paramétrique de (AH) est : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-3t \\ z = -1+4t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Pour trouver H, on cherche t tel que : $-2(3-2t)-3(2-3t)+4(-1+4t)-13=0$.

On trouve t = 1, d'où H(1, -1, 3).

c. $\overrightarrow{BH}(7,-2,2)$, $\overrightarrow{CD}(-5,-2,-4)$, d'où $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = -39$.

d. D'après la partie A, les hauteurs issues de A et B ne sont pas sécantes, donc le tétraèdre ne peut pas être orthocentrique.

Exercice 4

1. **b c**
2. **a d**
3. **b d**
4. **b c**