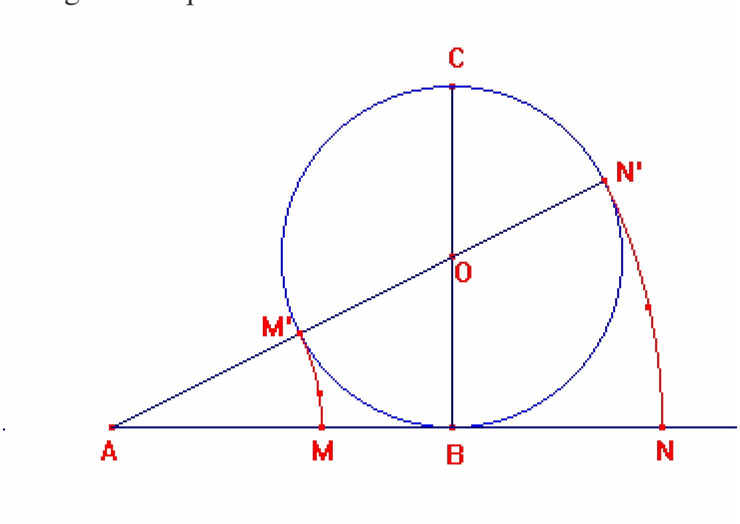
La divine proportion : le nombre d'or

1. On cherche M appartenant au segment [AB] avec AM > MB tel que "le rapport de la plus grande à la plus petite soit le même que celui du tout à la plus grande", autrement dit : $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$.

   Soit $\Phi = \frac{AM}{MB}$. On a : $\Phi = \frac{AM + MB}{AM} = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Φ est la solution positive de l'équation :

   $x^2 - x - 1 = 0$. On en déduit que $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, c'est le nombre d'or.

2. Construction géométrique



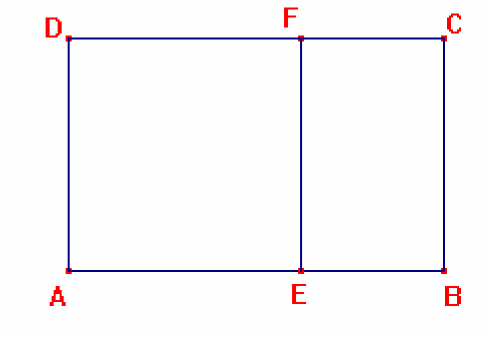
   Sur cette figure AB = BC = 2R et $AB \perp BC$.

   Il s'ensuit que $AO = \sqrt{5}R$, $AM = AM' = (\sqrt{5}-1)R$, $AN = AM + 2R = (\sqrt{5}+1)R$.

   De là $\frac{AB}{AM} = \frac{2R}{(\sqrt{5}-1)R} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{AN}{AB} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$.

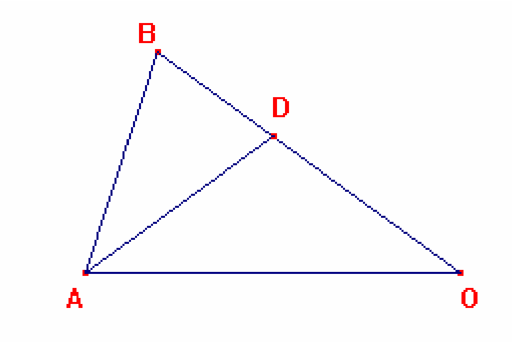
   Donc $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM} = \Phi = \frac{AN}{AB} = \frac{AB}{BN}$.

3. Rectangle d'or

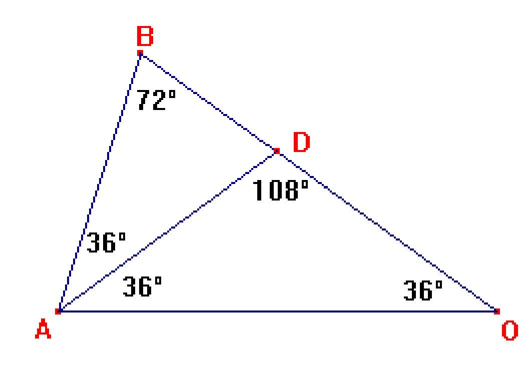


ABCD est un rectangle d'or si $\frac{AB}{BC} = \Phi$. Construire un tel rectangle.
Si AEFD est un carré, alors que EBCF est un rectangle d'or, en effet :
$\frac{AB}{BC} = \Phi \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \Phi \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \Phi \Rightarrow \frac{BC}{EB} = \Phi$.

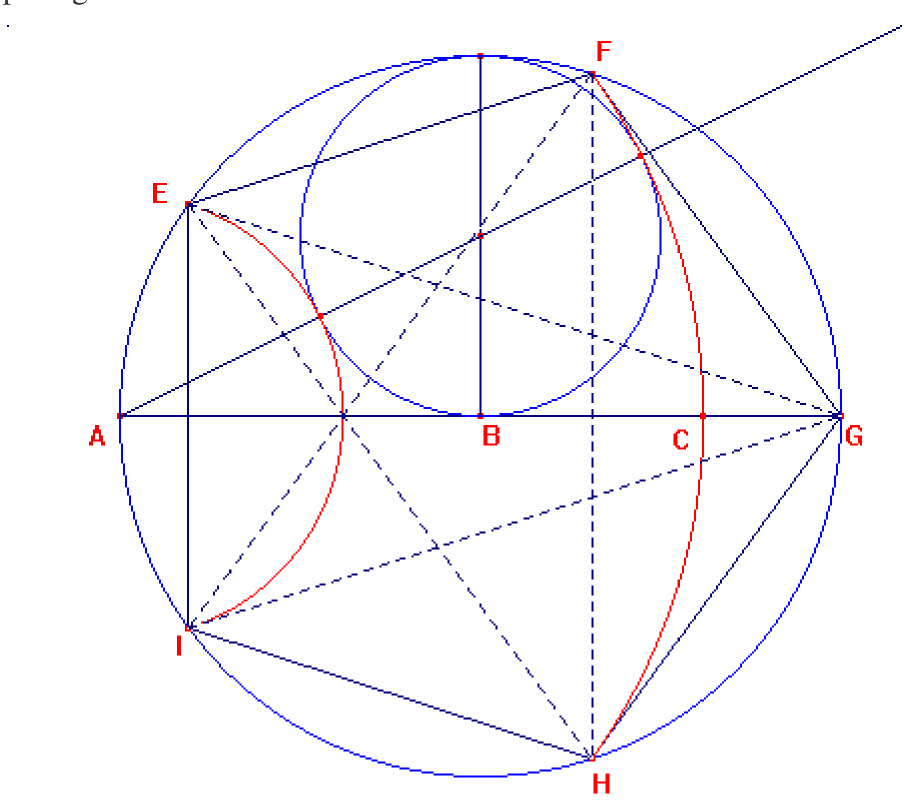
4. Triangle d'or



Le triangle isocèle AOB est un triangle d'or si $\frac{OA}{AB} = \Phi$.
(AD) est bissectrice de $\widehat{OAB}$. Les angles sont exprimés en degrés, on note $\widehat{BAD} = \alpha$ et $\widehat{BOA} = \gamma$.
(AD) est la bissectrice intérieure issue de A dans OAD, donc $\frac{OD}{AO} = \frac{BD}{AB}$. On en déduit que $\frac{OD}{DB} = \Phi$, donc que $\frac{OB}{OD} = \Phi$; or OB = OA, donc OD = AB.
En utilisant Pythagore généralisé dans OAB, on a : $OA^2 = AB^2 + OB^2 - 2AB.OB.\cos 2\alpha$, d'où $\cos 2\alpha = \frac{AB}{2OB} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\Phi^2 - \Phi}{2\Phi} = \frac{\Phi - 1}{2}$. De là $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{\Phi + 1}{4} = \frac{\Phi^2}{4}$, d'où $\cos \alpha = \frac{\Phi}{2}$.
En utilisant la formule des sinus dans ADB, on a : $\frac{\sin 2\alpha}{AD} = \frac{\sin \alpha}{BD}$, d'où $AD = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} BD = 2\cos\alpha.BD$, soit $AD = \Phi.BD = OD$. Ainsi les triangles ABD et DAO sont isocèles, on en déduit que la somme des angles du triangle OAB vaut 5α, de là $\alpha = \gamma = 36°$.
ADO est un second type de triangle d'or.



5. Le pentagone



On part de la figure 1, on trace le cercle de centre B passant par A. Le triangle ABE est un triangle d'or, donc $\widehat{EBI} = 72°$. On a : $\dfrac{AC}{AB} = \Phi$ et AC = AF, donc ABF est un triangle d'or, d'où $\widehat{ABF} = 108°$, on en déduit que $\widehat{EBF} = 108° - 36° = 72°$ et $\widehat{GBF} = 180° - 108° = 72°$.

On en déduit que EFGHI est un pentagone.

EGIFH est un pentagone étoilé.

Remarquer que EGI et EFG, ainsi que beaucoup d'autres, sont des triangles d'or.