1) Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A, B, C et D 4 points deux à deux distincts de ce cercle, alors $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$.

Preuve :

En utilisant la relation de Chasles et le fait que les triangles OAC et ODB sont isocèles, on a :

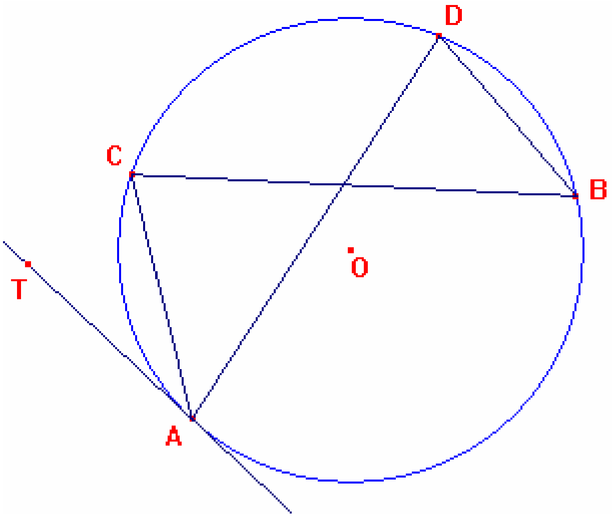
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OB})[2\pi] \\ &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})[2\pi] \\ &= 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]\end{aligned}$$

On retrouve le résultat connu : le double de l'angle inscrit est égal à l'angle au centre.

De la même façon, on a :

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[2\pi]$$

On en déduit que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$



Remarque :

Si (TA) est la tangente en A au cercle, alors, en passant aux positions limites si D tend vers A, on a :

$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi] = (\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})[\pi]$.

Ou si l'on préfère :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) &= \pi - 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})[2\pi] \\ &= \pi - 2((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}) + (\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}))[2\pi] \\ &= 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})[2\pi]\end{aligned}$$

2) Réciproquement :

Si A, B, C et D sont 4 points deux à deux distincts et non alignés tels que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$, alors ils sont cocycliques.

Preuve :

Soit $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) le cercle passant par C, A et B (resp. D, A et B).

Soit (TA) (resp. (T 'A)) la tangente à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) en A.

Alors : $(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{T'A},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$. Les deux tangentes en A sont donc confondues.

De plus les deux cercles passent par A et B; on en déduit qu'ils sont confondus.

Les 4 points sont donc cocycliques.