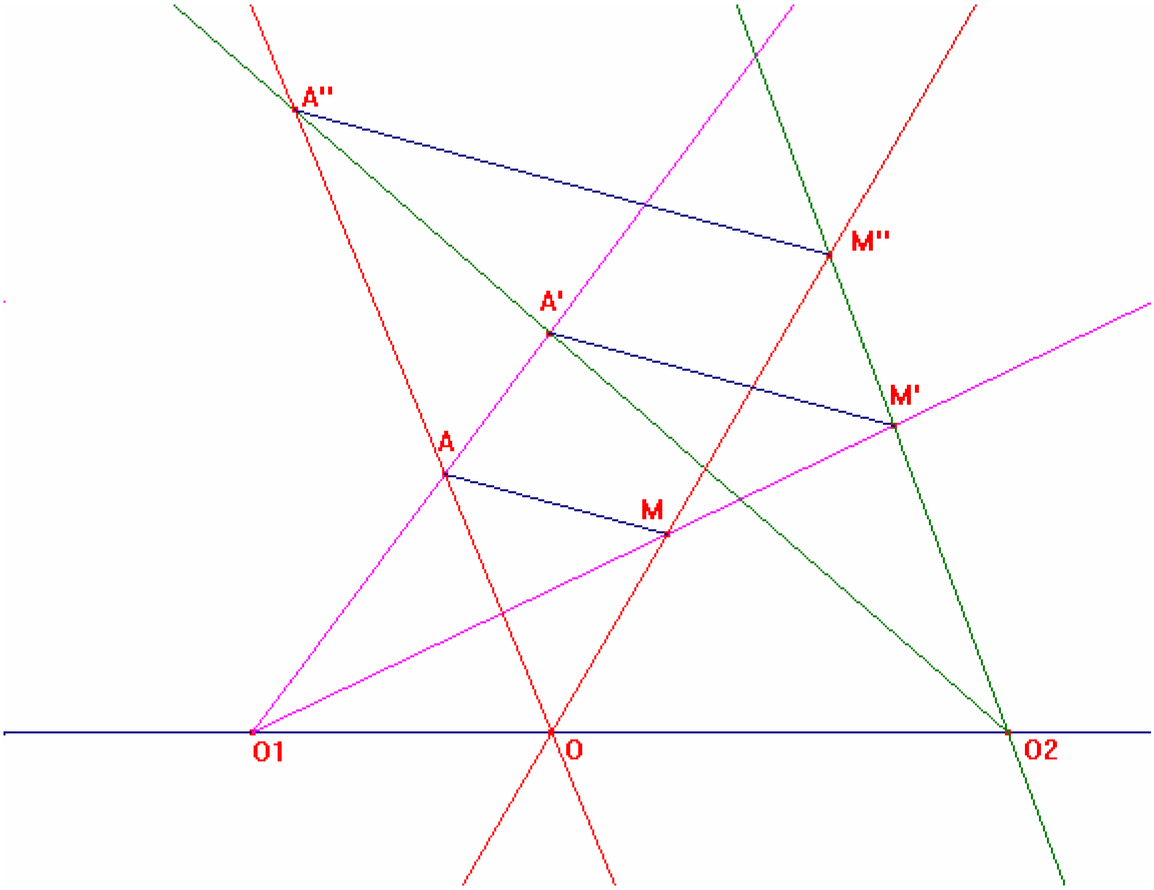

Soit h1 = H(O1,k1) et h2 = H(O2,k2) deux homothéties de centres différents, A un point fixe et M un point quelconque. Soit $f = h2 \circ h1$.

On a :

$$\begin{array}{ccccc} & h1 & & h2 & \\ M & \mapsto & M' & \mapsto & M'' \\ A & \mapsto & A' & \mapsto & A'' \end{array}$$

Pour tout M, $\overrightarrow{A''M''} = k2\overrightarrow{A'M'} = k2 \times k1\overrightarrow{AM}$.

Si $k2 \times k1 = 1$, alors, pour tout M, $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AA''}$; f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$.

Si $k2 \times k1 \neq 1$, f possède un unique point invariant O. En effet :

$f(O) = O$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA''} = k2 \times k1\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow (1 - k2 \times k1)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A''A}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \dfrac{\overrightarrow{A''A}}{1 - k2 \times k1}$

ceci prouve l'existence et l'unicité du point fixe de f.

Ainsi, pour tout point M, $\overrightarrow{OM''} = k2 \times k1\overrightarrow{OM}$, donc $f = H(O, k1 \times k2)$.

D'autre part, la droite (O1O2) est invariante par chacune des deux homothéties, donc aussi par f, elle passe donc par O.