



Soit M un point quelconque.

On a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = MO^2 - R^2$, où R est le rayon du cercle.

On appelle puissance du point M par rapport au cercle C, le réel $p(M, C) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Si M est extérieur au cercle, alors $p(M, C) = MT^2$.

Soit C et C' deux cercles de centres respectifs O et O', avec O différent de O', et de rayons respectifs R et R'.

Soit E l'ensemble des points M tels que $p(M, C) = p(M, C')$.

On a :

$$p(M, C) = p(M, C')$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) = R^2 - R'^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{O'O} = R^2 - R'^2 \quad \text{où } I = m[OO']$$

Donc E est un axe perpendiculaire à la droite (OO'), cet axe est appelé l'axe radical de C et C'.

Si les deux cercles sont sécants en deux points distincts A et B, l'axe (AB) est l'axe radical.

Si les deux cercles sont tangents en un point A, alors l'axe radical est la droite perpendiculaire à (OO') passant par A.

Avec trois cercles de centres non alignés, les axes radicaux sont sécants en un point appelé centre radical des trois cercles.

On peut utiliser cette remarque pour construire l'axe radical de deux cercles d'intersection vide en utilisant un troisième cercle sécant avec les deux premiers.

