



H est l'orthocentre du triangle.

Le triangle $A_1B_1C_1$ est le triangle orthique de ABC.

Propriété : les hauteurs de ABC sont des bissectrices de $A_1B_1C_1$.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1H}) &= (\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CH})[\pi] && \text{car } A_1, H, B_1 \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
 &= (\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC_1})[\pi] && \text{car } B, C_1, B_1 \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
 &= (\overrightarrow{A_1H}, \overrightarrow{A_1C_1})[\pi] && \text{car } A_1, H, C_1 \text{ et } B \text{ sont cocycliques}
 \end{aligned}$$

On en déduit que (A_1H) est l'une des bissectrices de $A_1B_1C_1$, pas forcément une bissectrice intérieure comme le montre la figure ci-dessous.

