LOI NORMALE

A) GENERALITES

I) VARIABLE ALEATOIRE REELLE CONTINUE

❷ **Définition 1 :** *(Variable continue)*

Une variable aléatoire X est « réelle continue » seulement si l'ensembles des valeurs de X est ℝ.

Exemples : ① X = taille ② X = poids ③ X = température … sont des variables continues.

II) DENSITE de PROBABILITE d'une variable continue.

❷ **Définition 2 :** *(Densité de probabilité)*

Soit X une variable aléatoire réelle continue.

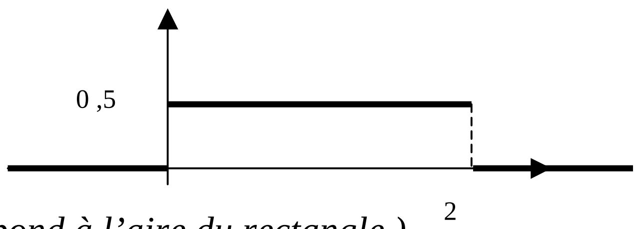
Une fonction f est une *densité de probabilité* de la variable aléatoire X seulement si f est intégrable sur ℝ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ c'est à dire $\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{+t} f(x)\,dx = 1$.

C'est une fonction dont ***l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses vaut 1***.

Exemples de densité de probabilité :

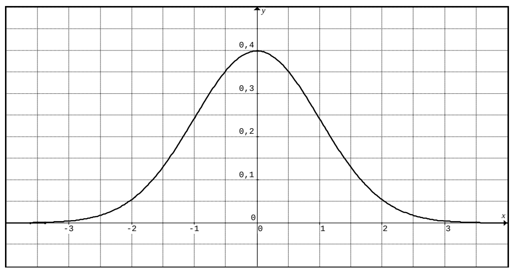
① f est telle que : $\begin{cases} f(x) = 0{,}5 \text{ pour } x \in [\,0\,,\,2\,] \\ f(x) = 0 \text{ pour } x \notin [\,0\,,\,2\,] \end{cases}$

(loi uniforme sur [0 ; 2])



On a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0{,}5 \times 2 = 1$. *(correspond à l'aire du rectangle)*

② $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ *(loi normale centrée réduite)*



On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

(L'aire sous la courbe vaut 1)

II) PROBABILITE d'un intervalle [a ; b] de ℝ

❷ **Définition 3 :** *(probabilité d'un intervalle)*

Soit X une variable aléatoire réelle continue dont la densité de probabilité est f.

La probabilité de l'intervalle [a ; b] est le nombre $\boxed{p(\,[a\,;\,b]\,) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$.

Où F est une primitive de f.

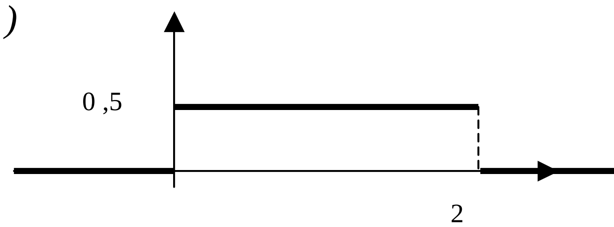
Elle correspond à **l'aire entre la courbe de f, l'axe des abscisses pour a ≤ x ≤ b .**

Remarque : **p ([a ; b]) est aussi noté p (X ∈ [a ; b]) ou encore p (a ≤ X ≤ b) .**

Exemples :

① $\begin{cases} f(x) = 0{,}5 \text{ pour } x \in [\,0\,,\,2\,] \\ f(x) = 0 \text{ pour } x \notin [\,0\,,\,2\,] \end{cases}$ *(loi uniforme sur [0 ; 2])*

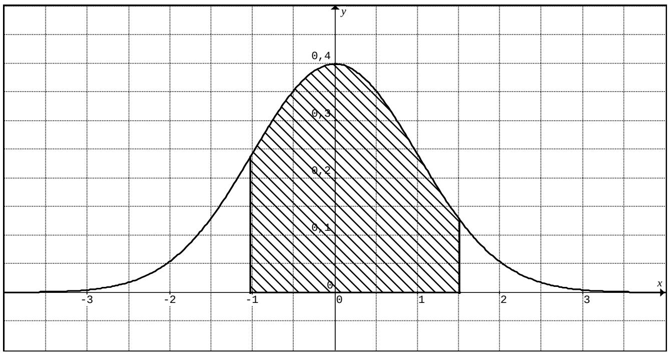
$p(\,0 \le X \le 0{,}8\,) = \int_0^{0{,}8} f(x)\,dx = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4$.



② $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$

(loi normale centrée réduite)

$p(-1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{-1}^{1{,}5} f(x)\,dx \approx 0{,}7.$



III) Probabilité et FONCTION de REPARTITION

❷ **Définition 4 :** *(fonction de répartition)*

Soit X une variable aléatoire réelle continue.

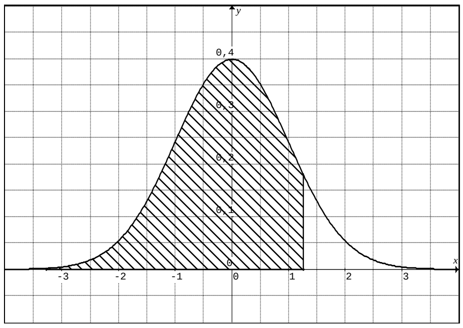
La fonction de répartition de X est la fonction notée F définie sur $\mathbb{R}$ telle $\boxed{F(x) = p(X \leq x)}$

Remarques :

① On note aussi : $F(x) = p(X \in]-\infty ; x])$

② Si X a pour densité de probabilité f alors $F(x) = p(X \leq x)$ correspond a l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses pour les abscisses inférieures à x.

On a donc $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$



❷ **Propriété 1 :**

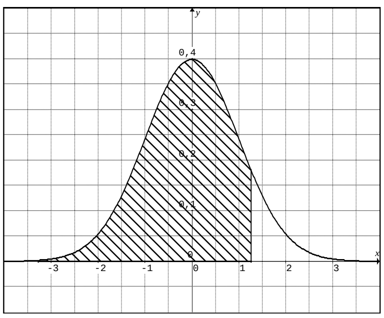
Soit X une variable aléatoire réelle continue.

Soit F la fonction de répartition de X :

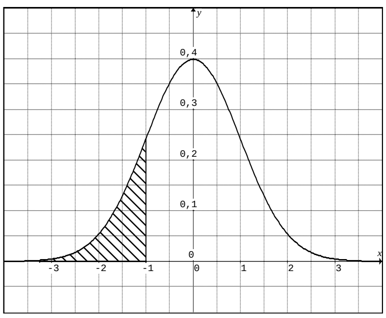
$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = F(b) - F(a)$

Remarques :

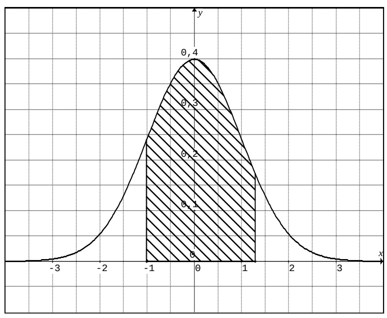
① Si X a pour densité de probabilité f alors F(b) – F(a) correspond à correspond a la différence entre l'aire sous la courbe pour les abscisses inférieures à b et l'aire sous la courbe pour les abscisses inférieures à a.



moins



égal



$P(X \leq b)$ – $p(X \leq a)$ = $p(a \leq X \leq b)$

$F(b)$ – $F(a)$ = $p(X \in [a ; b])$

② Si X a pour densité de probabilité f alors la fonction de répartition de X n'est rien d'autre autre qu'une primitive de f. (F ' = f).

③ **Pour connaître la probabilité d'un intervalle quelconque, il suffit de connaître les valeurs de la fonction de répartition F.**

B) Loi NORMALE

❷ **Définition 5 :** *(loi normale)*

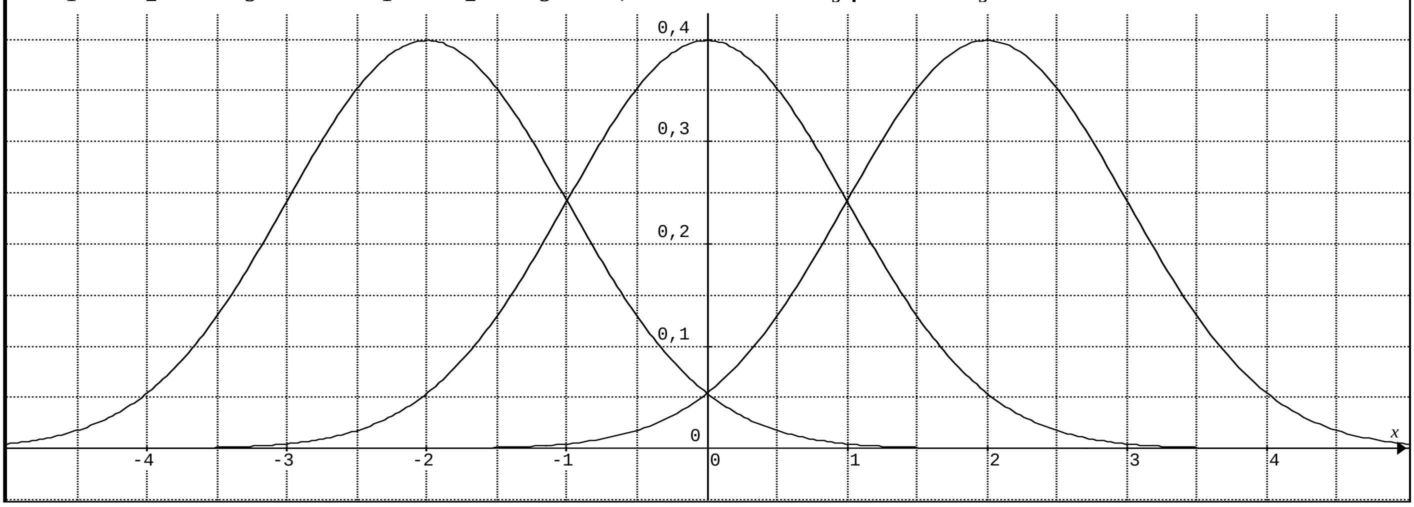
X est une variable aléatoire continue, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, « e » est la base des logarithmes Népériens.
X suit une loi normale de moyenne m et d' écart type $\sigma > 0$
Si et seulement si

X a pour **densité de probabilité** la fonction f telle que $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

On note alors : X suit une loi $\mathcal{N}\,(\ m\ ;\ \sigma\ )$

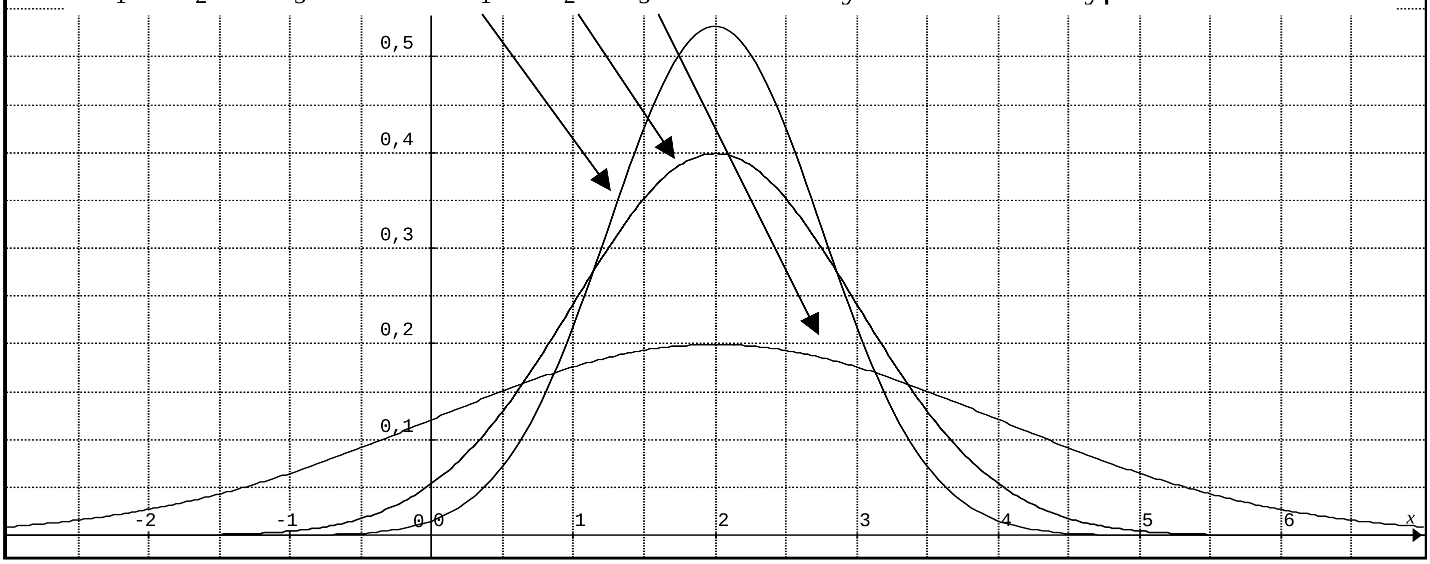
Exemples : ($m_1 = -2$; $\sigma_1 = 1$) ($m_2 = 0$; $\sigma_2 = 1$) ($m_3 = 2$; $\sigma_3 = 1$)

$m_1 < m_2 < m_3$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$; même écart type et moyennes différentes



($m_1 = 2$; $\sigma_1 = 0{,}75$) ($m_2 = 2$; $\sigma_2 = 1$) ($m_3 = 2$; $\sigma_3 = 2$)

$m_1 = m_2 = m_3 = 2$ et $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$: mêmes moyennes et écart types différents



Remarques :

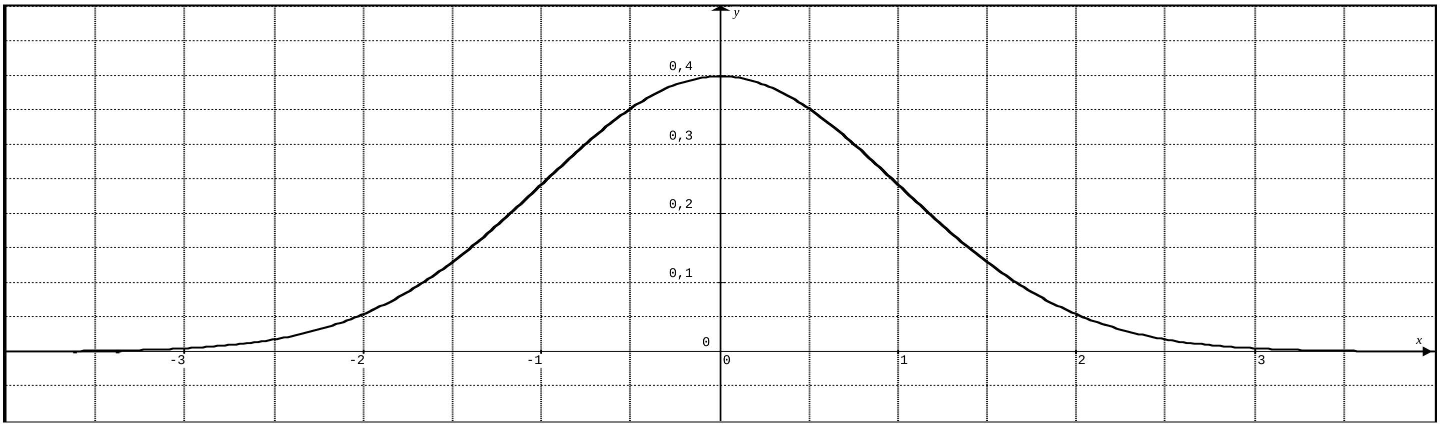
1. Les courbes sont des « courbes en cloche ».
2. Chaque courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation x = m = moyenne.
3. Le maximum de f est atteint pour x = m.
4. Plus l'écart type est petit et plus la courbe est resserrée autour de son axe de symétrie
5. Plus l'écart type est grand et plus la courbe est dispersée autour de l'axe de symétrie.

❷Définition 6 : *(loi normale centrée réduite)*

X suit la loi normale centrée réduite si et seulement si m = 0 (centrée) et $\sigma = 1$ (réduite)

X a alors pour **densité de probabilité** la fonction f telle que $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}}$

On note : X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$



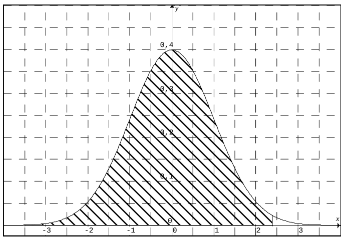
❷ Propriété 2: (Table de la loi normale centrée réduite)

X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on pose $\Pi(a) = p(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$

Les valeurs de $\Pi(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ constituent la table de la loi normale centré réduite.
*(donnée en annexe *)*

Exemple :
Si X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ alors $p(X \leq 2{,}32) = \Pi(2{,}32)$
(voir la table)

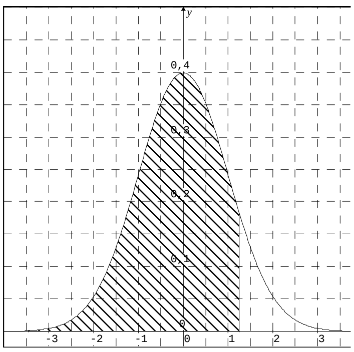
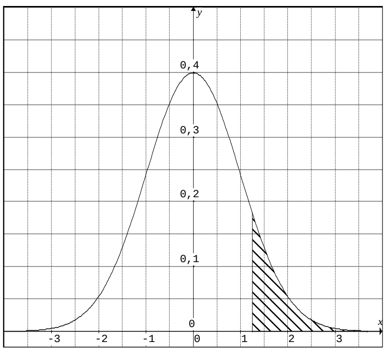
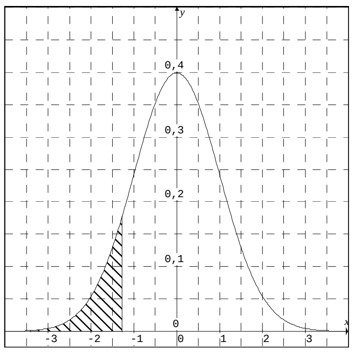
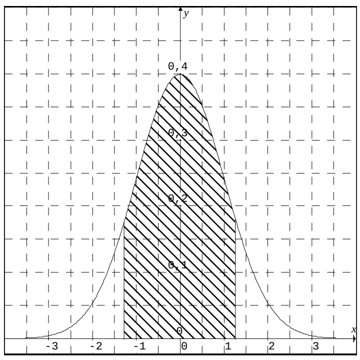


❷ Propriété 3: (Propriété de la loi normale centrée réduite)

X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$
Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ on a : $\mathbf{p(X \leq a) = p(X < a) = \Pi(a).}$
$\mathbf{p(X \geq a)} = 1 - p(X \leq a) = \mathbf{1 - \Pi(a).}$

Quel que soit $a > 0$ on a : $\mathbf{p(X \leq -a)} = \Pi(-a) = p(X \geq a) = \mathbf{1 - \Pi(a).}$

Quel que soit $a > 0$ on a : $\mathbf{p(-a \leq X \leq a) = 2\Pi(a) - 1.}$

$p(X \leq a) = \Pi(a)$ **$p(X \geq a) = 1 - \Pi(a).$** **$p(X \leq -a) = 1 - \Pi(a).$** **$p(-a \leq X \leq a) = 2\Pi(a) - 1$**

Exemple :

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ alors :

$p(X \leq 2{,}32) = \Pi(2{,}32) = 0{,}9898$

$p(X \geq 2{,}32) = 1 - \Pi(2{,}32) = 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

$p(X \leq -2{,}32) = \Pi(-2{,}32) = 1 - \Pi(2{,}32) = 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

$p(-2{,}32 \leq X \leq 2{,}32) = \Pi(2{,}32) - \Pi(-2{,}32) = 0{,}9898 - (1 - 0{,}9898) = 0{,}9796.$

❷Propriété 4: (probabilité d'un intervalle)

X suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$
Quels que soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on a $p(a \leq X \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$

Exemple :

$p(1{,}23 \leq X \leq 2{,}32) = \Pi(2{,}32) - \Pi(1{,}23)$

On lit dans la table $\Pi(1{,}23) = 0{,}8907$ et $\Pi(2{,}32) = 0{,}9898$

d'ou $p(1{,}23 \leq X \leq 2{,}32) = \Pi(2{,}32) - \Pi(1{,}23) = 0{,}9898 - 0{,}8907 = 0{,}0991.$

❷ Propriété 5 : (changement de variable)

Soit X une variable aléatoire et $\boxed{T = \frac{X - m}{\sigma}}$ la variable aléatoire obtenue à partir de X.

On retire m à X puis on divise le résultat par σ.

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m ; \sigma)$ de moyenne m et d' écart type $\sigma > 0$

Alors $T = \frac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$

Remarque :

On a alors $p(a \leq X \leq b) = p\left(\frac{a - m}{\sigma} \leq T \leq \frac{b - m}{\sigma}\right)$ et le calcul de $p(a \leq X \leq b)$ pour une loi normale quelconque se ramène au calcul de $p(a' \leq T \leq b')$ pour une loi normale centrée réduite avec $a' = \frac{a - m}{\sigma}$ et $b' = \frac{b - m}{\sigma}$.

Exemple : Supposons que X suive une loi $\mathcal{N}(50 ; 0{,}1)$.

1. On cherche à calculer $p(50{,}1 \leq X \leq 50{,}2)$ pour cela on change de variable,

$T = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 50}{0{,}1}$ suit une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$

et on a $p(55 \leq X \leq 60) = p\left(\frac{50{,}1 - 50}{0{,}1} \leq T \leq \frac{50{,}2 - 50}{0{,}1}\right) = p(1 \leq T \leq 2) = F(2) - F(1)$

d'ou $p(55 \leq X \leq 60) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359.$

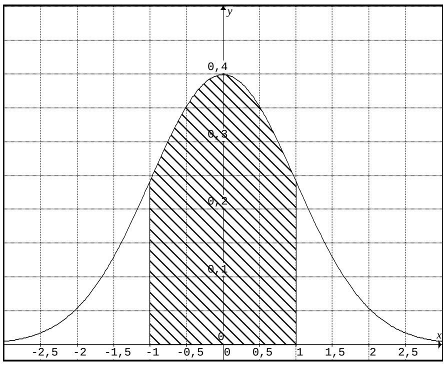
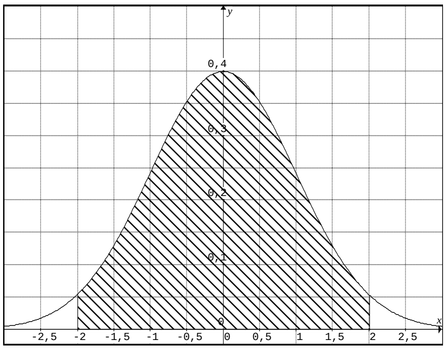
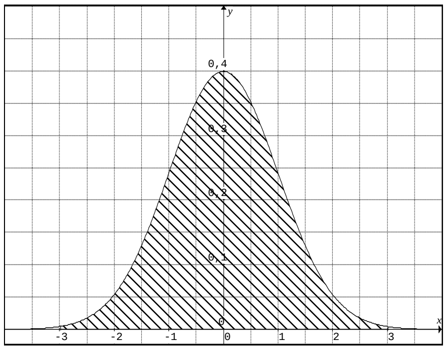
2. On cherche à déterminer x tel que $p(X \leq x) = 0{,}8$

On cherche alors t tel que $p(T \leq t) = 0{,}8$ dans la table de la loi normale, on prendra $P(T \leq 0{,}84) = 0{,}8$

Puis sachant que $t = \frac{x - 50}{0{,}1} = 0{,}84$ on en déduit $x = 0{,}1 \times 0{,}84 + 50 = 50{,}084.$

Remarque : Quelle que soit la loi $\mathcal{N}(m ; \sigma)$ de moyenne m et d' écart type $\sigma > 0$

On montre que si X suit la loi $\mathcal{N}(m ; \sigma)$ Alors

$p(m - \sigma \le X \le m+\sigma) \approx 0{,}68$ $p(m - 2\sigma \le X \le m + 2\sigma) \approx 0{,}95$ $p(m - 3\sigma \le X \le m + 3\sigma) \approx 0{,}998$

❷ **Propriété 6 :** (Convergence de la loi binomiale vers la loi normale)

Soit X une variable aléatoire discrète et $p > 0$.
Si X suit une loi binomiale $B(n ; p)$
Alors plus n est grand et plus la loi de X se rapproche d'une loi $\mathcal{N}(m' ; \sigma')$
Avec $m' = np$ et $\sigma' = \sqrt{np(1-p)}$
On dit que la loi binomiale converge vers une loi normale.

Remarque : pour n suffisamment grand.
Pour calculer $p(X \le a)$ on pourra considérer la variable Y suivant une loi $\mathcal{N}(np ; \sqrt{np(1-p)})$
Puis déterminer $p(Y \le a)$ par changement de variable grâce à la table de la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$
Puis on fera l'approximation $p(X \le a) \approx p(Y \le a)$

Exemple :
Si X suit une loi binomiale $B(1000 ; 0{,}5)$ on cherche à calculer $p(X \le 510)$
On considère Y suivant une loi $\mathcal{N}(1000\times0{,}5 ; \sqrt{1000\times0{,}5\times(1-0{,}5)}) = \mathcal{N}(500 ; \sqrt{250})$
On cherche alors $p(Y \le 510)$ sachant que $p(Y \le 510) \approx p(X \le 510)$.
On change de variable en considérant $Z = \dfrac{Y-500}{\sqrt{250}}$ et $\dfrac{510-500}{\sqrt{250}} \approx 0{,}63$
puis on cherche $p(Z \le 0{,}63)$ grâce à la table de la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$
Ce qui donne $p(Z \le 0{,}632) \approx 0{,}7324$

D'ou finalement $p(X \le 510) \approx p(Y \le 510) = p(Z \le 0{,}632) \approx 0{,}7324$.

Résumé : (« suit une loi » sera noté dans ce qui suit « ~ »)
Pour calculer $p(X \le a)$ avec $X \sim B(n ; p)$
On calcule $p(Y \le a)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(np ; \sqrt{np(1-p)})$ en considérant que $p(X \le a) \approx p(Y \le a)$.
Pour cela on calcule $p\left(Z \le \dfrac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0 ; 1)$

considérant que p (Y ≤ a) = p (Z ≤ a') avec $a' = \dfrac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

On considère successivement les variables, lois et probabilités suivantes.

$X \sim B(n;p)$ **théorème de convergence** $Y \sim \mathcal{N}(np\,;\sqrt{np(1-p)})$ **changement de variable** $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

p (X ≤ a) p (Y ≤ a) p (Z ≤ a')

❷ <u>Propriété 7 :</u> (*Somme de deux lois normales indépendantes*)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles continues.

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1\,;\sigma_1)$
Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m_2\,;\sigma_2)$
X et Y sont **indépendantes**

Alors Z = X + Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mathbf{m_1 + m_2\,;\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$

<u>Remarques :</u>

L'espérance de Z s'obtient en **additionnant les espérances** de X et Y .
La variance de Z s'obtient en **additionnant les variances** de X et Y .
$V(Z) = V(X) + V(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$
L'écart type de Z est donc $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ et <u>on n'additionne donc pas les écart types de X et Y.</u>

<u>Exemple :</u>

X suit une loi normale $\mathcal{N}(80; 3)$
Y suit une loi normale $\mathcal{N}(20; 4)$
X et Y sont indépendantes

Alors Z = X + Y suit une loi normale $\mathcal{N}(80 + 20\,;\sqrt{3^2 + 4^2}) = \mathcal{N}(100\,;5)$

❷ <u>Propriété 8 :</u> (**Espérance** *d'une combinaison linéaire de deux variables quelconques*)

Soient X et Y deux variables aléatoires. Soient a et b deux réels quelconques.
On a :

1) $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$
2) $\boxed{E(X-Y) = E(X) - E(Y)}$
3) $\boxed{E(aX) = aE(X)}$
4) $\boxed{E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)}$
5) $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$ *(admis)*

❷ <u>Propriété 9 :</u> (**Variance** *d'une combinaison linéaire de deux variables indépendantes*)

Soient X et Y deux variables aléatoires. Soient a et b deux réels quelconques.
Seulement si X et Y sont indépendantes on a :

1) $\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$
2) $\boxed{V(X-Y) = V(X) + V(Y)}$ *(attention)*
3) $\boxed{V(aX) = \mathbf{a^2}\,V(X)}$ *(attention)*

4) $\boxed{V(aX+Y) = \mathbf{a}^2V(X) + V(Y)}$

5) $\boxed{V(aX + b) = \mathbf{a}^2V(X) + 0 = a^2V(X)}$ *(admis)*

<u>Exemple :</u> Si $E(X) = 5$ et $E(Y) = 10$ et $V(X) = 15$ et $V(Y) = 20$.
alors $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2\times5 - 3\times10 = -20$
et $V(2X - 3Y) = V(2X) + V(3Y) = 2^2 \times15 + 3^2\times20 = 60 + 180 = 240$.