

**NOTES DE COURS**

**INTRODUCTION  
A LA MECANIQUE DES FLUIDES**

**ECOLE D'INGENIEURS EPF  
TROISIEME ANNEE**

**DENIS SIPP**

<b>1. CINEMATIQUE DU FLUIDE .....</b>	<b>3</b>
1.1. QUELQUES RAPPELS MATHEMATIQUES .....	3
1.1.1. Opérations avec un scalaire .....	3
1.1.2. Opérations avec un vecteur .....	3
1.1.3. Opérations avec une matrice .....	4
1.2. LA REPRESENTATION EULERIENNE .....	4
<b>2. PHYSIQUE DU FLUIDE.....</b>	<b>6</b>
2.1. LA REPRESENTATION DES EFFORTS .....	6
2.2. THERMODYNAMIQUE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE .....	6
2.3. THERMODYNAMIQUE D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE .....	8
2.4. ECHANGE DE CHALEUR.....	9
2.5. DEUX EXEMPLES : L'AIR ET L'EAU .....	9
<b>3. LOIS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES.....</b>	<b>11</b>
3.1. UNE EQUATION DE BILAN .....	11
3.2. CONSERVATION DE LA MASSE, DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT, DE L'ENERGIE (PREMIER PRINCIPE), INEGALITE FONDAMENTALE (SECOND PRINCIPE).....	11
3.3. BILAN D'ENTROPIE.....	13
3.4. LE GAZ PARFAIT .....	14
3.5. LE FLUIDE INCOMPRESSIBLE .....	14
3.6. CONDITIONS AUX LIMITES .....	15
3.7. EXEMPLE : L'ECOULEMENT DE POISEUILLE .....	15
<b>4. ANALYSE DIMENSIONNELLE .....</b>	<b>17</b>
4.1. ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS REGISSANT LE GAZ PARFAIT .....	17
4.2. ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS REGISSANT UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE .....	19
4.3. LE MODELE DE FLUIDE INCOMPRESSIBLE ET LES ECOULEMENTS DE GAZ PARFAIT A FAIBLE NOMBRE DE MACH 20 .....	20
4.4. ANALYSE DIMENSIONNELLE D'UN PHENOMENE PHYSIQUE .....	23
4.4.1. Traînée d'une sphère en écoulement incompressible .....	23
4.4.2. Traînée d'une sphère en écoulement compressible.....	23
4.5. PROPRIETES D'INVARIANCE ET SOLUTIONS AUTO-SEMBLABLES.....	25
<b>5. COUCHE LIMITE.....</b>	<b>29</b>
5.1. LA COUCHE LIMITE DANS LES ECOULEMENTS DE FLUIDE INCOMPRESSIBLE .....	29
5.1.1. Ecoulement à l'extérieur de la couche limite .....	29
5.1.2. Ecoulement dans la couche limite.....	31
5.1.3. Paramètres caractérisant la couche limite .....	33
5.1.4. Couche limite de Blasius.....	34
5.2. LA COUCHE LIMITE DANS LES ECOULEMENTS DE GAZ PARFAIT A FAIBLE NOMBRE DE MACH .....	38
<b>6. COMPRESSIBILITE.....</b>	<b>41</b>
6.1. COMPRESSIBILITE INSTATIONNAIRE EN 1D .....	41
6.1.1. Introduction .....	41
6.1.2. Application au cas d'un piston.....	45
6.2. LE MODELE FLUIDE PARFAIT SANS DISCONTINUTE.....	46
6.2.1. Cas général.....	46
6.2.2. Application au cas d'une tuyère.....	47
6.3. LE MODELE FLUIDE PARFAIT AVEC DISCONTINUTE .....	51
6.3.1. Relations de choc .....	51
6.3.2. Application au cas d'une tuyère .....	57
<b>7. TURBULENCE.....</b>	<b>58</b>
7.1. LES EQUATIONS MOYENNEES.....	58
7.2. MODELISATION DE LA TURBULENCE.....	60
7.3. ENERGIE CINETIQUE .....	61
7.4. BILAN ENERGETIQUE .....	62

# 1. Cinématique du fluide

## 1.1. Quelques rappels mathématiques

### 1.1.1. Opérations avec un scalaire

$$f(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\underline{\text{grad}} f = \partial_i f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \partial_i \partial_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### 1.1.2. Opérations avec un vecteur

$$\underline{f}(x, y, z, t) = f_i(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Contraction avec un vecteur : } \underline{g} = g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}, \underline{f} \cdot \underline{g} = f_i g_i = f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}, \frac{\partial f_x}{\partial y}, \frac{\partial f_x}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial t}$$

$$\text{div } \underline{f} = \partial_i f_i = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\underline{\text{rot}} \underline{f} = \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{grad } f}} = \partial_j f_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = \partial_j \partial_j f_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

### 1.1.3. Opérations avec une matrice

$$\underline{\underline{f}}(x, y, z, t) = f_{ij}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{div } f}} = \partial_j f_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial f_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial f_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Contraction avec un vecteur : } \underline{\underline{g}} = g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}, \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{g}} = f_{ij} g_j = \begin{pmatrix} f_{xx} g_x + f_{xy} g_y + f_{xz} g_z \\ f_{yx} g_x + f_{yy} g_y + f_{yz} g_z \\ f_{zx} g_x + f_{zy} g_y + f_{zz} g_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Contraction avec une matrice : } \underline{\underline{g}} = g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{g}} = f_{ij} g_{ij} = f_{xx} g_{xx} + f_{xy} g_{xy} + f_{xz} g_{xz} + f_{yx} g_{yx} + f_{yy} g_{yy} + f_{yz} g_{yz} + f_{zx} g_{zx} + f_{zy} g_{zy} + f_{zz} g_{zz}$$

## 1.2. La représentation eulérienne

$$\underline{U}(x, t), p(x, t), \rho(x, t), T(x, t)$$

D'où toutes les quantités définies précédemment.

$$\text{On définit la dérivée particulière: } \frac{d}{dt} = \partial_t + U_i \partial_i = \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad}(\cdot) \cdot \underline{U}$$

Interprétation :

$$\text{Trajectoire : } t \rightarrow x_i(t), \text{ tel que : } \frac{d}{dt} x_i(t) = U_i(x_i, t)$$

$$\text{Soit une grandeur en représentation eulérienne : } (x_i, t) \rightarrow \Phi(x_i, t).$$

On considère :  $t \rightarrow \Phi(x_i(t), t)$ .

$$\text{Alors : } \frac{d}{dt} \Phi(x_i(t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = U_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

## 2. Physique du fluide

### 2.1. La représentation des efforts

$\sigma_{ij}$  est la composante selon la direction  $i$  du vecteur-contrainte agissant sur la facette de normale sortante  $j$ .

$$df = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{nda}$$

Pour un fluide au repos :  $df = -p \underline{nda}$  (équilibre hydrostatique) et donc  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I}$

De façon général :  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + \underline{\underline{\tau}}$

$$\underline{\underline{\tau}} = f(\underline{\underline{grad}} \underline{U})$$

Fluide newtonien :

Hypothèses :

- linéarité en fonction de  $\underline{\underline{grad}} \underline{U}$
- principe d'objectivité (indépendance par rapport à un mouvement de translation et un mouvement de rotation rigide)
- milieu fluide isotrope

Donc :

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \text{div} \underline{U} \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

$$\text{où } \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\underline{grad}} \underline{U})$$

Ici :  $\mu(\rho, T)$  et  $\lambda(\rho, T)$

$$\text{Conclusion : } \underline{\underline{\sigma}} = (-p + \lambda \text{div} \underline{U}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

Pour un gaz monoatomique, on montre la relation de Stokes :  $3\lambda + 2\mu = 0$

Cette relation est également vérifiée expérimentalement pour les gaz polyatomiques.

### 2.2. Thermodynamique d'un fluide compressible

Préalable mathématique : si  $f(u, v)$  alors  $df = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_v du + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_u dv$

Energie interne :  $e$

Masse volumique :  $\rho$

Entropie :  $s$

➤ Equation d'état canonique :  $e(\rho, s)$

Définition de la température :  $T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_\rho$

Définition de la pression thermodynamique :  $p = \rho^2 \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_s$

D'où :  $de = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$

➤ Equation d'état calorique :  $e(\rho, T)$

Chaleur spécifique à volume constant :  $C_V(\rho, T) = \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_\rho$

$$de = C_V dT + \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_T d\rho$$

➤ Equation d'état thermique :  $p(\rho, T)$

Coefficient de dilatation thermique à pression constante :  $\alpha(p, T) = - \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p$

Coefficient de compressibilité isotherme :  $\kappa_T(p, T) = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha dT + \kappa_T dp$$

➤ Lien entre l'équation d'état calorique et l'équation d'état thermique :

$$\left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_T = \frac{1}{\rho^2} \left[ p - T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho \right]$$

➤ Enthalpie :  $h = e + \frac{p}{\rho}$

$$dh = de + \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

Donc  $h(p, s)$

➤ Equation d'état calorique :  $h(p, T)$

Chaleur spécifique à pression constante :  $C_p(p, T) = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$

$$dh = C_p dT + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp$$

➤ Relation de Mayer :  $C_p - C_V = \frac{T \alpha^2}{\rho \kappa_T}$

➤ Rapport des chaleurs spécifiques :  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

➤ On considère :  $p(\rho, s)$

Vitesse du son :  $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$

On démontre que :  $c^2 = \frac{\gamma}{\rho \kappa_T}$

➤ Le gaz parfait

Un gaz est dit thermiquement parfait lorsque son équation d'état thermique prend la forme :  $p = \rho r T$ .

$r = \frac{R}{M}$  où  $R = 8,3145 \text{ J / mole / K}$  est la constante universelle des gaz parfaits et  $M$  est la masse molaire du gaz.

Rappel :  $PV = nRT$  où  $n$  représente le nombre de moles de gaz dans le volume  $V$

La masse de gaz  $m$  dans le volume  $V$  vaut :  $m = \rho V = Mn$

$$\text{D'où : } P \frac{m}{\rho} = \frac{m}{M} RT \text{ et donc : } p = \rho \frac{R}{M} T = \rho r T$$

$$\text{Donc : } \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_T = 0.$$

$$\text{D'où : } e = e(T) \text{ et } h = e + \frac{p}{\rho} = e(T) + rT = h(T).$$

$$C_v = \frac{de}{dT} = C_v(T)$$

$$C_p = \frac{dh}{dT} = C_p(T)$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\kappa_T = \frac{1}{p}$$

$$\text{Relation de Mayer : } C_p - C_v = r$$

$$\text{Vitesse du son : } c^2 = \gamma r T$$

Un gaz thermiquement parfait est dit caloriquement parfait lorsque les chaleurs spécifiques sont constantes.  
Dans ce cas :

$$e(T) = C_v T$$

$$h(T) = C_p T$$

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho = C_v dT - r T \frac{d\rho}{\rho}.$$

$$\text{Donc : } ds = C_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho}$$

$$s(T, \rho) = C_v \log T - r \log \rho + cte = C_v \log \left( \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} \right) + cte$$

$$s(T, p) = C_p \log T - r \log p + cte = C_p \log \left( \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right) + cte$$

$$s(p, \rho) = C_v \log \frac{p}{\rho^\gamma} + cte$$

### 2.3. Thermodynamique d'un fluide incompressible

Energie interne :  $e$

Entropie :  $s$

➤ Equation d'état canonique :  $e(s)$

Définition de la température :  $T = \frac{de}{ds}$ ,

La pression thermodynamique n'est pas définie.

D'où :  $de = T ds$

➤ Equation d'état calorique :  $e(T)$

Chaleur spécifique :  $C(T) = \frac{de}{dT}$

D'où :  $de = CdT$

### 2.4. Echange de chaleur

$$dQ = -\underline{q} \cdot \underline{nda}$$

Loi de Fourier :  $\underline{q} = -K \underline{grad} T$

Coefficient de conductibilité thermique :  $K(\rho, T)$  est le

Coefficient de diffusivité thermique :  $\chi = \frac{K}{\rho C_p}$

Nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$

Pour de nombreux fluides, en excluant des conditions extrêmes de température, le nombre de Prandtl peut être considéré comme constant.

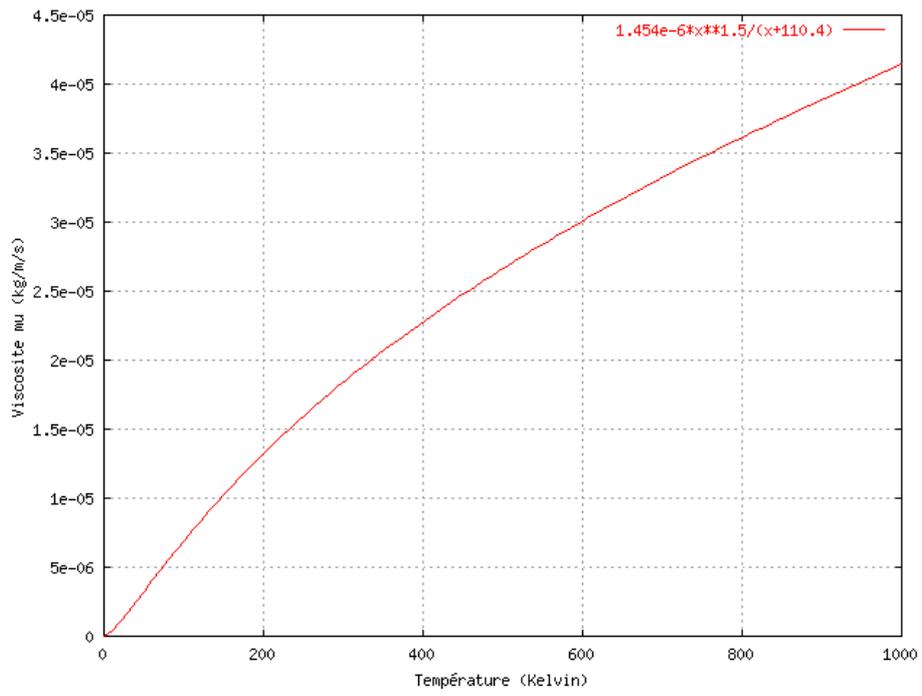
### 2.5. Deux exemples : l'air et l'eau

	air à 273°K	eau à 293°K
$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	1,293	998,20
$\mu$ (kg / m / s)	$1,72 \times 10^{-5}$	$1,005 \times 10^{-3}$
$\nu$ (m <sup>2</sup> / s)	$1,37 \times 10^{-5}$	$1,007 \times 10^{-6}$
$K$ (W / m / K)	$2,41 \times 10^{-2}$	0,62
Pr	0,715	6,75
$C_p$ (J / kg / K)	$1,00 \times 10^3$	
$C_v$ (J / kg / K)	$7,14 \times 10^2$	$4,18 \times 10^3$
$\gamma$	1,40	
$\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	$3,66 \times 10^{-3}$	
$\kappa_T$ (bar <sup>-1</sup> )	0,99	
$c$ (m / s)	331,45	

Pour l'air :

$M = 29 \text{ g / mole}$  . D'où :  $r = 287 \text{ J / kg / K}$

Formule de Sutherland valable dans une large gamme :  $\mu(T) = 1,454 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 110,4}$



### 3. Lois de la mécanique des fluides

#### 3.1. Une équation de bilan

On montre que :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} b d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} b(\underline{U} \cdot \underline{n}) da(t) - \int_{\Sigma(t)} ]b[(\underline{W} \cdot \underline{n}) d\Sigma(t)$$

Ici  $]b[ = b_2 - b_1$  représente le saut de la quantité  $b$  à travers la discontinuité  $\Sigma(t)$ .

On montre que : (formule de la divergence)

$$\int_{\partial\Omega(t)} b \cdot \underline{n} da(t) = \int_{\Omega(t)} \text{div } b d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} ]b[ \cdot \underline{n} da(t)$$

Principe de conservation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho b d\Omega(t) \quad \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) \quad \int_{\Omega(t)} Q d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} A \cdot \underline{n} da(t)$$

Donc :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho b}{\partial t} d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} \rho b(\underline{U} \cdot \underline{n}) da(t) - \int_{\Sigma(t)} ]\rho b[(\underline{W} \cdot \underline{n}) d\Sigma(t) \quad \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) \quad \int_{\Omega(t)} Q d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} A \cdot \underline{n} da(t)$$

D'où :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho b}{\partial t} d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \text{div}(\rho b \underline{U}) d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} ]\rho b[(\underline{U} \cdot \underline{n}) d\Sigma(t) - \int_{\Sigma(t)} ]\rho b[(\underline{W} \cdot \underline{n}) d\Sigma(t)$$

$$\left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) \quad \int_{\Omega(t)} Q d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \text{div } A d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} ]A[ \cdot \underline{n} da(t)$$

$$D'où : \begin{cases} \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \text{div}(\rho b \underline{U}) & \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) & Q + \text{div } A \\ ]\rho b(\underline{U} - \underline{W})[ \cdot \underline{n} & \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) & ]A[ \cdot \underline{n} \end{cases}$$

A noter que :  $\rho \frac{db}{dt} + b \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} \right) = \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \text{div}(\rho b \underline{U})$ .

Donc :

$$\rho \frac{db}{dt} + b \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} \right) \quad \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) \quad Q + \text{div } A$$

#### 3.2. Conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie (premier principe), inégalité fondamentale (second principe).

	$b$	= ou $\geq$	$Q$	$A$
Masse	1	=	0	0
Quantité de mouvement	$\underline{U}$	=	$\rho \underline{F}$	$-p \underline{I} + \underline{\tau}$
Energie	$\left( e + \frac{U^2}{2} \right)$	=	$\rho \underline{F} \cdot \underline{U}$	$-p \underline{U} + \underline{\tau} \cdot \underline{U} - q$

Entropie	$s$	$\geq$	$0$	$-\frac{q}{T}$
----------	-----	--------	-----	----------------

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0 \\ \rho \underline{U} \cdot \underline{n} = 0 \end{cases}$$

A partir de là :

$$\begin{cases} \rho \frac{db}{dt} \begin{pmatrix} (=) \\ (\geq) \end{pmatrix} Q + \operatorname{div} A \\ \rho b \underline{U} \cdot \underline{n} \begin{pmatrix} (=) \\ (\geq) \end{pmatrix} A \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho b \underline{U}) \begin{pmatrix} (=) \\ (\geq) \end{pmatrix} Q + \operatorname{div} A \\ \rho b \underline{U} \cdot \underline{n} \begin{pmatrix} (=) \\ (\geq) \end{pmatrix} A \cdot \underline{n} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \rho \frac{dU}{dt} = \rho \underline{F} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \underline{\tau} \\ \rho \underline{U} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U \otimes U) = \rho \underline{F} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \underline{\tau} \\ \rho \underline{U} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \operatorname{div}(p \underline{U}) + \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \operatorname{div} \underline{q} \\ \rho \left[ e + \frac{U^2}{2} \right] \underline{U} \cdot \underline{n} = -p \underline{U} \cdot \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{q} \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \underline{U} \right] = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \operatorname{div}(p \underline{U}) + \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \operatorname{div} \underline{q} \\ \rho \left[ e + \frac{U^2}{2} \right] \underline{U} \cdot \underline{n} = -p \underline{U} \cdot \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{U} \cdot \underline{n} - \underline{q} \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \frac{ds}{dt} \geq -\operatorname{div} \left( \frac{q}{T} \right) \\ \rho s \underline{U} \cdot \underline{n} \geq - \left[ \frac{q}{T} \right] \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \underline{U}) \geq -\operatorname{div} \left( \frac{q}{T} \right) \\ \rho s \underline{U} \cdot \underline{n} \geq - \left[ \frac{q}{T} \right] \cdot \underline{n} \end{cases}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{U} \cdot \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \underline{U} \cdot \operatorname{grad} p + \underline{U} \cdot \operatorname{div} \underline{\tau}$$

$$\operatorname{div}(p \underline{U}) = p \operatorname{div} \underline{U} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} p$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) = \underline{U} \cdot \underline{\text{div}}(\underline{\tau}') + \underline{\tau} : \underline{\text{grad}} \underline{U}$$

$$\underline{\tau} : \underline{\text{grad}} \underline{U} = \underline{\tau} : \underline{d}$$

$$\text{ou } \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \frac{U^2}{2} \right) + \underline{\text{div}} \left[ \rho \left( \frac{U^2}{2} \right) \underline{U} \right] = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} p + \underline{U} \cdot \underline{\text{div}} \underline{\tau}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \underline{\text{div}} \underline{U} + \underline{\tau} : \underline{d} - \underline{\text{div}} \underline{q}$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \underline{\tau} : \underline{d} - \underline{\text{div}} \underline{q}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \underline{\text{div}} \underline{q}$$

$$\text{ou } \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( h + \frac{U^2}{2} \right) + \underline{\text{div}} \left[ \rho \left( h + \frac{U^2}{2} \right) \underline{U} \right] = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \underline{\text{div}} \underline{q}$$

Dans un écoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  et  $\underline{W} = 0$

$$\int_{\partial\Omega} b(\underline{U} \cdot \underline{n}) da \quad \left( \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right) \quad \int_{\Omega} Q d\Omega + \int_{\partial\Omega} A \cdot \underline{n} da$$

D'où :

$$\int_{\partial\Omega} \rho(\underline{U} \cdot \underline{n}) da = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho \underline{U} (\underline{U} \cdot \underline{n}) da = \int_{\Omega} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial\Omega} p \underline{n} da + \int_{\partial\Omega} \underline{\tau} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) (\underline{U} \cdot \underline{n}) da = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega - \int_{\partial\Omega} p \underline{U} \cdot \underline{n} da + \int_{\partial\Omega} \underline{U} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} da - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho \left( h + \frac{U^2}{2} \right) (\underline{U} \cdot \underline{n}) da = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{U} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} da - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho s (\underline{U} \cdot \underline{n}) da \geq - \int_{\partial\Omega} \frac{q}{T} \cdot \underline{n} da$$

### 3.3. Bilan d'entropie.

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \rho \underline{\text{div}} \underline{U}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \underline{\text{div}} \underline{U}$$

D'où :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \underline{\tau} : \underline{d} - \underline{\text{div}} \underline{q}$$

$$\text{Comme : } \underline{\text{div}} \left( \frac{\underline{q}}{T} \right) = \frac{\underline{\text{div}} \underline{q}}{T} - \frac{\underline{q} \cdot \underline{\text{grad}} T}{T^2}$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\text{div} \left( \frac{\underline{q}}{T} \right) + \frac{\underline{\tau} : \underline{d}}{T} - \frac{\underline{q} \cdot \underline{\text{grad}} T}{T^2}$$

Second principe :  $\frac{\underline{\tau} : \underline{d}}{T} - \frac{\underline{q} \cdot \underline{\text{grad}} T}{T^2} \geq 0$

### 3.4. Le gaz parfait

Pour un fluide newtonien :  $\underline{\tau} = \lambda \text{div} \underline{U} \underline{1} + 2\mu \underline{d}$  et  $\underline{q} = -K \underline{\text{grad}} T$ ,  
le second principe donne :  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $K \geq 0$

Relation de Stokes :  $3\lambda + 2\mu = 0$

Si en plus,  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $K$  sont supposés constants.

Si  $e = C_v T$ ,  $h = C_p T$

$$p = \rho r T$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} - \underline{\text{grad}} p + \mu \left[ \frac{1}{3} \underline{\text{grad}}(\text{div} \underline{U}) + \underline{\Delta} \underline{U} \right]$$

Une équation parmi les suivantes :

- $\rho C_v \frac{dT}{dt} = -p \text{div} \underline{U} + 2\mu \left( \underline{d} : \underline{d} - \frac{(\text{div} \underline{U})^2}{3} \right) + K \Delta T$
- $\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + 2\mu \left( \underline{d} : \underline{d} - \frac{(\text{div} \underline{U})^2}{3} \right) + K \Delta T$
- $\rho \frac{d}{dt} \left( C_v T + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \text{div}(p \underline{U}) + 2\mu \left[ \text{div}(\underline{d} \cdot \underline{U}) - \frac{1}{3} (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}(\text{div} \underline{U}) + (\text{div} \underline{U})^2) \right] + K \Delta T$
- $\rho \frac{d}{dt} \left( C_p T + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + \frac{\partial p}{\partial t} + 2\mu \left[ \text{div}(\underline{d} \cdot \underline{U}) - \frac{1}{3} (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}(\text{div} \underline{U}) + (\text{div} \underline{U})^2) \right] + K \Delta T$
- $\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu \left( \underline{d} : \underline{d} - \frac{1}{3} (\text{div} \underline{U})^2 \right) + K \Delta T$

### 3.5. Le fluide incompressible

Pour un fluide newtonien :  $\underline{\tau} = 2\mu \underline{d}$  et  $\underline{q} = -K \underline{\text{grad}} T$ ,  
le second principe donne :  $\mu \geq 0$ ,  $K \geq 0$

Si en plus,  $\mu$  et  $K$  sont supposés constants.

Si  $e = CT$ ,

Incompressibilité :  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$

D'où :

$$\text{div} \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \underline{F} - \underline{\text{grad}} p + \mu \underline{\Delta} U$$

$$\rho C \frac{dT}{dt} = 2\mu \underline{d} : \underline{d} + K \Delta T$$

### 3.6. Conditions aux limites

Condition cinématique :

L'expérience montre que pour les fluides il n'y a pas glissement du fluide sur la paroi. On se donne la vitesse en chaque point de la paroi à tout instant  $\underline{U}_p(\underline{x}, t)$  et on impose :  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_p(\underline{x}, t)$  (condition d'adhérence).

Condition thermique :

- si la paroi est isotherme : on se donne  $T_p(\underline{x}, t)$  sur la paroi et les particules de fluide au contact de celle-ci prennent cette température :  $T(\underline{x}, t) = T_p(\underline{x}, t)$
- si la paroi est athermane,  $\underline{\text{grad}} T \cdot \underline{n} = 0$  à la paroi

### 3.7. Exemple : l'écoulement de Poiseuille

Écoulement de fluide incompressible dans un tuyau plan.

$$\underline{U}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

$$T(x, y, z, t)$$

$$\text{Écoulement stationnaire : } \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\text{Écoulement plan 2D : } w = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\text{Écoulement unidirectionnel : } v = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Donc :  $u(y)$  et  $T(y)$

➤ Equations incompressibles

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0$$

$$\rho(u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u) = -\partial_x p + \mu(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u)$$

$$\rho(u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v) = -\partial_y p + \mu(\partial_{xx} v + \partial_{yy} v + \partial_{zz} v)$$

$$\rho(u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w) = -\partial_z p + \mu(\partial_{xx} w + \partial_{yy} w + \partial_{zz} w)$$

$$\rho C(u \partial_x T + v \partial_y T + w \partial_z T) = 2\mu(d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + d_{zz}^2 + 2d_{xy}^2 + 2d_{xz}^2 + 2d_{yz}^2) + K(\partial_{xx} T + \partial_{yy} T + \partial_{zz} T)$$

$$d_{xx} = \partial_x u, \quad d_{xy} = \frac{1}{2}(\partial_y u + \partial_x v), \quad d_{xz} = \frac{1}{2}(\partial_x w + \partial_z u),$$

$$d_{yx} = d_{xy}, \quad d_{yy} = \partial_y v, \quad d_{yz} = \frac{1}{2}(\partial_y w + \partial_z v)$$

$$d_{zx} = d_{xz}, \quad d_{zy} = d_{yz}, \quad d_{zz} = \partial_z w$$

➤ Simplification des équations

$$0 = 0$$

$$0 = -\partial_x p + \mu \partial_{yy} u$$

$$0 = \partial_y p$$

$$0 = \partial_z p$$

$$0 = 2\mu(2d_{xy}^2) + K\partial_{yy} T \text{ d'où : } 0 = \mu(\partial_y u)^2 + K\partial_{yy} T$$

➤ Problème cinématique

$$\text{Donc : } p(x) \text{ et } \partial_x p = \frac{dp}{dx}$$

$$0 = \partial_x (-\partial_x p + \mu \partial_{yy} u) = -\frac{d}{dx} \frac{dp}{dx} \text{ . Donc : } \frac{dp}{dx} = -\pi$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\pi$$

$$u = -\frac{\pi}{2\mu} y^2 + Ay + B$$

Conditions aux limites :

$$u(-h) = u(h) = 0 \text{ donc } A = 0$$

$$u(h) = 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{2\mu} h^2 + B = 0$$

$$\text{Ainsi : } u(y) = \frac{\pi h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$\partial_y u = -\frac{\pi h^2}{2\mu} \frac{2y}{h^2} = -\frac{\pi}{\mu} y$$

$$\text{➤ Frottement : } \underline{i} \cdot \underline{\tau} \cdot (-\underline{j}) = -\tau_{xy} = \mu \partial_y u = \pi y$$

$$\text{En } y = h, \underline{i} \cdot \underline{\tau} \cdot (-\underline{j}) = \pi h$$

➤ Problème thermique

$$0 = \mu \frac{\pi^2}{\mu^2} y^2 + K\partial_{yy} T$$

$$T(-h) = T(h) = T_0$$

$$T = T_0 + \frac{\pi^2 h^4}{12\mu K} \left(1 - \frac{y^4}{h^4}\right)$$

➤ Flux de chaleur :

$$\Phi = -\underline{q} \cdot \underline{n} = -(-K \underline{\text{grad}} T) \cdot (-\underline{j}) = -K \partial_y T = \frac{\pi^2 h^4}{3\mu} \frac{y^3}{h^4} = \frac{\pi^2}{3\mu} y^3$$

$$\text{En } y = h, \Phi = \frac{\pi^2 h^3}{3\mu}$$

Le flux est positif, donc de l'énergie sort du tuyau.

## 4. Analyse dimensionnelle

### 4.1. Analyse dimensionnelle des équations régissant le gaz parfait

$$p = p_\infty \bar{p}, \rho = \rho_\infty \bar{\rho}, T = T_\infty \bar{T}$$

$$s = C_v \log \frac{p}{\rho^\gamma} = C_v \log \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} + C_v \log \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} = s_\infty + C_v \bar{s}$$

$$c_\infty = \sqrt{\gamma T_\infty}$$

$$\underline{x} = L \bar{x}, \underline{U} = U_\infty \bar{U}, t = \frac{L}{U_\infty} \bar{t}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{U_\infty}{L} \frac{d}{d\bar{t}}$$

$$Re = \frac{U_\infty L \rho_\infty}{\mu}, M = \frac{U_\infty}{c_\infty}, Pr = \frac{\mu C_p}{K}$$

$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$	+	$\text{div} \underline{U}$	=	0
$\frac{1}{\rho_\infty} \rho_\infty \frac{U_\infty}{L}$	+	$\frac{U_\infty}{L}$	=	0
1	+	1	=	0
$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}}$	+	$\overline{\text{div} \underline{U}}$	=	0

$\rho \frac{dU}{dt}$	+	$\text{grad} p$	=	$\mu \left[ \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div} \underline{U}) + \underline{\Delta} \underline{U} \right]$
$\rho_\infty \frac{U_\infty}{L} U_\infty$	+	$\frac{p_\infty}{L}$	=	$\mu \frac{U_\infty}{L^2}$
1	+	$\frac{L}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{c_\infty^2 \rho_\infty}{\gamma} \frac{1}{L}$ $= \frac{1}{\gamma M^2}$	=	$\frac{L}{\rho_\infty U_\infty^2} \mu \frac{U_\infty}{L^2} = \frac{1}{Re}$
$\bar{\rho} \frac{d\bar{U}}{d\bar{t}}$	+	$\frac{1}{\gamma M^2} \overline{\text{grad} \bar{p}}$	=	$\frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{3} \overline{\text{grad}(\text{div} \bar{U})} + \overline{\underline{\Delta} \bar{U}} \right]$

$\rho C_v \frac{dT}{dt}$	=	$-p \text{div} \underline{U}$	+	$2\mu \left[ \underline{d} : \underline{d} - \frac{(\text{div} \underline{U})^2}{3} \right]$	+	$K \Delta T$
$\rho_\infty C_v \frac{U_\infty}{L} T_\infty$	=	$p_\infty \frac{U_\infty}{L}$	+	$2\mu \frac{U_\infty^2}{L^2}$	+	$\frac{KT_\infty}{L^2}$

$$1 = \frac{L}{\rho_{\infty} C_V U_{\infty} T_{\infty}} p_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} + \frac{L}{\rho_{\infty} C_V U_{\infty} T_{\infty}} 2\mu \frac{U_{\infty}^2}{L^2} + \frac{L}{\rho_{\infty} C_V U_{\infty} T_{\infty}} \frac{KT_{\infty}}{L^2}$$

$$= \frac{r}{C_V} = \gamma - 1 + \frac{2\mu}{U_{\infty} L \rho_{\infty} \gamma T_{\infty}} \frac{U_{\infty}^2}{C_V} + \frac{\mu}{U_{\infty} L \rho_{\infty}} \frac{K}{\mu C_p} \frac{C_p}{C_V}$$

$$= 2\gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} = \gamma \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr}$$

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} = -(\gamma - 1) \bar{p} \overline{\text{div} \underline{U}} + 2\gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \left[ \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} - \frac{(\overline{\text{div} \underline{U}})^2}{3} \right] + \gamma \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \overline{\Delta T}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu \left[ \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} - \frac{(\overline{\text{div} \underline{U}})^2}{3} \right] + K \Delta T$$

$$\rho_{\infty} T_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} C_V = 2\mu \frac{U_{\infty}^2}{L^2} + \frac{KT_{\infty}}{L^2}$$

$$1 = \frac{L}{\rho_{\infty} C_V U_{\infty} T_{\infty}} 2\mu \frac{U_{\infty}^2}{L^2} + \frac{L}{\rho_{\infty} C_V U_{\infty} T_{\infty}} \frac{KT_{\infty}}{L^2}$$

$$= \frac{2\mu}{U_{\infty} L \rho_{\infty} \gamma T_{\infty}} \frac{U_{\infty}^2}{C_V} + \frac{\mu}{U_{\infty} L \rho_{\infty}} \frac{K}{\mu C_p} \frac{C_p}{C_V}$$

$$= 2\gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} = \gamma \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr}$$

$$\bar{\rho} \overline{T} \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} = 2\gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \left[ \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} - \frac{(\overline{\text{div} \underline{U}})^2}{3} \right] + \gamma \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \overline{\Delta T}$$

$p$	=	$\rho r T$
$p_{\infty}$	=	$\rho_{\infty} r T_{\infty}$
$\bar{p}$	=	$\bar{\rho} \bar{T}$

➤ Le modèle de fluide parfait et les écoulements à haut nombre de Reynolds

Lorsque  $Re$  est très grand :

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}} + \overline{\text{div} \underline{U}} = 0$$

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} + \frac{1}{\gamma M^2} \overline{\text{grad} \bar{p}} = 0$$

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} = -(\gamma - 1) \bar{p} \overline{\text{div} \underline{U}}$$

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} = 0$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T}$$

Ce sont les équations d'Euler.

La disparition du terme  $\overline{\Delta U}$  a diminué l'ordre des équations.

Condition de glissement ou d'imperméabilité sur les parois :  $\underline{U}(x, t) \cdot \underline{n} = \underline{U}_p(x, t) \cdot \underline{n}$

Récapitulatif des équations sous forme dimensionnelle :

$$p = \rho r T$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} - \underline{\operatorname{grad}} p$$

Une équation parmi les suivantes :

- $\rho C_v \frac{dT}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$
- $\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt}$
- $\rho \frac{d}{dt} \left( C_p T + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + \frac{\partial p}{\partial t}$
- $\frac{ds}{dt} = 0$

#### 4.2. Analyse dimensionnelle des équations régissant un fluide incompressible

$$p = p_\infty + \rho U_\infty^2 \bar{p}, \quad T = T_\infty + (T_p - T_\infty) \bar{T}$$

$$\underline{x} = L \bar{x}, \quad \underline{U} = U_\infty \bar{U}, \quad t = \frac{L}{U_\infty} \bar{t}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{U_\infty}{L} \frac{d}{d\bar{t}}$$

$$Re = \frac{U_\infty L \rho}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu C}{K}, \quad Ec = \frac{U_\infty^2}{C(T_p - T_\infty)}$$

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{donc} \quad \overline{\operatorname{div} \underline{U}} = 0$$

$\rho \frac{d\underline{U}}{dt}$	+	$\underline{\operatorname{grad}} p$	=	$\mu \Delta \underline{U}$
$\rho \frac{U_\infty}{L} U_\infty$	+	$\frac{\rho U_\infty^2}{L}$	=	$\mu \frac{U_\infty}{L^2}$
1	+	1	=	$\frac{L}{\rho U_\infty^2} \mu \frac{U_\infty}{L^2} = \frac{1}{Re}$
$\rho \frac{d\bar{U}}{d\bar{t}}$	+	$\overline{\underline{\operatorname{grad}} \bar{p}}$	=	$\frac{1}{Re} \overline{\Delta \bar{U}}$
$\rho C \frac{dT}{dt}$	=	$2\mu \frac{d}{d}$	+	$K \Delta T$
$\rho C \frac{U_\infty}{L} (T_p - T_\infty)$	=	$2\mu \frac{U_\infty^2}{L^2}$	+	$\frac{K(T_p - T_\infty)}{L^2}$

1	=	$2 \frac{L}{\rho C U_\infty (T_p - T_\infty)} \mu \frac{U_\infty^2}{L^2}$ $= 2 \frac{\mu}{U_\infty L \rho C (T_p - T_\infty)} +$ $= 2 \frac{Ec}{Re}$	+	$\frac{L}{\rho C U_\infty (T_p - T_\infty)} \frac{K (T_p - T_\infty)}{L^2}$ $= \frac{\mu}{U_\infty L \rho} \frac{K}{\mu C}$ $= \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr}$
$\rho \frac{d\bar{T}}{d\bar{t}}$	=	$2 \frac{Ec}{Re} \frac{d}{d}$	+	$\frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \bar{\Delta T}$

➤ Le modèle de fluide parfait et les écoulements à haut nombre de Reynolds

Lorsque  $Re$  est très grand :

$$\overline{div \underline{U}} = 0$$

$$\rho \frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} + \overline{grad \bar{p}} = 0$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} = 0$$

Ce sont les équations d'Euler.

La disparition du terme  $\overline{\Delta \underline{U}}$  a diminué l'ordre des équations.

Condition de glissement ou d'imperméabilité sur les parois :  $\underline{U}(x, t) \cdot \underline{n} = \underline{U}_p(x, t) \cdot \underline{n}$

Récapitulatif des équations sous forme dimensionnelle :

$$div \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} - \underline{grad} p$$

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

**4.3. Le modèle de fluide incompressible et les écoulements de gaz parfait à faible nombre de Mach**

$$\varepsilon = M^2 = \frac{U_\infty^2}{c_\infty^2}$$

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \gamma \varepsilon p_1, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = 1 + \varepsilon \rho_1, \quad \frac{T}{T_\infty} = 1 + \varepsilon T_1$$

$$x = L \bar{x}, \quad y = L \bar{y}$$

$$u = c_\infty \sqrt{\varepsilon} \bar{u}, \quad v = c_\infty \sqrt{\varepsilon} \bar{v}$$

$$t = \frac{L}{c_\infty \sqrt{\varepsilon}} \bar{t}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{L} \frac{d}{d\bar{t}}$$

$$Re_{\infty} = \frac{c_{\infty} L \rho_{\infty}}{\mu_{\infty}}$$

Par exemple :

$$p_{\infty} = 101325 \text{ Pa}, T_{\infty} = 15^{\circ} \text{ C} = 288^{\circ} \text{ K}, \rho_{\infty} = 1,226 \text{ kg} / \text{ m}^3$$

$$c_{\infty} = \sqrt{\gamma T_{\infty}} = 340 \text{ m} / \text{ s}, \mu = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ kg} / \text{ m} / \text{ s}$$

$$Re_{\infty} = 23 \cdot 10^6 L$$

On se place dans le cas où  $MRe_{\infty} = \frac{U_{\infty} L \rho_{\infty}}{\mu}$  est très grand.

$$\text{Dans l'air : } MRe_{\infty} = 23 \cdot 10^6 ML$$

$$\text{Ou encore : } U_{\infty} L \gg \frac{\mu}{\rho_{\infty}} = 1,45 \cdot 10^{-5}$$

	$U_{\infty} (m / s)$	$L(m)$	$U_{\infty} L (m^2 / s)$
Expérience dans une soufflerie subsonique	50	1	50
	0,01	0,01	$10^{-4}$
	0,01	0,001	$10^{-5}$

$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$	+	$\text{div} \underline{U}$	=	0
$\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\varepsilon \rho_\infty c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{L}$	+	$\frac{c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{L}$	=	0
1	+	$\frac{1}{\varepsilon}$	=	0
		$\overline{\text{div} \underline{U}}$	=	0

$\rho \frac{dU}{dt}$	+	$\text{grad} p$	=	$\mu \left[ \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div} \underline{U}) + \underline{\Delta U} \right]$
$\frac{\varepsilon \rho_\infty c_\infty^2}{L}$	+	$\frac{\varepsilon \rho_\infty}{L}$	=	$\frac{c_\infty L \rho_\infty c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{Re_\infty L^2}$
1	+	1	=	$\frac{1}{Re_\infty \sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{Re_\infty M} \rightarrow 0$
$\frac{dU}{dt}$	+	$\overline{\text{grad} \bar{p}}$	=	0

$\rho C_p \frac{dT}{dt}$	=	$2\mu \left[ \underline{d} : \underline{d} - \frac{(\text{div} \underline{U})^2}{3} \right]$	+	$\frac{dp}{dt}$	+	$K\Delta T$
$\rho_\infty C_p \frac{c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon T_\infty$	=	$\frac{c_\infty L \rho_\infty c_\infty^2 \varepsilon}{Re_\infty L^2}$	+	$\frac{c_\infty \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon \rho_\infty$	+	$\frac{K \varepsilon T_\infty}{L^2}$
1	=	$\frac{\gamma-1}{Re_\infty M} \rightarrow 0$	+	$\gamma-1$	+	$\frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\infty M} \rightarrow 0$
$\frac{dT}{dt}$	=			$(\gamma-1) \frac{d\bar{p}}{dt}$		

## 4.4. Analyse dimensionnelle d'un phénomène physique

### 4.4.1. Traînée d'une sphère en écoulement incompressible

Sphère de rayon  $a$ , baignée dans un fluide homogène incompressible, de masse volumique  $\rho$  et de coefficient de viscosité  $\mu$ . On suppose que les forces de pesanteur sont négligeables et que l'écoulement infini amont est uniforme et de vitesse  $U_\infty$ .

Que vaut la traînée  $F_x$  d'un tel cylindre (composante parallèle à l'écoulement amont, de la résultante des efforts exercés par le fluide sur le cylindre).

$$F_x = f(a, U_\infty, \rho, \mu)$$

Soit  $L, M, T, \Theta$  les échelles de longueur, de masse, de temps et de température.

$F_x$	$kg \cdot m / s^2$	$MLT^{-2}$
$a$	$m$	$L$
$U_\infty$	$m / s$	$LT^{-1}$
$\rho$	$kg / m^3$	$ML^{-3}$
$\mu$	$kg / m / s$	$ML^{-1}T^{-1}$

$$\frac{F_x}{MLT^{-2}} = f\left(\frac{a}{L}, \frac{U_\infty}{LT^{-1}}, \frac{\rho}{ML^{-3}}, \frac{\mu}{ML^{-1}T^{-1}}\right)$$

On choisit les échelles de longueur suivantes :

$$L = a$$

$$M = \rho L^3 = \rho a^3$$

$$T = \frac{L}{U_\infty} = \frac{a}{U_\infty}$$

Donc :

$$\frac{F_x}{\rho a^3 a a^{-2} U_\infty^2} = f\left(\frac{a}{a}, \frac{U_\infty}{a a^{-1} U_\infty}, \frac{\rho}{\rho a^3 a^{-3}}, \frac{\mu}{\rho a^3 a^{-1} a^{-1} U_\infty}\right)$$

$$\frac{F_x}{\rho U_\infty^2 a^2} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{U_\infty a \rho}\right)$$

$$\text{On introduit : } Re = \frac{U_\infty a \rho}{\mu}, C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 a^2}$$

Donc :

$$\frac{1}{2} C_x = f\left(1, 1, 1, \frac{1}{Re}\right)$$

$$\text{ou encore } C_x = g(Re)$$

### 4.4.2. Traînée d'une sphère en écoulement compressible

Sphère de rayon  $a$ , maintenu à la température  $T_p$ , baigné dans un fluide homogène compressible, de masse volumique  $\rho_\infty$ , de pression  $p_\infty$ , de température  $T_\infty$  et de coefficient de viscosité  $\mu$ . On suppose que les forces de pesanteur sont négligeables et que l'écoulement infini amont est uniforme et de vitesse  $U_\infty$ .

Que vaut la traînée  $F_x$  d'une telle sphère (composante parallèle à l'écoulement amont, de la résultante des efforts exercés par le fluide sur le cylindre).

$$F_x = f(a, U_\infty, p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, \mu, T_p)$$

Soit  $L$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $\Theta$  les échelles de longueur, de masse, de temps et de température.

$F_x$	$kg \cdot m / s^2$	$MLT^{-2}$
$a$	$m$	$L$
$U_\infty$	$m / s$	$LT^{-1}$
$p_\infty$	$kg / m / s^2$	$ML^{-1}T^{-2}$
$\rho_\infty$	$kg / m^3$	$ML^{-3}$
$T_\infty$	$^\circ K$	$\Theta$
$\mu$	$kg / m / s$	$ML^{-1}T^{-1}$
$T_p$	$^\circ K$	$\Theta$

$$\frac{F_x}{MLT^{-2}} = f\left(\frac{a}{L}, \frac{U_\infty}{LT^{-1}}, \frac{p_\infty}{ML^{-1}T^{-2}}, \frac{\rho_\infty}{ML^{-3}}, \frac{T_\infty}{\Theta}, \frac{\mu}{ML^{-1}T^{-1}}, \frac{T_p}{\Theta}\right)$$

On choisit les échelles de longueur suivantes :

$$L = a$$

$$M = \rho L^3 = \rho a^3$$

$$T = \frac{L}{U_\infty} = \frac{a}{U_\infty}$$

$$\Theta = T_\infty$$

Donc :

$$\frac{F_x}{\rho_\infty a^3 a a^{-2} U_\infty^2} = f\left(\frac{a}{a}, \frac{U_\infty}{a a^{-1} U_\infty}, \frac{p_\infty}{\rho_\infty a^3 a^{-1} a^{-2} U_\infty^2}, \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty a^3 a^{-3}}, \frac{T_\infty}{T_\infty}, \frac{\mu}{\rho_\infty a^3 a^{-1} a^{-1} U_\infty}, \frac{T_p}{T_\infty}\right)$$

$$\frac{F_x}{\rho_\infty U_\infty^2 a^2} = f\left(1, 1, \frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}, 1, 1, \frac{\mu}{U_\infty a \rho_\infty}, \frac{T_p}{T_\infty}\right)$$

$$\text{On introduit : } Re = \frac{U_\infty a \rho_\infty}{\mu}, C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 a^2}, M = \frac{U_\infty}{c_\infty} = \frac{U_\infty \sqrt{\rho_\infty}}{\sqrt{\mathcal{P}_\infty}}$$

Donc :

$$\frac{1}{2} C_x = f\left(\frac{1}{\gamma^2 M^2}, \frac{1}{Re}, \frac{T_p}{T_\infty}\right)$$

$$\text{ou encore } C_x = g\left(M, Re, \frac{T_p}{T_\infty}\right)$$

#### 4.5. Propriétés d'invariance et solutions auto-semblables

Plaque plane mise en mouvement de façon impulsive dans un fluide incompressible (premier problème de Stokes) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(y=0, t) = U_0, \quad t > 0$$

$$u(y \rightarrow \infty, t) = 0$$

$$u(y, t=0) = 0$$

➤ Analyse dimensionnelle du phénomène

$$u = f(y, t, \mu, \rho, U_0)$$

Soit  $L$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $\Theta$  les échelles de longueur, de masse, de temps et de température.

$u$	$m/s$	$LT^{-1}$
$y$	$m$	$L$
$t$	$s$	$T$
$U_0$	$m/s$	$LT^{-1}$
$\mu$	$kg/m/s$	$ML^{-1}T^{-1}$
$\rho$	$kg/m^3$	$ML^{-3}$

$$\frac{u}{LT^{-1}} = f\left(\frac{y}{L}, \frac{t}{T}, \frac{U_0}{LT^{-1}}, \frac{\mu}{ML^{-1}T^{-1}}, \frac{\rho}{ML^{-3}}\right)$$

On choisit les échelles de longueur suivantes :

$$L = \frac{\mu}{U_0 \rho}$$

$$T = \frac{\mu}{U_0^2 \rho}$$

$$M = \rho L^3 = \rho \frac{\mu^3}{U_0^3 \rho^3} = \frac{\mu^3}{U_0^3 \rho^2}$$

Donc :

$$\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{yU_0\rho}{\mu}, \frac{tU_0^2\rho}{\mu}, \frac{U_0}{U_0}, \frac{\mu}{\mu}, \frac{\rho}{\rho}\right)$$

$$\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{yU_0\rho}{\mu}, \frac{tU_0^2\rho}{\mu}\right)$$

➤ Analyse dimensionnelle des équations

$$u = U_0 \bar{u}$$

$$y = \delta \bar{y}$$

$$t = \bar{t}$$

$$\rho \frac{U_0}{\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \mu \frac{U_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U_0 \bar{u}(\delta \bar{y} = 0, \bar{t}) = U_0$$

$$U_0 \bar{u}(\delta \bar{y} \rightarrow \infty, \bar{t}) = 0$$

$$U_0 \bar{u}(\delta \bar{y}, \bar{t} = 0) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\nu \tau}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ avec } \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\bar{u}(\bar{y} = 0, \bar{t}) = 1$$

$$\bar{u}(\bar{y} \rightarrow \infty, \bar{t}) = 0$$

$$\bar{u}(\bar{y}, \bar{t} = 0) = 0$$

On choisit :  $\frac{\nu \tau}{\delta^2} = 1$

Avec de l'eau :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ .

Après un temps  $\tau = 1 \text{ s}$ , on ressent le mouvement de la plaque à une distance de  $\delta = \sqrt{\nu \tau} = 10^{-3} \text{ m}$ .

Après un temps  $\tau = 60 \text{ s}$ , on ressent le mouvement de la plaque à une distance de  $\delta = \sqrt{\nu \tau} = 7,74 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Après un temps  $\tau = 3600 \text{ s}$ , on ressent le mouvement de la plaque à une distance de  $\delta = \sqrt{\nu \tau} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

Après un temps  $\tau = 86400 \text{ s}$ , on ressent le mouvement de la plaque à une distance de  $\delta = \sqrt{\nu \tau} = 0,29 \text{ m}$ .

Alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\bar{u}(\bar{y} = 0, \bar{t}) = 1$$

$$\bar{u}(\bar{y} \rightarrow \infty, \bar{t}) = 0$$

$$\bar{u}(\bar{y}, \bar{t} = 0) = 0$$

Analyse des propriétés d'invariance : Si les hypothèses d'une théorie sont invariantes dans un groupe de transformations, il en est de même des conclusions.

Les hypothèses sont ici le système d'équations à résoudre et les conclusions sa solution.

$$\bar{u} = A \bar{u}', \quad \bar{y} = B \bar{y}', \quad \bar{t} = C \bar{t}'$$

$$\frac{A}{C} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{t}'} = \frac{A}{B^2} \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{y}'^2}$$

$$A \bar{u}'(B \bar{y}' = 0, C \bar{t}') = 1$$

$$A \bar{u}'(B \bar{y}' \rightarrow \infty, C \bar{t}') = 0$$

$$A \bar{u}'(B \bar{y}', C \bar{t}' = 0) = 0$$

Système invariant si :

$$\triangleright \frac{A}{C} = \frac{A}{B^2} \text{ ou } C = B^2 \text{ ou } \frac{B}{\sqrt{C}} = 1$$

$$\triangleright A = 1$$

Système en prime identique au système de toute à l'heure.

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{t}'} = \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{y}'^2}$$

$$\bar{u}'(\bar{y}' = 0, \bar{t}') = 1$$

$$\bar{u}'(\bar{y}' \rightarrow \infty, \bar{t}') = 0$$

$$\bar{u}'(\bar{y}', \bar{t}' = 0) = 0$$

On cherche une solution avec les mêmes invariants.

Par exemple :  $\bar{u} = f\left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}}\right)$

En effet, si :  $\bar{u} = A\bar{u}'$ ,  $\bar{y} = B\bar{y}'$ ,  $\bar{t} = C\bar{t}'$  avec  $\frac{B}{\sqrt{C}} = 1$  et  $A = 1$

$$A\bar{u}' = f\left(\frac{B}{\sqrt{C}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{t}'}}\right)$$

devient :

$$\bar{u}' = f\left(\frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{t}'}}\right)$$

On pose donc :  $\eta = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}}$  et on cherche  $\bar{u} = f(\eta)$

$$(\bar{y}, \bar{t}) \rightarrow (\eta, \lambda) \text{ avec } \lambda = \bar{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{y}}{\bar{t}^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} + 1 \frac{\partial}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

L'équation différentielle devient :

$$-\frac{1}{2} \frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

Comme  $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{df}{d\eta} = 0$$

C'est une équation différentielle qui ne porte que sur  $\eta$ .

Les conditions aux limites donnent :

$$\bar{u}(\bar{y} = 0, \bar{t}) = 1 \text{ donne : } f(\eta = 0) = 1$$

$$\bar{u}(\bar{y} \rightarrow \infty, \bar{t}) = 0 \text{ donne } f(\eta \rightarrow \infty) = 0$$

$$\bar{u}(\bar{y}, \bar{t} = 0) = 0 \text{ donne } f(\eta \rightarrow \infty) = 0$$

Equation différentielle du deuxième ordre avec deux conditions aux limites :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{df}{d\eta} = 0, \quad f(\eta = 0) = 1, \quad f(\eta \rightarrow \infty) = 0.$$

Dont la solution est :

$$f(\eta) = \frac{\int_0^\eta e^{-\eta'^2/4} d\eta'}{\int_0^\infty e^{-\eta'^2/4} d\eta'}$$

Sous forme dimensionnelle :

$$\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{y/\delta}{\sqrt{t/\tau}}\right) = f\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\delta} \frac{y}{\sqrt{t}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{y}{\sqrt{t}}\right)$$

ou encore  $\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{y\sqrt{\rho}}{\sqrt{t}\sqrt{\mu}}\right)$

A comparer avec le résultat précédent :  $\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{yU_0\rho}{\mu}, \frac{tU_0^2\rho}{\mu}\right)$

## 5. Couche limite

### 5.1. La couche limite dans les écoulements de fluide incompressible

Écoulement stationnaire incompressible homogène en 2 dimensions (pour simplifier)

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$u \partial_x u + v \partial_y u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u)$$

$$u \partial_x v + v \partial_y v = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu (\partial_{xx} v + \partial_{yy} v)$$

$$u(x, y = 0) = 0$$

$$v(x, y = 0) = 0$$

On considère un écoulement de vitesse  $U$  à l'infini et impactant un obstacle de taille caractéristique  $L$ .

#### 5.1.1. Écoulement à l'extérieur de la couche limite

$$x = L\bar{x}$$

$$y = L\bar{y}$$

$$u = U\bar{u}$$

$$v = U\bar{v}$$

$$p = \Pi\bar{p}, \quad \Pi \text{ à déterminer.}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$	+	$\frac{\partial v}{\partial y}$	=	0
$\frac{U}{L}$	+	$\frac{U}{L}$	=	0
1	+	1	=	0
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$	+	$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}$	=	0

$u \frac{\partial u}{\partial x}$	+	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	=	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	+	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	+	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$\frac{U^2}{L}$	+	$\frac{U^2}{L}$	=	$\frac{\Pi}{\rho L}$	+	$\nu \frac{U}{L^2}$	+	$\nu \frac{U}{L^2}$
1	+	1	=	$\frac{\Pi}{\rho U^2}$	+	$\frac{\nu}{UL}$	+	$\frac{\nu}{UL}$
						$= \frac{1}{Re}$		$= \frac{1}{Re}$

En choisissant  $\Pi = \rho U^2$ ,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} = \frac{\Pi}{\rho L} + v \frac{U}{L^2} + v \frac{U}{L^2}$$

$$1 + 1 = \frac{\Pi}{\rho U^2} + \frac{v}{UL} + \frac{v}{UL}$$

$$= \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$

Si le nombre de Reynolds est grand  $Re \gg 1$ ,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

Conditions aux limites (de glissement et non plus d'adhérence) :

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0.$$

On note  $u_E(x)$  la vitesse à la paroi. Alors, en notant  $u_E = U\bar{u}_E$

$$\bar{u}_E \frac{d\bar{u}_E}{d\bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

Ce sont les équations d'Euler.

### Equation de la vorticité :

Les équations portant sur la quantité de mouvement s'écrivent donc sous la forme :

$$\underline{\underline{grad \bar{U} \cdot \bar{U}}} = -\underline{\underline{grad \bar{p}}}$$

$$\text{Or : } \underline{\underline{grad \bar{U} \cdot \bar{U}}} = (\underline{\underline{rot \bar{U}}}) \wedge \bar{U} + \underline{\underline{grad \frac{\bar{U}^2}{2}}}$$

Donc :

$$(\underline{\underline{rot \bar{U}}}) \wedge \bar{U} + \underline{\underline{grad \frac{\bar{U}^2}{2}}} = -\underline{\underline{grad \bar{p}}}$$

En prenant le rotationnel de cette expression :  $\underline{\underline{rot}}(\underline{\underline{\bar{\omega}}} \wedge \bar{U}) = 0$  avec  $\underline{\underline{\bar{\omega}}} = \underline{\underline{rot \bar{U}}}$  étant la vorticité.

Donc, en développant :

$$\underline{\underline{grad \bar{\omega} \cdot \bar{U}}} + \underline{\underline{\bar{\omega} div \bar{U}}} - \underline{\underline{\bar{U} div \bar{\omega}}} - \underline{\underline{grad \bar{U} \cdot \bar{\omega}}} = 0$$

Comme  $\underline{\underline{div \bar{U}}} = 0$  (incompressibilité) et  $\underline{\underline{div \bar{\omega}}} = 0$ ,

$$\text{Il reste } \underline{\underline{grad \bar{\omega} \cdot \bar{U}}} = \underline{\underline{grad \bar{U} \cdot \bar{\omega}}}$$

On se place sur une ligne de courant :  $\bar{t} \rightarrow [\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$  tel que  $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{u}$  et  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{v}$

Donc, le long de la trajectoire :

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{y}} \bar{v} = \overline{\text{grad } \bar{\omega}} \cdot \bar{U}$$

Et donc :

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \overline{\text{grad } \bar{U}} \cdot \bar{\omega}$$

Donc, si  $\bar{\omega} = 0$ , alors  $\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = 0$

Un écoulement qui vérifie  $\bar{\omega} = 0$ , conserve cette propriété. L'écoulement est dit irrotationnel.

Il existe dans ce cas un potentiel des vitesses tel que  $\bar{U} = \overline{\text{grad } \bar{\Phi}}$ .

Au lieu de 3 inconnues  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\omega}$ , on n'en a plus qu'une :  $\bar{\Phi}$

Exemple d'application : une vitesse uniforme à l'infini est irrotationnelle.

### 5.1.2. Ecoulement dans la couche limite

$$x = L\bar{x}$$

$$y = \delta\tilde{y} = \varepsilon L\tilde{y}$$

$$u = U\tilde{u}$$

$$v = V\tilde{v}$$

$$p = \Pi\tilde{p} \text{ avec } \Pi = \rho U^2$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$	+	$\frac{\partial v}{\partial y}$	=	0
$\frac{U}{L}$	+	$\frac{V}{\varepsilon L}$	=	0
1	+	$\frac{V}{\varepsilon U}$	=	0

En choisissant,  $V = \varepsilon U$ ,

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}}$	+	$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}$	=	0
---	---	---	---	---

$u \frac{\partial u}{\partial x}$	+	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	=	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	+	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	+	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$\frac{U^2}{L}$	+	$\frac{\varepsilon U U}{\varepsilon L} = \frac{U^2}{L}$	=	$\frac{\Pi}{\rho L}$	+	$\nu \frac{U}{L^2}$	+	$\nu \frac{U}{\varepsilon^2 L^2}$
1	+	1	=	$\frac{\Pi}{\rho U^2} = 1$	+	$\frac{\nu}{UL}$	+	$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{UL}$
					=	$\frac{1}{Re} \ll 1$	+	$= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{Re}$

En choisissant  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}}$ , (principe de moindre dégénérescence)

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

$u \frac{\partial v}{\partial x}$	+	$v \frac{\partial v}{\partial y}$	=	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	+	$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	+	$v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
$\frac{\varepsilon U^2}{L}$	+	$\frac{\varepsilon^2 U^2}{\varepsilon L} = \frac{\varepsilon U^2}{L}$	=	$\frac{\frac{\Pi}{\rho \varepsilon L} = \frac{\rho U^2}{\rho \varepsilon L}}{= \frac{U^2}{\varepsilon L}}$	+	$v \frac{\varepsilon U}{L^2}$	+	$v \frac{\varepsilon U}{\varepsilon^2 L^2} = v \frac{U}{\varepsilon L^2}$
1	+	1	=	$\frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1$	+	$\frac{v}{UL} = \frac{1}{Re} \ll 1$	+	$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{v}{UL} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{Re} = 1$
		0	=	$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$				

✓ Au final :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

D'où :  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{p}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0)$  et  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0) = -\bar{u}_E \frac{d\bar{u}_E}{d\tilde{x}}$

✓ Conditions aux limites :

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0) = 0$$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow \infty) = \bar{u}_E(\tilde{x})$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0) = 0$$

Ce sont les équations de couche limite aussi appelées les équations de Prandtl.

✓ Introduction de la fonction de courant :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0. \text{ Il existe donc } \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ tel quel : } \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}}, \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}}$$

Interprétation de la fonction de courant :

On se place sur une ligne de courant :  $\tilde{t} \rightarrow [\tilde{x}(\tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{t})]$  tel que  $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{u}$  et  $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \tilde{v}$

Donc, le long de la trajectoire :

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = -\tilde{v}\tilde{u} + \tilde{u}\tilde{v} = 0$$

La fonction de courant est constante sur une ligne de courant.

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}} - \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{x}} \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}} = \bar{u}_E \frac{d\bar{u}_E}{d\bar{x}} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2} \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}}$$

Conditions aux limites :

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0$$

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y} \rightarrow \infty) = \bar{u}_E(\bar{x}) \text{ et donc } \tilde{\Psi} \approx \bar{u}_E \tilde{y} \text{ lorsque } \tilde{y} \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{x}}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0 \text{ et donc } \tilde{\Psi}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = Cte .$$

### 5.1.3. Paramètres caractérisant la couche limite

- Le coefficient de frottement pariétal et le coefficient de traînée :

On rappelle que les efforts qu'exerce le fluide sur un élément de surface  $\underline{n} da$  de la paroi sont :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da = -p \underline{n} da + 2\mu \underline{d} \cdot \underline{n} da$$

Avec  $\underline{n} = \underline{j}$ ,

$$\sigma_{xy} = \underline{i} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{j} = -p \underline{i} \cdot \underline{j} + 2\mu \underline{i} \cdot \underline{d} \cdot \underline{j} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \text{ car sur la paroi } v(x, y = 0) = 0$$

$$\sigma_{yy} = \underline{j} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{j} = -p \underline{j} \cdot \underline{j} + 2\mu \underline{j} \cdot \underline{d} \cdot \underline{j} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

Le coefficient de frottement pariétal est égal par définition à :

$$C_f(x) = \frac{\sigma_{xy}(x)}{\frac{1}{2} \rho u_E^2(x)} = \frac{2\nu}{u_E^2} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0)$$

La traînée s'exerçant (par unité de longueur en z) sur la partie de plaque plane comprise entre le bord d'attaque et la ligne  $x = L$  est égale à :

$$F_x = \int_{x=0}^{x=L} \sigma_{xy}(x, y = 0) dx .$$

On peut lui associer le coefficient adimensionnel de traînée :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho u_E^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx$$

- L'épaisseur de la couche limite

On définit traditionnellement 3 épaisseurs de couche limite :

- ✓ L'épaisseur locale de couche limite  $\delta_{0,99}$  est définie comme la distance à la paroi pour laquelle la vitesse dans la couche limite est égale à 99% de la vitesse dans l'écoulement extérieur de fluide parfait. Autrement dit :

$$\frac{u(x, \delta_{0,99})}{u_E(x)} = 0,99$$

✓ L'épaisseur de déplacement  $\delta^*$  est définie par l'intégrale :

$$\delta^*(x) = \int_0 \left[ 1 - \frac{u(x, y)}{u_E(x)} \right] dy$$

L'intégrale est prise à travers la couche limite.

Cette échelle de longueur a une interprétation physique simple. C'est le déplacement qu'il convient d'imposer à la paroi pour simuler, dans l'écoulement de fluide parfait extérieur, la perte de débit induite par la présence de la couche limite. En effet, la perte de débit masse par unité de longueur en  $z$  est donnée par l'intégrale suivante :

$$\Delta Q = \int_0 [\rho u_E - \rho u] dy$$

En écoulement de fluide parfait, ce débit de masse correspond à une couche fictive d'épaisseur  $\delta^*$  telle que :

$$\Delta Q = \rho u_E \delta^*$$

D'où la formule définissant  $\delta^*$ .

L'épaisseur de déplacement  $\theta$  est définie par l'intégrale :

$$\theta(x) = \int_0 \frac{u(x, y)}{u_E(x)} \left[ 1 - \frac{u(x, y)}{u_E(x)} \right] dy$$

$\theta + \delta^*$  a une interprétation physique simple. C'est le déplacement qu'il convient d'imposer à la paroi pour simuler, dans l'écoulement de fluide parfait extérieur, la perte de quantité de mouvement induite par la présence de la couche limite. En effet, la perte de flux de quantité de mouvement par unité de longueur en  $z$  est donnée par l'intégrale suivante :

$$\Delta L = \int_0 [\rho u_E^2 - \rho u^2] dy$$

En écoulement de fluide parfait, cette quantité de mouvement correspond à une couche fictive d'épaisseur  $\theta + \delta^*$  telle que :

$$\Delta L = \rho u_E^2 (\theta + \delta^*)$$

D'où la formule définissant  $\theta$ .

On définit également le paramètre de forme de la couche limite :  $H(x) = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)}$

#### 5.1.4. Couche limite de Blasius

On considère le cas où  $\bar{u}_E(\bar{x}) = 1$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^3}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0$$

$$\tilde{\Psi} \approx \tilde{y} \text{ lorsque } \tilde{y} \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\Psi}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0$$

- Recherche des invariants de ce système :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= A\tilde{\Psi}' \\ \bar{x} &= B\bar{x}' \\ \tilde{y} &= C\tilde{y}'\end{aligned}$$

$$\frac{A^2}{BC^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}'}{\partial \bar{x}' \partial \tilde{y}'} - \frac{A^2}{BC^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'^2} = \frac{A}{C^3} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'^3}$$

$$\frac{A}{C} \frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'} (B\bar{x}', C\tilde{y}' = 0) = 0$$

$$A\tilde{\Psi}' \approx C\tilde{y}' \text{ lorsque } C\tilde{y}' \rightarrow \infty$$

$$A\tilde{\Psi}'(B\bar{x}', C\tilde{y}' = 0) = 0$$

Ainsi, en imposant :

$$\frac{A^2}{BC^2} = \frac{A}{C^3}, \text{ donc } \frac{A}{B} = \frac{1}{C}$$

$$\text{et } \frac{A}{C} = 1$$

Ou encore :

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = 1 \text{ et } \frac{A}{\sqrt{B}} = 1$$

on retrouve le même système que tout à l'heure.

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}'}{\partial \bar{x}' \partial \tilde{y}'} - \frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'^2} = \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'^3}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}'}{\partial \tilde{y}'} (\bar{x}', \tilde{y}' = 0) = 0$$

$$\tilde{\Psi}' \approx \tilde{y}' \text{ lorsque } \tilde{y}' \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\Psi}'(\bar{x}', \tilde{y}' = 0) = 0$$

- On cherche une solution avec les mêmes invariants :

$$\tilde{\Psi} = \sqrt{\bar{x}} f\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{\bar{x}}}\right)$$

- Recherche des invariants de cette solution :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= A\tilde{\Psi}' \\ \bar{x} &= B\bar{x}' \\ \tilde{y} &= C\tilde{y}'\end{aligned}$$

$$A\tilde{\Psi}' = \sqrt{B}\sqrt{\bar{x}'} f\left(\frac{C\tilde{y}'}{\sqrt{B}\sqrt{\bar{x}'}}\right)$$

Les invariants de cette solution sont :

$$A = \sqrt{B}$$

$$\text{et } \frac{C}{\sqrt{B}} = 1$$

- On cherche une solution avec les mêmes invariants :

$$\tilde{\Psi} = \sqrt{\bar{x}} f\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{\bar{x}}}\right)$$

- Recherche des invariants de cette solution :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= A\tilde{\Psi}' \\ \bar{x} &= B\bar{x}' \\ \tilde{y} &= C\tilde{y}'\end{aligned}$$

$$A\tilde{\Psi}' = \sqrt{B}\sqrt{\bar{x}'} f\left(\frac{C\tilde{y}'}{\sqrt{B}\sqrt{\bar{x}'}}\right)$$

Les invariants de cette solution sont :

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{B} \\ \text{et } \frac{C}{\sqrt{B}} &= 1\end{aligned}$$

- Changement de variable

$$(\bar{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\lambda, \eta) \text{ avec } \lambda = \bar{x} \text{ et } \eta = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\bar{x}}}$$

$$\tilde{\Psi} = \sqrt{\lambda} f(\eta)$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} f(\eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \sqrt{\lambda} f'(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} = \sqrt{\lambda} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^3} = \sqrt{\lambda} f'''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} f(\eta) \right) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} f'(\eta)$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} - \frac{\tilde{y}}{2\bar{x}^{3/2}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} - \frac{\eta}{2\lambda} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} f(\eta) - \frac{\eta}{2\lambda} \sqrt{\lambda} f'(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} (f(\eta) - \eta f'(\eta))$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} f'(\eta) = f'(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda} f''(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} \right) = \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda}} \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^3} = \frac{1}{\lambda} f'''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda} - \frac{\eta}{2\lambda} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta \partial \lambda} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} - \frac{\eta}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} f'(\eta) - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} f'(\eta) - \frac{\eta}{2\lambda\sqrt{\lambda}} f''(\eta)$$

L'équation  $\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}^3}$  devient :

$$f'(\eta) \left( -\frac{\eta}{2\lambda} f''(\eta) \right) - \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} (f(\eta) - \eta f'(\eta)) \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f''(\eta) = \frac{1}{\lambda} f'''(\eta)$$

$$\text{ou encore } -\frac{\eta}{2\lambda} f''(\eta) f'(\eta) - \frac{1}{2\lambda} ((f(\eta) - \eta f'(\eta))) f''(\eta) = \frac{1}{\lambda} f'''(\eta)$$

$$\text{ou encore } -\frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = f'''(\eta)$$

$$\text{ou encore } f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

- Conditions aux limites :

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0 \text{ donne } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta}(\lambda, \eta = 0) = 0 \text{ ou encore } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} f'(0) = 0, \text{ c'est-à-dire } f'(0) = 0$$

$$\tilde{\Psi} \approx \tilde{y} \text{ lorsque } \tilde{y} \rightarrow \infty \text{ donne } \sqrt{\lambda} f(\eta) \approx \eta \sqrt{\lambda} \text{ lorsque } \eta \rightarrow \infty \text{ ou encore } f(\eta) \approx \eta \text{ lorsque } \eta \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\Psi}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0 \text{ donne } \sqrt{\lambda} f(\eta = 0) = 0 \text{ ou encore } f(0) = 0$$

- En récapitulant :

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(\eta) \approx \eta \text{ lorsque } \eta \rightarrow \infty \text{ ou encore } f'(\infty) = 1$$

On trouve :  $f''(0) = 0,332$

- Le champ de vitesse

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} = f'(\eta)$$

$$\tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} (\eta f'(\eta) - f(\eta))$$

- En variables dimensionnées :

$$u(x, y) = U \tilde{u} = U f' \left( \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\bar{x}}} \right) = U f' \left( \frac{y \sqrt{L}}{\varepsilon L \sqrt{x}} \right) = U f' \left( \frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{L}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) = U f' \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right)$$

$$v(x, y) = \varepsilon U \tilde{v} = \varepsilon U \frac{1}{2\sqrt{x}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) = \frac{U}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{x}} \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} f' \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) - f \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{\nu U}}{2\sqrt{x}} \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} f' \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) - f \left( \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \right)$$

$$C_f = \frac{2\nu}{U^2} U \sqrt{\frac{U}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{x}} f''(0) = 2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f''(0) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \text{ car } f''(0) = 0,332$$

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} dx = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \text{ avec } Re = \frac{UL}{\nu}$$

$$\delta_{0,99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \text{ car } f'(5) = 0,99$$

$$\delta^*(x) = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\theta(x) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Le paramètre de forme vaut :  $H = 2,59$

Exemple : dans l'eau

$$U = 1 \text{ m/s}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Re = \frac{UL}{\nu} = 10^6$$

On sait que l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite est

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} = 1 \text{ mm}$$

$$\delta_{0,99}(L) = 5 \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = 5 \frac{L}{\sqrt{Re}} = 5 \text{ mm}$$

$$\delta^*(L) = 1,72 \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = 1,72 \frac{L}{\sqrt{Re}} = 1,72 \text{ mm}$$

$$\theta(L) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = 0,664 \frac{L}{\sqrt{Re}} = 0,664 \text{ mm}$$

## 5.2. La couche limite dans les écoulements de gaz parfait à faible nombre de Mach

Dans la couche limite :

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \gamma \varepsilon \tilde{p}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \varepsilon \tilde{\rho}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \varepsilon \tilde{T}$$

$$x = L\bar{x}, \quad y = \alpha L\tilde{y}$$

$$\alpha = \frac{\delta}{L} \rightarrow 0$$

$$u = c_0 \sqrt{\varepsilon} \tilde{u}, \quad v = V \tilde{v}$$

$$t = \frac{L}{c_0 \sqrt{\varepsilon}} \tilde{t}$$

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$	+	$\frac{1}{\rho} u \partial_x \rho$	+	$\frac{1}{\rho} v \partial_y \rho$	+	$\partial_x u$	+	$\partial_y v$	=	0
$\frac{1}{\rho_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon \rho_0$	+	$\frac{1}{\rho_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon \rho_0$	+	$\frac{1}{\rho_0} \frac{V}{\alpha L} \varepsilon \rho_0$	+	$\frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L}$	+	$\frac{V}{\alpha L}$	=	
$\varepsilon$	+	$\varepsilon$	+	$\frac{V}{c_0 \alpha} \sqrt{\varepsilon}$	+	1	+	$\frac{V}{c_0 \alpha} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	=	0
0	+	0	+	0	+	1	+	1	=	0
						$\partial_x \tilde{u}$	+	$\partial_y \tilde{v}$	=	0

$$V = c_0 \alpha \sqrt{\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \frac{d}{d\tilde{t}}$$

$\rho \frac{du}{dt}$	+	$\partial_x p$	=	$\frac{\mu}{3} \partial_{xx} u$	+	$\frac{\mu}{3} \partial_{xy} v$	+	$\mu \partial_{xx} u$	+	$\mu \partial_{yy} u$
$\rho_0 \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} c_0 \sqrt{\varepsilon}$	+	$\frac{\varepsilon p_0}{L}$	=	$\frac{c_0 L \rho_0}{R_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0}{R_0} \frac{c_0 \alpha \sqrt{\varepsilon}}{\alpha L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0}{R_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0}{R_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2 L^2}$
$= \frac{\rho_0 c_0^2 \varepsilon}{L}$				$= \frac{c_0 L \rho_0}{R_0} \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L^2}$						
1	+	1	=	$\rightarrow 0$	+	$\rightarrow 0$	+	$\rightarrow 0$	+	$\frac{1}{\alpha^2 R_0 M_0}$
										= 1
$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}$	+	$\partial_x \tilde{p}$	=							$\partial_{yy} \tilde{u}$

$\rho \frac{du}{dt}$	+	$\partial_y p$	=	$\frac{\mu}{3} \partial_{xy} u$	+	$\frac{\mu}{3} \partial_{yy} v$	+	$\mu \partial_{xx} v$	+	$\mu \partial_{yy} v$
$\rho_0 \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \alpha c_0 \sqrt{\varepsilon}$ = $\frac{\rho_0 c_0^2 \varepsilon \alpha}{L}$	+	$\frac{\varepsilon p_0}{\alpha L}$	=	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0 \sqrt{\varepsilon}}{R_0 \alpha^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0 \alpha \sqrt{\varepsilon}}{R_0 \alpha^2 L^2}$ = $\frac{c_0 L \rho_0 c_0 \sqrt{\varepsilon}}{R_0 \alpha L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0 \alpha \sqrt{\varepsilon}}{R_0 L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0 \alpha \sqrt{\varepsilon}}{R_0 \alpha^2 L^2}$
1	+	$\frac{1}{\alpha^2}$	=	$\frac{1}{\alpha^2 R_0 M_0}$ = 1	+	$\frac{1}{\alpha^2 R_0 M_0}$ = 1	+	$\rightarrow 0$	+	$\frac{1}{\alpha^2 R_0 M_0}$ = 1
		$\partial_{\tilde{y}} \tilde{p}$	=	0						

$\rho C_p \frac{dT}{dt}$	=	$\frac{dp}{dt}$	+	$\mu \partial_y u \partial_y u$	+	$\mu (\frac{4}{3} \partial_x^2 u \partial_x u + \frac{4}{3} \partial_y^2 v \partial_y v + \partial_x v \partial_x v + 2 \partial_x v \partial_y u)$	+	$K \partial_{xx} T$	+	$K \partial_{yy} T$
$\rho_0 C_p \frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon T_0$	=	$\frac{c_0 \sqrt{\varepsilon}}{L} \varepsilon p_0$	+	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0^2 \varepsilon}{R_0 \alpha^2 L^2}$	+	$\frac{c_0 L \rho_0 c_0^2 \varepsilon}{R_0 L^2}$ et $\frac{c_0 L \rho_0 c_0^2 \alpha^2 \varepsilon}{R_0 L^2}$ $\rightarrow 0$	+	$\frac{K \varepsilon T_0}{L^2}$ $\rightarrow 0$	+	$K \frac{\varepsilon T_0}{\alpha^2 L^2}$
1	=	$\gamma - 1$	+	$\frac{\gamma - 1}{\alpha^2 R_0 M_0}$ = $\gamma - 1$	+					$\frac{1}{Pr} \frac{1}{\alpha^2 R_0 M_0}$ = $\frac{1}{Pr}$
$\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}}$	=	$(\gamma - 1) \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}}$	+	$(\gamma - 1) \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}$						$\frac{1}{Pr} \partial_{\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{T}$

## 6. Compressibilité

### 6.1. Compressibilité instationnaire en 1D

#### 6.1.1. Introduction

Les équations d'Euler, en l'absence de force massique s'écrivent :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\operatorname{grad} p$$

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Or  $p = p(\rho, s)$ . Donc :  $\frac{dp}{dt} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{d\rho}{dt} + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_s \frac{ds}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}$

Et l'équation de continuité devient :  $\frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$

En une seule dimension ( $V = W = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ ), ces équations deviennent :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho U \frac{\partial U}{\partial t} - \rho U^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

**Résolution avec la méthode des caractéristiques :**

✓ On se place sur la trajectoire ( $C_0$ ), aussi appelée caractéristique :  $t \rightarrow x(t)$ , tel que  $\frac{dx}{dt} = U$

On considère :  $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s[x(t), t] = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = U \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$

$s$  est appelé un invariant de Riemann.

✓ On se place sur la trajectoire ( $C_+$ ), aussi appelée caractéristique :  $t \rightarrow x(t)$ , tel que  $\frac{dx}{dt} = U + c$

Soit  $\Phi(x, t)$ ,

Définition :  $\frac{D^+ \Phi}{Dt} \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{d}{dt} \Phi(x(t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (U + c) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

On considère :  $\frac{D^+ p}{Dt} + \rho c \frac{D^+ U}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \left( \frac{\partial U}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial U}{\partial x} \right)$

Or :  $\frac{\partial p}{\partial t} = \rho U \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial U}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x}$  et  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \rho U \frac{\partial U}{\partial x}$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{D^+ p}{Dt} + \rho c \frac{D^+ U}{Dt} &= \rho U \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial U}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} + (U + c) \left( -\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \rho U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \rho c \left( \frac{\partial U}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= \rho U \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial U}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} - \rho U \frac{\partial U}{\partial t} - \rho U^2 \frac{\partial U}{\partial x} - \rho c \frac{\partial U}{\partial t} - \rho U c \frac{\partial U}{\partial x} + \rho c \frac{\partial U}{\partial t} + \rho c U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ✓ On se place sur la trajectoire  $(C_-)$ , aussi appelée caractéristique :  $t \rightarrow x(t)$ , tel que  $\frac{dx}{dt} = U - c$

Soit  $\Phi(x, t)$ ,

Définition :  $\frac{D^- \Phi}{Dt} \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{d}{dt} \Phi(x(t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (U - c) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

De même qu'auparavant, on montre que :  $\frac{D^- p}{Dt} - \rho c \frac{D^- U}{Dt} = 0$

- ✓ Récapitulatif :

Sur  $(C_0)$ ,  $\frac{ds}{dt} = 0$

Sur  $(C_+)$ ,  $\frac{D^+ p}{Dt} + \rho c \frac{D^+ U}{Dt} = 0$

Sur  $(C_-)$ ,  $\frac{D^- p}{Dt} - \rho c \frac{D^- U}{Dt} = 0$

- ✓ Cas homoentropique, où toutes les caractéristiques  $(C_0)$ ,  $(C_+)$  et  $(C_-)$  proviennent du même milieu caractérisé par  $(u_0, s_0, p_0, \rho_0, T_0, c_0)$

On a alors :  $s(x, t) = s_0$  (on ne considère plus à partir de maintenant les caractéristiques  $(C_0)$ )

D'où :  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$

Or la définition de la vitesse du son induit :  $c^2 = \frac{\mathcal{P}}{\rho}$  et  $c_0^2 = \frac{\mathcal{P}_0}{\rho_0}$ .

En combinant ces dernières relations :  $\frac{p}{p_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$  et  $\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$

En différenciant la relation  $\frac{p}{p_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ ,

On obtient ;  $\frac{1}{p} \frac{D^+ p}{Dt} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{c} \frac{D^+ c}{Dt}$

Ainsi,

$$\frac{D^+ p}{Dt} + \rho c \frac{D^+ U}{Dt} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{c} \frac{D^+ c}{Dt} + \rho c \frac{D^+ U}{Dt} = \frac{p}{c} \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{D^+ c}{Dt} + \underbrace{\gamma \frac{\rho}{\rho} c^2}_{=1} \frac{D^+ U}{Dt} \right) = \gamma \frac{p}{c} \frac{D^+}{Dt} \left( \frac{2c}{\gamma-1} + U \right)$$

Donc,  $\frac{D^+}{Dt} \left( U + \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$  et  $U + \frac{2c}{\gamma-1} = U_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1}$  le long de  $(C_+)$

De même, on montre que :

$$\frac{D^-}{Dt} \left( U - \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0 \text{ et donc } U - \frac{2c}{\gamma-1} = U_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \text{ le long } (C_-)$$

✓ Récapitulatif dans le cas homoentropique :

$$s = s_0 \text{ le long de } (C_0), \frac{dx}{dt} = U$$

$$U + \frac{2c}{\gamma-1} = U_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1} \text{ le long de } (C_+), \frac{dx}{dt} = U + c$$

$$U - \frac{2c}{\gamma-1} = U_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \text{ le long } (C_-), \frac{dx}{dt} = U - c$$

Ces trois équations déterminent  $s, U, c$ .

On remonte à la pression et à la densité en utilisant :  $\frac{p}{p_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$  et  $\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$ .

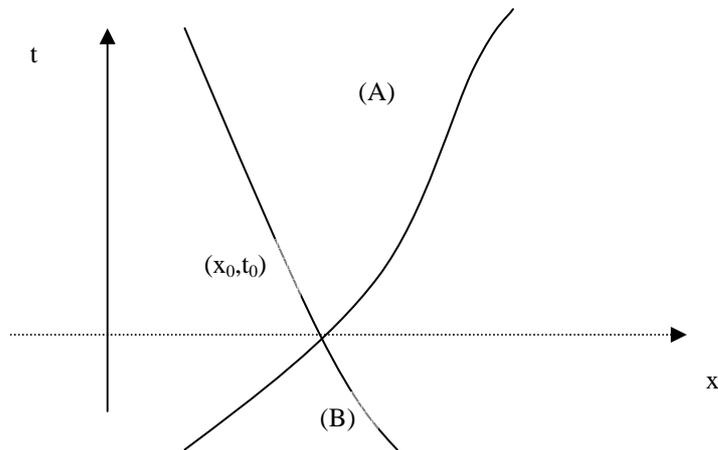
✓ Vitesse de propagation de l'information :

Les perturbations d'entropie se propagent à la vitesse de l'écoulement  $U$ .

Toutes les autres perturbations  $p, u, \rho, T$  se propagent à la vitesse  $U + c$  et  $U - c$ . En particulier, les ondes acoustiques.

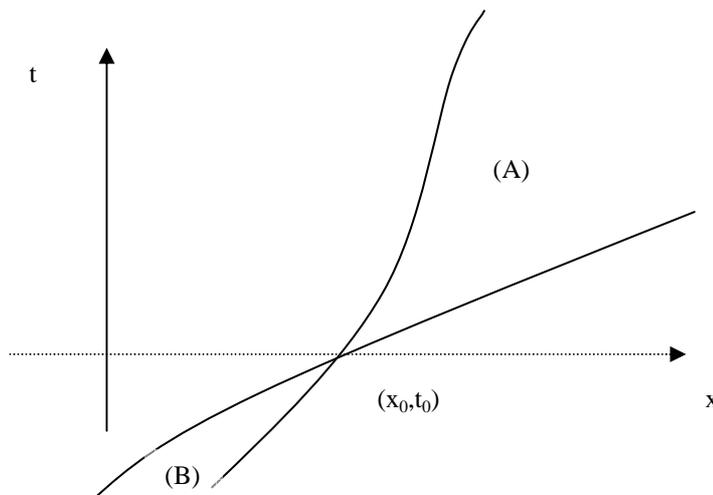
✓ Ecoulement subsonique :  $M = \frac{|U|}{c} < 1$  et donc  $U + c > 0$  et  $U - c < 0$ .

Une perturbation du champ en  $x_0$  se propage vers l'aval  $x > x_0$  et vers l'amont  $x < x_0$ . La zone influencée est la région (A) dans la figure ci-dessous. On peut également dire que l'état en  $x_0$  est influencé par les perturbations venant de l'aval  $x > x_0$  et de l'amont  $x < x_0$ . Dans la figure donnée ci-dessous, toute perturbation issue de la région (B) est ressentie en  $(x_0, t_0)$ .



- ✓ Écoulement supersonique :  $M = \frac{|U|}{c} > 1$  et donc  $U + c$  et  $U - c$  sont de même signe. Prenons le cas où  $U + c > 0$  et  $U - c > 0$

Une perturbation du champ en  $x_0$  se propage alors toujours vers l'aval  $x > x_0$  (région (A) de la figure ci-dessus). On peut également dire que l'état en  $x_0$  est influencé uniquement par les perturbations venant de l'amont  $x < x_0$  (région (B) de la figure ci-dessus). Il y a possibilité de choc car il n'y a pas d'information venant de l'aval, par exemple l'existence d'un obstacle.

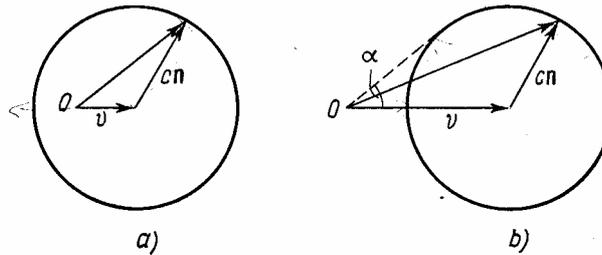


- ✓ Généralisation au cas 3D :

Si un gaz en mouvement stationnaire subit en un point quelconque une faible perturbation, l'influence de celle-ci se propage dans le gaz avec une vitesse (relativement au gaz lui-même) égale à la vitesse du son. En ce qui concerne la vitesse de propagation de la perturbation par rapport à un référentiel immobile, elle est constituée par deux parties : primo, la perturbation est entraînée par le flux gazeux avec la vitesse  $\underline{U}$  ; secundo, elle se propage par rapport au gaz avec la vitesse  $c$  dans une certaine direction  $\underline{N}$ . Envisageons pour la simplicité un flux gazeux homogène de vitesse  $\underline{U}$ . Supposons qu'en un point O (fixe dans l'espace) le gaz subisse une petite perturbation. La vitesse  $\underline{U} + c\underline{N}$  de propagation de la perturbation issue de O a dans le référentiel immobile diverses valeurs suivant la direction du vecteur unité  $\underline{N}$ . On obtient toutes les valeurs possibles de la vitesse en menant de O le vecteur  $\underline{U}$  et en décrivant à partir de l'extrémité de ce vecteur prise comme centre une sphère de rayon  $c$  ; les vecteurs menés de O aux points de la sphère déterminent les valeurs ainsi que les directions possibles de la propagation de la perturbation.

Soit d'abord  $U < c$ . Alors les vecteurs  $\underline{U} + c\underline{N}$  peuvent avoir n'importe quelle direction dans l'espace. En d'autres termes, dans un flux subsonique une perturbation issue d'un point O se propage à la longue dans tout le gaz.

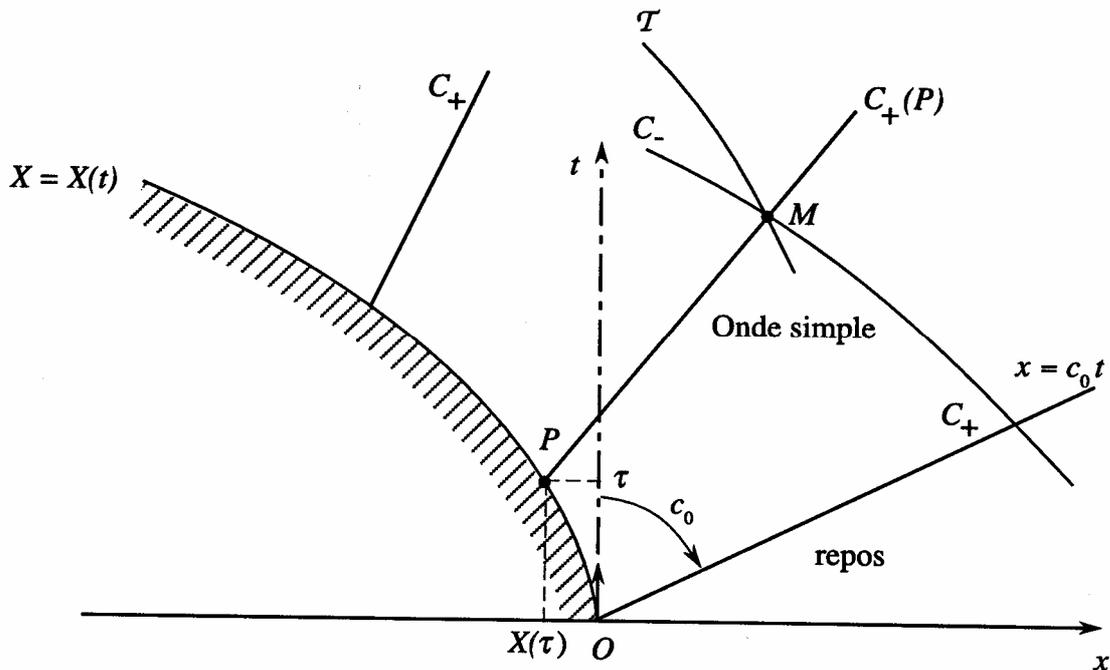
Par contre, dans un flux supersonique,  $U > c$ , les directions des vecteurs  $\underline{U} + c\underline{N}$  seront forcément contenues dans le cône de sommet O circonscrit à la sphère décrite de l'extrémité du vecteur  $\underline{U} + c\underline{N}$ . L'angle au sommet  $2\alpha$  du cône est  $\sin \alpha = \frac{c}{U}$ . Ainsi donc, la perturbation issue d'un point quelconque dans un flux supersonique ne se propage qu'en aval dans un cône d'angle au sommet d'autant plus petit que le rapport  $c/U$  est petit. La région toute entière hors de ce cône n'est pas affectée par la perturbation au point O.



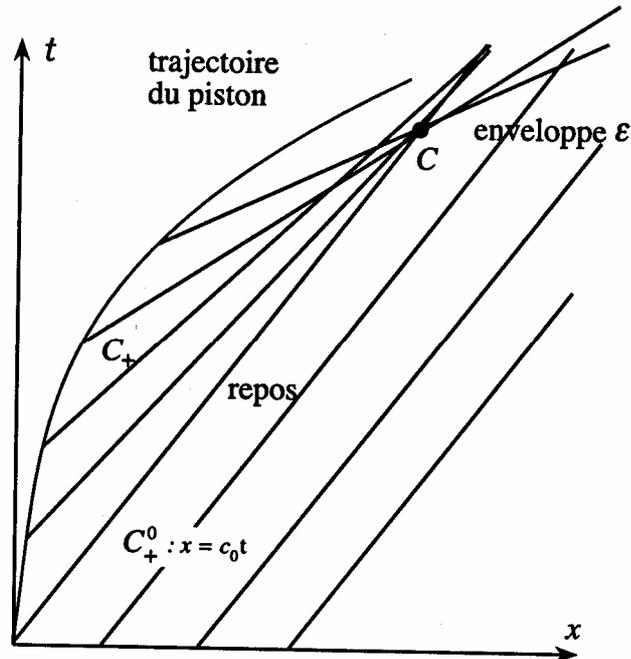
### 6.1.2. Application au cas d'un piston

On considère le cas d'un gaz occupant un tube de section constante semi-infini et mis en mouvement par une paroi mobile (le piston) et imperméable de trajectoire connue. Le gaz est à l'instant initial au repos uniforme d'état  $(U_0 = 0, p_0, s_0)$  dans le domaine  $x \geq 0$  et la position du piston à l'instant  $t \geq 0$  est  $X(t)$ . L'écoulement est homoentropique d'entropie spécifique  $s = s_0$  à tout instant. Il est astreint à tout instant à la condition d'imperméabilité sur la paroi du piston :  $U(X(t), t) = \frac{dX}{dt}(t)$ .

✓ Onde simple de détente



✓ Onde simple de compression



## 6.2. Le modèle fluide parfait sans discontinuité.

### 6.2.1. Cas général

Les équations d'Euler s'écrivent en dehors de discontinuités et en dehors de forces extérieures :

$$\rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 0$$

Pour un gaz parfait :  $h = C_p T$

Pour un écoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Donc :  $\frac{d}{dt} \left( h + \frac{U^2}{2} \right) = 0$  et  $\frac{ds}{dt} = 0$

Il y a donc conservation, le long des lignes de courant, de l'enthalpie totale :  $C_p T + \frac{U^2}{2} = C_p T_0$  et de l'entropie

$$s = s_0.$$

Or  $c^2 = \gamma T$ . La relation de conservation de l'enthalpie totale peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} \text{ avec } M = \frac{U}{c}$$

La conservation de l'entropie le long d'une ligne de courant ( $s = cte$ ), implique la conservation de  $p^{1-\gamma}T^\gamma = cte$  et  $\rho^{1-\gamma}T = cte$  le long des lignes de courant.

Ceci se traduit de la manière suivante :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \text{ et donc : } \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \text{ le long des lignes de courant.}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \text{ et donc : } \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \text{ le long des lignes de courant.}$$

## 6.2.2. Application au cas d'une tuyère

On considère une tuyère munie d'un convergent et d'un divergent. La section de la tuyère est notée  $A(x)$ . Le col de la tuyère correspond à la section de taille minimale. En cet endroit :  $\frac{dA}{dx}(x_c) = 0$ . Toutes les grandeurs à cet endroit seront référencés dans la suite en utilisant l'indice  $c$ . En particulier, la section au col sera notée ;  $A_c$ .

Les grandeurs dans la section de sortie de la tuyère seront référencées avec l'indice  $s$ . En particulier, la section de sortie sera notée  $A_s$ .

On se place dans l'approximation unidimensionnelle. Dans chaque section de la tuyère, on suppose que toutes les grandeurs sont uniformes. D'où les fonctions :  $\rho(x)$ ,  $U(x)$ ,  $T(x)$ ,  $p(x)$ , etc.

Le gaz provient d'un récipient unique où le gaz est au repos. Dans ce récipient, le gaz est à vitesse nulle  $M = 0$ , à la pression  $p_0$  et à la température  $T_0$ . La tuyère débouche dans un récipient où le gaz est à vitesse nulle  $M = 0$ , à la pression  $p_a$  et la température  $T_a$ .

La conservation de la masse s'exprime par la relation :  $\int_{\partial\Omega} \rho(\underline{U} \cdot \underline{n}) da = 0$ .

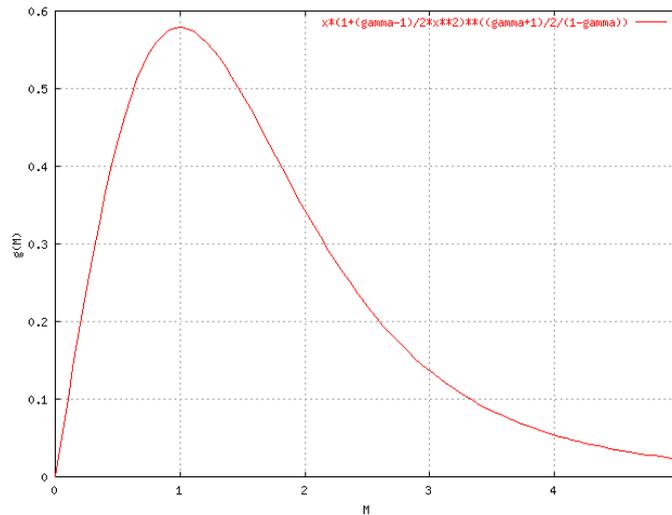
On peut écrire, grâce à l'approximation unidimensionnelle que  $\dot{m} = \rho(x)U(x)A(x)$  est constant et représente le débit de la tuyère.

Ceci devient :

$$\dot{m} = \left(\frac{p}{rT}\right)(\sqrt{\gamma r T} M) A = \frac{p}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} M A = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} M A$$

$$\text{Et donc : } \dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M(x)) A(x)$$

$$\text{avec } g(M) = M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}$$



### Régime supersonique, subsonique, col sonique

Conservation du débit :  $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0$

Conservation de l'enthalpie totale :  $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{c_0^2}{\gamma-1}$ , donc :  $\frac{2cdc}{\gamma-1} + UdU = 0$ . D'où :

$$-\frac{U}{c^2} dc = \frac{dU}{c} \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Conservation de l'entropie :  $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ , donc :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\frac{\gamma-1}{2} 2M dM}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = -\frac{U}{c} \frac{\frac{dU}{c} - \frac{U}{c^2} dc}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = -\frac{U}{c} \frac{dU}{c} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = -\frac{U^2}{c^2} \frac{dU}{U}$$

D'où :  $\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dU}{U}$  et  $\frac{dU}{U} (1 - M^2) + \frac{dA}{A} = 0$

Ainsi, si  $M = 1$  alors  $dA = 0$ , i.e. on se situe à un col.

Ainsi, si  $M < 1$  alors,  $\frac{dU}{U}$  et  $\frac{dA}{A}$  sont de signe opposé (dans un convergent, un écoulement subsonique accélère,

dans un divergent, il décélère).

Ainsi, si  $M > 1$  alors,  $\frac{dU}{U}$  et  $\frac{dA}{A}$  sont de même signe (dans un convergent, un écoulement supersonique décélère,

dans un divergent, il accélère).

### Calcul du champ de vitesse

Supposons qu'il existe un col :  $dA_c = 0$

- ✓ Première condition : Conservation de la masse

En chaque section de la tuyère, on a :  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M(x))A(x)$

- ✓ Deuxième condition : continuité de la pression à la sortie tuyère avec la pression ambiante, i.e  $p_s = p_a$

- ✓ Cas de la tuyère non amorcée ( $M_c < 1$ )

La pression de sortie étant connue, on obtient le Mach de sortie en utilisant la relation suivante :

$$\frac{p_s}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

On calcule alors le débit :  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M_s)A_s$

Et ensuite les différents nombre de Mach dans les différentes sections :  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M(x))A(x)$

- ✓ Cas de la tuyère amorcée ( $M_c = 1$ )

Le débit est fixé :  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(1)A_c$

On obtient les nombres de Mach dans les sections par la relation:  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M(x))A(x)$  qui se simplifie ici

en  $g(1) \frac{A_c}{A(x)} = g(M(x))$

Il existe deux solutions : la branche subsonique avec  $M < 1$  et la branche supersonique avec  $M > 1$ .

En particulier, il existe deux solutions pour le Mach de sortie :  $g(1) \frac{A_c}{A_s} = g(M_s)$

Et aussi, deux valeurs pour la pression de sortie :  $\frac{p_s}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

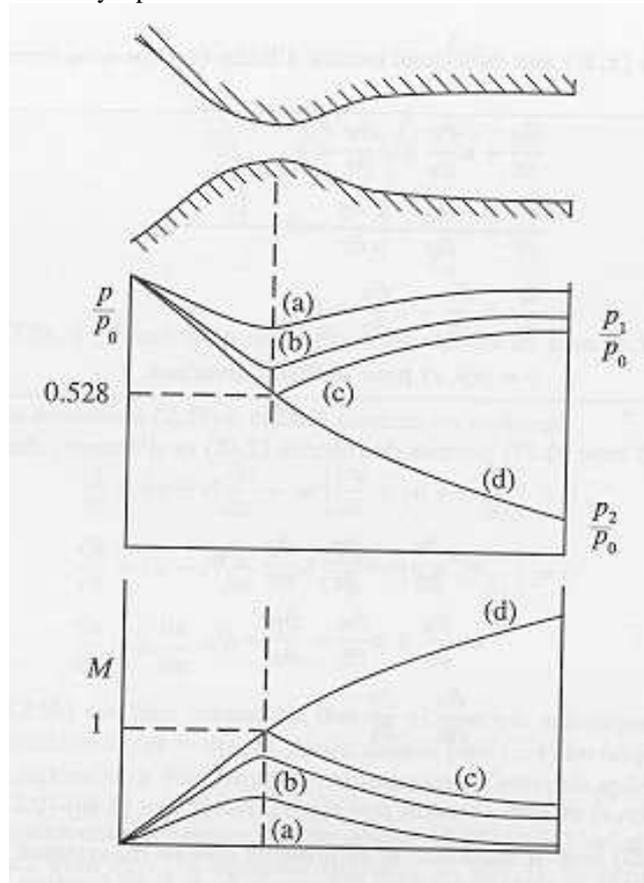
La valeur correspondante subsonique de la pression  $p_s$  est notée  $p_1$  alors que la valeur correspondante supersonique est appelée  $p_2$ .

C'est la pression à l'extérieur de la tuyère qui fixera laquelle des deux branches choisir.

- ✓ Récapitulatif

1. Si  $p_a = p_0$ , le fluide est au repos car  $\dot{m} = 0$
2. Si  $p_a < p_0$ , la différence de pression  $p_0 - p_a$  est le moteur du déplacement. Par continuité, si  $p_a$  diminue à partir de  $p_0$ ,  $M(x_c)$  augmente à partir de zéro pour atteindre la valeur unité pour  $p_a = p_1$ . En deçà de cette valeur pour  $p_a$ ,  $M(x_c)$  reste égale à l'unité. Ainsi,
  - ✓ Si  $p_s$  tel que :  $p_1 < p_s = p_a < p_0$ , l'écoulement est entièrement subsonique dans le convergent et dans le divergent.

- ✓ Si  $p_s (= p_a) = p_1 < p_0$ , l'écoulement est sonique au col, subsonique dans le convergent et le divergent.
- ✓ Si  $p_s (= p_a) = p_2 < p_1 < p_0$ , l'écoulement est subsonique dans le convergent, sonique au col, supersonique dans le divergent.
- ✓ Dans tous les autres cas : il n'y a pas de solution.



### 6.3. Le modèle fluide parfait avec discontinuité

#### 6.3.1. Relations de choc

- ✓ Si l'on considère une discontinuité stationnaire, les relations de saut s'écrivent pour un fluide parfait :

$$\begin{aligned} & ]\rho \underline{U} [ \cdot \underline{n} = 0 \\ & \rho ]\underline{U} [ \underline{U} \cdot \underline{n} = - ]p [ \underline{n} \\ & \rho \left] e + \frac{U^2}{2} \left[ \underline{U} \cdot \underline{n} = - \right] p \underline{U} [ \cdot \underline{n} \\ & \rho ]s [ \underline{U} \cdot \underline{n} \geq 0 \end{aligned}$$

On rappelle que  $]f[ = f_2 - f_1$  représente le saut de  $f$  au niveau de la discontinuité.

- ✓ En posant  $\underline{U} = U_n \underline{n} + U_t \underline{t}$  (en notant  $\underline{n}$  la normale au choc et  $\underline{t}$  un vecteur tangent au choc s'appuyant sur  $\underline{U}$ ), ces équations deviennent :

$$\begin{aligned} & ]\rho U_n [ = 0 \\ & \rho ]U [ U_n = - ]p [ \underline{n} \\ & \rho \left] e + \frac{U^2}{2} \left[ U_n = - \right] p U_n [ \\ & \rho ]s [ U_n \geq 0 \end{aligned}$$

- ✓ Dans le cas d'un flux de masse non nul :

$$\begin{aligned} \rho_2 U_{2n} &= \rho_1 U_{1n} = m > 0 \text{ (choix du sens de la normale } \underline{n} \text{)} \\ \rho_2 U_{2n}^2 + p_2 &= \rho_1 U_{1n}^2 + p_1 \\ U_{2t} &= U_{1t} \text{ car } m \neq 0 \\ \rho_2 U_{2n} \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{U_{2n}^2}{2} \right) &= \rho_1 U_{1n} \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_{1n}^2}{2} \right) \text{ ou } h_2 + \frac{U_{2n}^2}{2} = h_1 + \frac{U_{1n}^2}{2} \\ s_2 &\geq s_1 \text{ car } m > 0 \end{aligned}$$

- ✓ Dans le cas d'un choc droit :  $U_{2t} = U_{1t} = 0$ , ces équations donnent :

$$\begin{aligned} \rho_2 U_2 &= \rho_1 U_1 = m > 0 \\ \rho_2 U_2^2 + p_2 &= \rho_1 U_1^2 + p_1 \\ h_2 + \frac{U_2^2}{2} &= h_1 + \frac{U_1^2}{2} \\ s_2 &\geq s_1 \end{aligned}$$

- ✓ La droite de Rayleigh et la courbe de Hugoniot

$$\text{On pose : } \tau_1 = \frac{1}{\rho_1}, \tau_2 = \frac{1}{\rho_2}$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1^2 U_1^2 \tau_1 - \rho_2^2 U_2^2 \tau_2 = -m^2 (\tau_2 - \tau_1)$$

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = \rho_1 U_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{2}U_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1)$$

Les relations thermodynamiques donnent :  $h(p, \tau) = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} p \tau$

$$\text{Donc : } \begin{cases} p_2 - p_1 = -m^2(\tau_2 - \tau_1) \\ h_2(p_2, \tau_2) - h_1(p_1, \tau_1) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = -m^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 \tau_2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 \tau_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{p}{p_1} - 1 = -m^2 \frac{\tau_1}{p_1} \left(\frac{\tau}{\tau_1} - 1\right) = -\mathcal{M}_1^2 \left(\frac{\tau}{\tau_1} - 1\right) \\ \left(\frac{p}{p_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{\tau}{\tau_1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = cte \end{cases}$$

$$\text{avec } M_1 = \frac{U_1}{c_1} = \frac{U_1}{\sqrt{\gamma p_1 \tau_1}}.$$

Ces courbes sont appelées la droite de Rayleigh et la courbe d'Hugoniot.

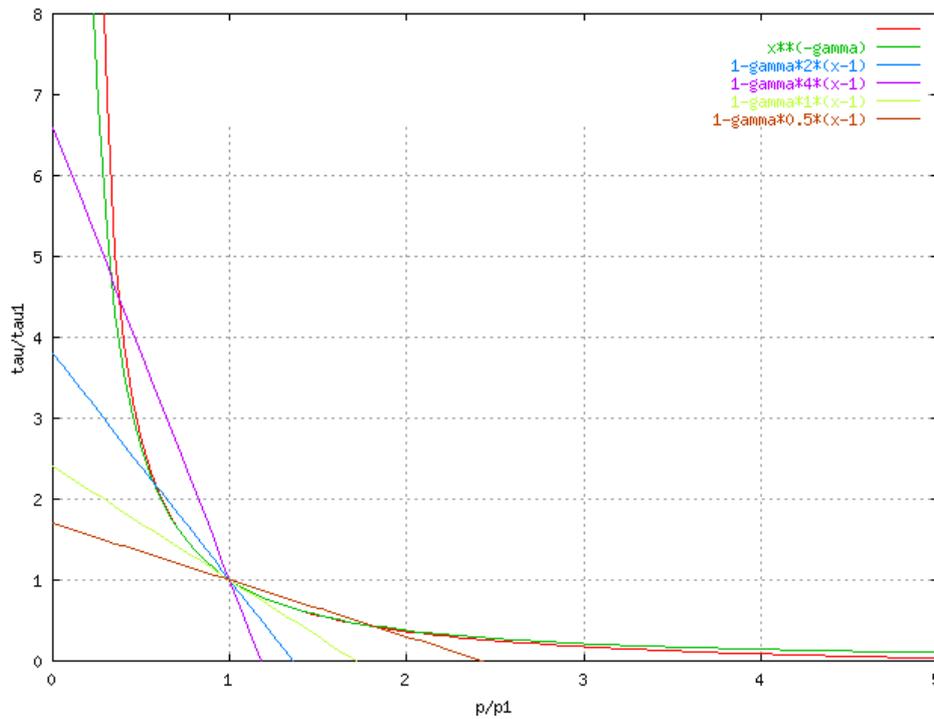
✓ Prouvons que  $p_2 > p_1$ ,  $\tau_2 < \tau_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$  et  $U_2 < U_1$

On sait que  $s_2 > s_1$  avec  $s = C_v \log(p \tau^\gamma)$ .

Considérons l'iso-entropique passant par  $(\tau_1, p_1)$  :  $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^\gamma}$

Ainsi, on choisit  $p_2 > p_1$ ,  $\tau_2 < \tau_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ ,

Or  $\rho_2 U_2 = \rho_1 U_1$ , donc  $U_2 < U_1$ .



✓ Montrons que  $M_1 > 1$ .

Pour cela, on compare les pentes de la droite de Rayleigh et de la courbe de Hugoniot en  $(\tau_1, p_1)$  :

pente(Rayleigh) < pente(Hugoniot)

$$\text{pente(Rayleigh)} : \frac{d(p/p_1)}{d(\tau/\tau_1)} = -\gamma M_1^2$$

$$\text{pente(Hugoniot)} : \frac{d(p/p_1)}{d(\tau/\tau_1)} = -\frac{p}{\tau} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \text{En}(\tau_1, p_1), \quad \frac{d(p/p_1)}{d(\tau/\tau_1)} = -\gamma,$$

D'où :  $-\gamma M_1^2 < -\gamma$  donne :  $M_1^2 > 1$ ,

✓ On cherche la relation liant  $M_2$  à  $M_1$

$$\frac{p_2 M_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{p_1 M_1}{\sqrt{T_1}}$$

$$p_2 (\gamma M_2^2 + 1) = p_1 (\gamma M_1^2 + 1),$$

$$T_2 \left( C_p + \frac{M_2^2 \gamma}{2} \right) = T_1 \left( C_p + \frac{M_1^2 \gamma}{2} \right) \text{ ou } T_2 \left( 1 + (\gamma-1) \frac{M_2^2}{2} \right) = T_1 \left( 1 + (\gamma-1) \frac{M_1^2}{2} \right)$$

Donc :

$$(\gamma M_1^2 + 1) M_2 \sqrt{1 + (\gamma-1) \frac{M_2^2}{2}} = (\gamma M_2^2 + 1) M_1 \sqrt{1 + (\gamma-1) \frac{M_1^2}{2}}$$

$$\frac{M_2^2 \left( 1 + (\gamma-1) \frac{M_2^2}{2} \right)}{(\gamma M_2^2 + 1)^2} = \frac{M_1^2 \left( 1 + (\gamma-1) \frac{M_1^2}{2} \right)}{(\gamma M_1^2 + 1)^2}$$

$$M_2^2 = 1 - \frac{(\gamma+1)(M_1^2 - 1)}{1 + \gamma(2M_1^2 - 1)} \text{ avec } M_2 = \frac{U_2}{c_2} = \frac{U_2}{\sqrt{\gamma p_2 \tau_2}}$$

✓ On donne les relations liant les différentes grandeurs de part et d'autre du choc :

$$M_2^2 = 1 - \frac{(\gamma+1)(M_1^2 - 1)}{1 + \gamma(2M_1^2 - 1)} \text{ (rappel)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

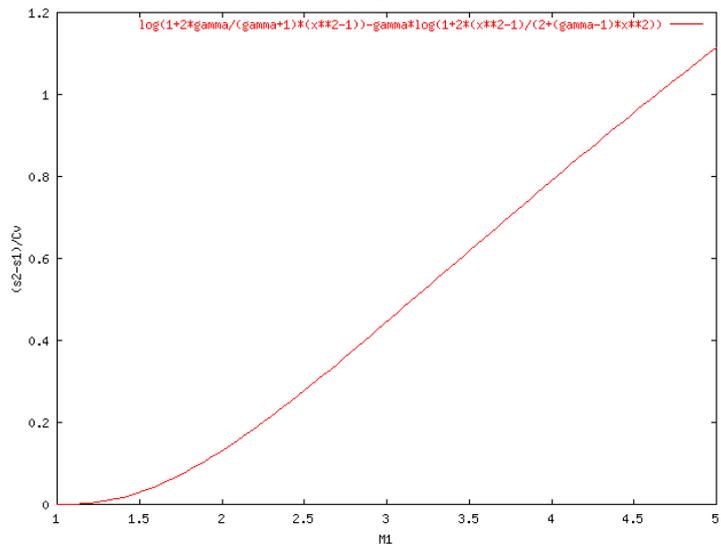
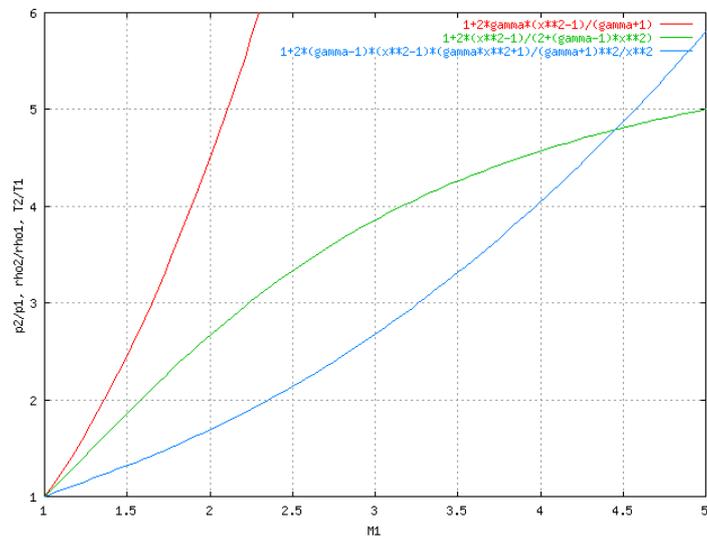
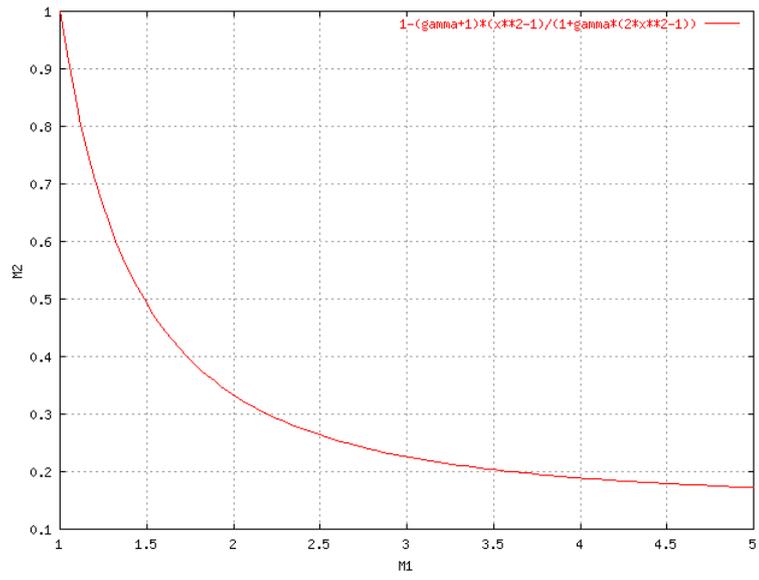
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma-1)M_1^2}$$

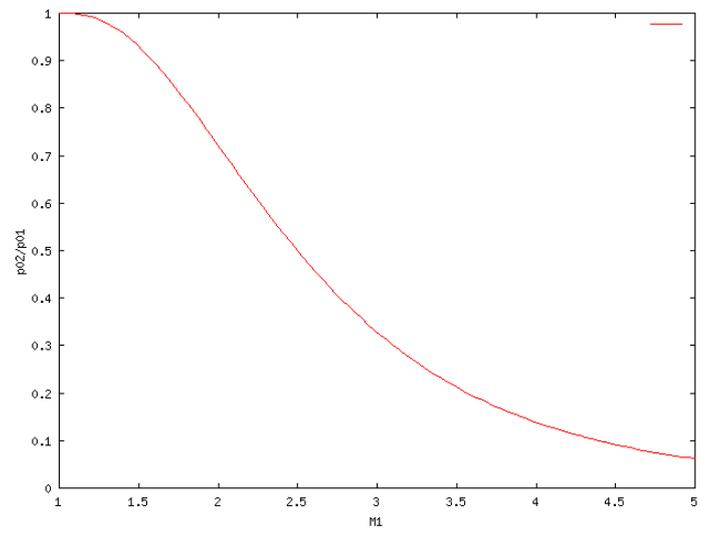
$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{C_v} = \log \frac{p_2}{p_1} - \gamma \log \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[ \frac{[2 + (\gamma-1)M_1^2][2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$





### 6.3.2. Application au cas d'une tuyère

Soit  $x_c$  et  $x_{choc}$  tel que  $x_{choc} > x_c$ .

Pour toute la partie de la tuyère  $x < x_{choc}$ , l'écoulement est déterminé par la condition :  $M_c = 1$

Le débit vaut :  $\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(1) A_c$ .

Or au niveau du choc :

continuité de la température totale :  $T_0' = T_0$

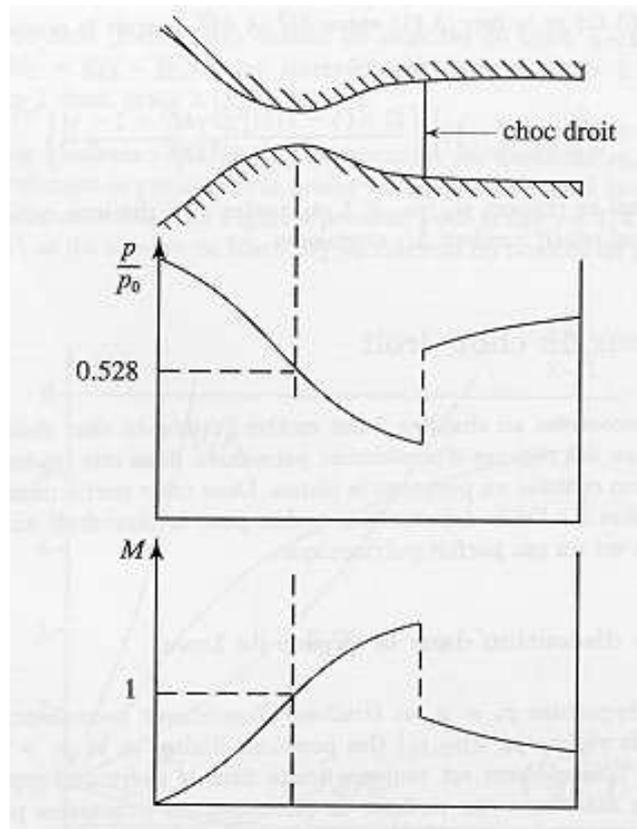
diminution de la pression totale:

$$\frac{p_0'}{p_0} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{choc}^2 - 1) \right] \left[ \frac{[2 + (\gamma-1)M_{choc}^2] [2\gamma M_{choc}^2 + 1 - \gamma]}{(\gamma+1)^2 M_{choc}^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

La conservation de la masse donne alors :  $\dot{m} = \frac{p_0'}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{r}} g(M(x)) A(x)$  avec  $\dot{m}$  et  $p_0'$  donné plus ci-dessus.

Ceci permet de déterminer une pression de sortie  $\frac{p_s}{p_0'} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ .

Lorsque  $x_{choc}$  parcourt  $[x_c, x_s]$ , la pression en sortie  $p_s = p_a$  diminue de  $p_1$  à  $p_1'$ .



## 7. Turbulence

### 7.1. Les équations moyennées

- ✓ Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent sous forme conservative de la façon suivante :

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\nu \underline{d})$$

$$C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T \underline{u}) \right) = 2\nu \underline{d} : \underline{d} + \operatorname{div} \left( \frac{K}{\rho} \operatorname{grad} T \right)$$

avec  $\underline{d} = \frac{1}{2} \left( \underline{\operatorname{grad} u} + {}^t \underline{\operatorname{grad} u} \right)$ .

On rappelle que si  $\underline{u} = \begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix}$ ,

Alors  $\underline{u} \otimes \underline{u} = (u_i u_j) = \begin{pmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{pmatrix}$

Et  $\operatorname{div}(\underline{u} \otimes \underline{u}) = \begin{pmatrix} \partial_x(uu) & \partial_y(uv) & \partial_z(uw) \\ \partial_x(vu) & \partial_y(vv) & \partial_z(vw) \\ \partial_x(wu) & \partial_y(wv) & \partial_z(ww) \end{pmatrix}$

Le terme  $2\mu \underline{d} : \underline{d}$  est le taux de dissipation de l'écoulement.

- ✓ Imaginons, qu'en un point quelconque d'un écoulement on mesure à chaque instant, une grandeur quelconque désignée par  $f(x, y, z, t)$ . La valeur moyenne de  $f$  est, si elle existe, la quantité  $F$  telle que :

$$F(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, y, z, t) dt$$

On note :  $F(x, y, z) = \langle f(x, y, z, t) \rangle$ . Il s'agit dans ce cas d'une moyenne temporelle et la valeur  $F$  obtenue ne dépend plus du temps ( $\partial_t F = 0$ ). En écrivant ensuite qu'à chaque instant la valeur de  $f$  est :  $f(x, y, z, t) = F(x, y, z) + f'(x, y, z, t)$ , on définit la fluctuation instantanée  $f'(x, y, z, t)$  autour de la valeur moyenne  $F$ . On peut alors considérer la variance de  $f$  autour de  $\langle f \rangle$ , notée  $\langle f'^2 \rangle$ .

On a les propriétés suivantes :

- ✓  $\partial_t \langle f \rangle = 0$

- ✓  $\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle$

- ✓  $\langle f' \rangle = 0$

- ✓  $\langle \partial_t f \rangle = 0$ . En effet :  $\langle \partial_t f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \partial_t f(x, y, z, t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(x, y, z, T) - f(x, y, z, 0)}{T} = 0$  (si

$f(x, y, z, t)$  reste borné dans le temps).

- ✓  $\langle \partial_t f'(t) \rangle = 0$

$$\checkmark \quad \langle \partial_x f \rangle = \partial_x \langle f \rangle$$

On se restreint ici au cas où il existe effectivement un écoulement moyen permanent.

✓ On introduit alors  $\underline{U} = \langle \underline{u} \rangle$ ,  $\underline{u}'$ ,  $P = \langle p \rangle$ ,  $p'$ ,  $\theta = \langle T \rangle$  et  $T'$  tel que

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \underline{U}(x, y, z) + \underline{u}'(x, y, z, t)$$

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) + p'(x, y, z, t)$$

$$T(x, y, z, t) = \theta(x, y, z) + T'(x, y, z, t)$$

En coordonnées cartésiennes,  $\underline{U} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$  et  $\underline{u}' \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$

✓ En substituant :

$$\text{div}(\underline{U} + \underline{u}') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{U} + \underline{u}') + \text{div}[(\underline{U} + \underline{u}') \otimes (\underline{U} + \underline{u}')] = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(P + p') + \frac{1}{\rho} \text{div}(2\nu \underline{D} + 2\mu \underline{d}')$$

$$C \left( \frac{\partial}{\partial t}(\theta + T') + \text{div}[(\theta + T')(\underline{U} + \underline{u}')] \right) = 2\nu(\underline{D} + \underline{d}') : (\underline{D} + \underline{d}') + \text{div} \left[ \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}}(\theta + T') \right]$$

avec  $\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U})$  et  $\underline{d}' = \frac{1}{2}(\underline{\text{grad}} \underline{u}' + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u}')$

En développant :

$$\text{div} \underline{U} + \text{div} \underline{u}' = 0$$

$$\text{div}(\underline{U} \otimes \underline{U}) + \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \text{div}(\underline{U} \otimes \underline{u}') + \text{div}(\underline{u}' \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} P + \text{div}(2\nu \underline{D} - \underline{u}' \otimes \underline{u}') - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p' + \text{div}(2\nu \underline{d}')$$

$$C \text{div}(\theta \underline{U}) + C \left[ \frac{\partial T'}{\partial t} + \text{div}(T' \underline{U}) + \text{div}(\theta \underline{u}') \right]$$

$$= 2\nu \underline{D} : \underline{D} + 2\nu \underline{d}' : \underline{d}' + \text{div} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} \theta - C T' \underline{u}' \right) + 4\nu \underline{D} : \underline{d}' + \text{div} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} T' \right)$$

En moyennant :

$$(1) \quad \text{div} \underline{U} = 0$$

$$(2) \quad \text{div}(\underline{U} \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} P + \text{div}(2\nu \underline{D} - \underline{R})$$

$$(3) \quad C \text{div}(\theta \underline{U}) = 2\nu \underline{D} : \underline{D} + \varepsilon_T + \text{div} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} \theta - C \underline{S} \right)$$

avec  $\underline{R} = \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$ , ou encore  $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$

et  $\underline{S} = \langle T' \underline{u}' \rangle$

et  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$

En faisant la différence :

$$(4) \quad \text{div} \underline{u}' = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{U} \otimes \underline{u}') + \underline{\text{div}}(\underline{u}' \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p' + \underline{\text{div}}(2\nu \underline{d}') + \underline{\text{div}}(\underline{R} - \underline{u}' \otimes \underline{u}')$$

$$(6) \quad C \left[ \frac{\partial T'}{\partial t} + \underline{\text{div}}(T' \underline{U}) + \underline{\text{div}}(\theta \underline{u}') \right] = 4\nu \underline{D} : \underline{d}' + \underline{\text{div}} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} T' \right) + \underline{\text{div}}(C \underline{S} - C T' \underline{u}') + 2\nu (\underline{d}' : \underline{d}' - \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle)$$

Les équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6) sont fermées, en ce sens qu'elles contiennent 10 inconnues scalaires ( $\underline{U}, P, T, \underline{u}', p', T'$ ) pour 10 équations scalaires. L'approche classique de la turbulence est de ne pas considérer les équations (4), (5) et (6) pour les fluctuations, ce qui a pour conséquence que le tenseur de Reynolds  $\underline{R}$ , le vecteur  $\underline{S} = \langle T' \underline{u}' \rangle$  et le taux de dissipation turbulente  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$  deviennent des inconnues supplémentaires du problème (1), (2) et (3), les équations (1), (2) et (3) n'étant pas fermées. Le fait d'abandonner les équations (4), (5) et (6) conduit ainsi à une indétermination de la solution, qu'il faut lever d'une façon ou d'une autre. En fait, l'idée est d'oublier (4), (5) et (6) et de schématiser la turbulence pour obtenir une expression capable de relier le tenseur de Reynolds  $\underline{R}$ , le taux de dissipation turbulente  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$ , le vecteur  $\underline{S} = \langle T' \underline{u}' \rangle$  directement au mouvement et au champ de température moyens, sans utiliser (4), (5) et (6). C'est à ce stade qu'interviennent les diverses théories de la turbulence.

✓ Récapitulatif

$$\underline{\text{div}} \underline{U} = 0$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{U} \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} P + \underline{\text{div}}(2\nu \underline{D} - \underline{R})$$

$$C \underline{\text{div}}(\theta \underline{U}) = 2\nu \underline{D} : \underline{D} + \varepsilon_T + \underline{\text{div}} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} \theta - C \underline{S} \right)$$

$$\underline{R} = \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$$

$$\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$$

$$\underline{S} = \langle T' \underline{u}' \rangle$$

Il y a en tout 10 nouvelles inconnues (6 pour  $\underline{R}$ , ce tenseur étant symétrique, 1 pour  $\varepsilon_T$  et 3 pour  $\underline{S}$ )

✓ Commentaire : ces équations doivent être comparées aux équations de Navier-Stokes :

$$\underline{\text{div}} \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \underline{\text{div}}(2\nu \underline{d})$$

$$C \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\text{div}}(T \underline{u}) \right] = 2\nu \underline{d} : \underline{d} + \underline{\text{div}} \left( \frac{K}{\rho} \underline{\text{grad}} T \right)$$

## 7.2. Modélisation de la turbulence

On se restreint ici à l'hypothèse de Boussinesq.

On suppose que le frottement turbulent est proportionnel au gradient de vitesse. Ainsi, on modélise la turbulence de la façon suivante :

$$\underline{R} = -2\nu_T \underline{D} + \frac{2}{3} k1$$

avec  $k = \frac{1}{2} (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)$ . Le premier terme de l'expression de droite permet de vérifier que

$$\text{tr} \underline{\underline{R}} = 2k = \langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle$$

$$\underline{S} = -\frac{K_T}{\rho C} \underline{\underline{\text{grad}}} \theta$$

Donc :

$$\text{div} \underline{U} = 0$$

$$\text{div}(\underline{U} \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\text{grad}}} P + \text{div} \left[ 2(v + v_T) \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} k \underline{\underline{1}} \right]$$

$$C \text{div}(\theta \underline{U}) = 2v \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} + \varepsilon_T + \text{div} \left( \frac{K + K_T}{\rho} \underline{\underline{\text{grad}}} \theta \right)$$

$$\varepsilon_T = 2v \langle \underline{\underline{d}}' : \underline{\underline{d}}' \rangle$$

La dernière équation peut aussi se mettre sous la forme

$$C \text{div}(\theta \underline{U}) = 2v \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} + \varepsilon_T + \text{div} \left[ C \left( \frac{v}{\text{Pr}} + \frac{v_T}{\text{Pr}_T} \right) \underline{\underline{\text{grad}}} \theta \right]$$

$$\text{avec } \text{Pr} = \frac{\mu C}{K} \text{ et } \text{Pr}_T = \frac{\mu_T C}{K_T}$$

Il faut modéliser en tout point de l'espace  $v_T(x, y, z)$ ,  $k(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_T(x, y, z)$  et  $\text{Pr}_T(x, y, z)$ . Il n'y a plus que quatre inconnues scalaires au lieu de 10.

La turbulence agit alors comme la viscosité. Elle engraisse le coefficient de diffusion (dynamique et thermique).

### 7.3. Energie cinétique

L'équation de l'énergie cinétique est obtenue en faisant le produit scalaire de l'équation de quantité de mouvement par  $\underline{u}$  :

$$\underline{u} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{div}(\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\frac{1}{\rho} \underline{u} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} p + \underline{u} \cdot \text{div}(2v \underline{\underline{d}})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|\underline{u}|^2}{2} + \text{div} \left( \frac{|\underline{u}|^2}{2} \underline{u} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{div}(p \underline{u}) + \text{div}(2v \underline{\underline{d}} \cdot \underline{u}) - 2v \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{u} = \underline{U} + \underline{u}'$$

$$|\underline{u}|^2 = |\underline{U}|^2 + |\underline{u}'|^2 + 2\underline{U} \cdot \underline{u}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|\underline{U}|^2 + |\underline{u}'|^2 + 2\underline{U} \cdot \underline{u}'}{2} + \text{div} \left( \frac{|\underline{U}|^2 + |\underline{u}'|^2 + 2\underline{U} \cdot \underline{u}'}{2} (\underline{U} + \underline{u}') \right)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \text{div}[(P + p')(\underline{U} + \underline{u}')] + \text{div}[2v(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{d}}') \cdot (\underline{U} + \underline{u}')] - 2v(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{d}}') : (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{d}}')$$

En moyennant :

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left( \frac{|\underline{U}|^2}{2} \underline{U} + \frac{\langle \underline{u}'^2 \rangle}{2} \underline{U} \right) + \operatorname{div} \left[ \frac{\langle \underline{u}'^2 \underline{u}' \rangle}{2} + \underline{R} \cdot \underline{U} + \frac{P\underline{U}}{\rho} + \frac{\langle \underline{p}' \underline{u}' \rangle}{\rho} - 2\nu \underline{D} \cdot \underline{U} - 2\nu \langle \underline{d}' \cdot \underline{u}' \rangle \right] \\ &= -2\nu \underline{D} : \underline{D} - 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle \end{aligned}$$

Or le champ moyen est régi par :  $\operatorname{div}(\underline{U} \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{\operatorname{grad}} P + \operatorname{div}(2\nu \underline{D} - \underline{R})$

$$\text{Donc : } \underline{U} \cdot \operatorname{div}(\underline{U} \otimes \underline{U}) = -\frac{1}{\rho} \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} P + \underline{U} \cdot \operatorname{div}(2\nu \underline{D} - \underline{R})$$

$$\text{D'où : } \operatorname{div} \left( \frac{|\underline{U}|^2}{2} \underline{U} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(P\underline{U}) + \operatorname{div}[(2\nu \underline{D} - \underline{R}) \cdot \underline{U}] - (2\nu \underline{D} - \underline{R}) : \underline{D}$$

Ou encore :

$$\operatorname{div} \left( \frac{|\underline{U}|^2}{2} \underline{U} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{P\underline{U}}{\rho} - 2\nu \underline{D} \cdot \underline{U} + \underline{R} \cdot \underline{U} \right) = -P - 2\nu \underline{D} : \underline{D}$$

avec  $P = -\underline{R} : \underline{D}$

Avec l'hypothèse de Boussinesq :  $P = -\underline{R} : \underline{D} = 2\nu_T \underline{D} : \underline{D}$ .

Ce terme est positif.

Donc :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\langle \underline{u}'^2 \rangle}{2} \underline{U} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{\langle \underline{u}'^2 \underline{u}' \rangle}{2} + \frac{\langle \underline{p}' \underline{u}' \rangle}{\rho} - 2\nu \langle \underline{d}' \cdot \underline{u}' \rangle \right) = P - \varepsilon_T$$

avec  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$ .

#### 7.4. Bilan énergétique

Récapitulatif :

$$(1) \operatorname{div} \left( \frac{|\underline{U}|^2}{2} \underline{U} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{P\underline{U}}{\rho} - 2\nu \underline{D} \cdot \underline{U} + \underline{R} \cdot \underline{U} \right) = -P - 2\nu \underline{D} : \underline{D}$$

$$(2) \operatorname{div}(C\theta \underline{U}) + \operatorname{div} \left[ -C \left( \frac{\nu}{\operatorname{Pr}} + \frac{\nu_T}{\operatorname{Pr}_T} \right) \underline{\operatorname{grad}} \theta \right] = 2\nu \underline{D} : \underline{D} + \varepsilon_T$$

$$(3) \operatorname{div} \left( \frac{\langle \underline{u}'^2 \rangle}{2} \underline{U} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{\langle \underline{u}'^2 \underline{u}' \rangle}{2} + \frac{\langle \underline{p}' \underline{u}' \rangle}{\rho} - 2\nu \langle \underline{d}' \cdot \underline{u}' \rangle \right) = P - \varepsilon_T$$

avec :  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{d}' : \underline{d}' \rangle$  et  $P = -\underline{R} : \underline{D} = 2\nu_T \underline{D} : \underline{D}$

L'énergie du champ de base :

- est dissipée en chaleur par le terme  $2\nu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$  présent dans les équations (1) et (2)
- est transférée à la partie turbulente par le terme  $P = -\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{D}} = 2\nu_T \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$  présent dans les équations (1) et (3)

L'énergie du champ turbulent :

- provient du champ moyen : terme  $P = -\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{D}} = 2\nu_T \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$  présent dans les équations (1) et (3)
- est dissipée en chaleur : terme  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{\underline{d}}' : \underline{\underline{d}}' \rangle$  présent dans les équations (2) et (3)

L'énergie dégagée sous forme de chaleur :

- provient du champ fluctuant : terme  $\varepsilon_T = 2\nu \langle \underline{\underline{d}}' : \underline{\underline{d}}' \rangle$  présent dans les équations (2) et (3)
- provient du champ moyen : terme  $2\nu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$  présent dans les équations (1) et (2)