Chute de la fusée

Mes vifs remerciements à Bernard de GoMars qui m'a inspiré ces calculs et a patiemment traqué mes étourderies de calculs et mes fautes de frappes.

Il s'est aussi assuré que les résultats étaient compatibles avec ceux donnés par son simulateur.

Ces calculs sont un complément de l'annexe "C. Détail du calcul des performances analogiques" du texte de l'ANSTJ :
"Le vol de la fusée - Stabilité et performance" (pages 55 à 57)

Il pourrait même s'intituler "C.3. Phase de chute balistique"

I) Expression de la vitesse en fonction du temps

Référentiel : terrestre ($z = 0$ à $t = t_o = 0$, orienté positivement vers le bas)

Système : la fusée

Forces appliquées : - le poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

- la résistance de l'air : $\vec{R} = - K \cdot v^2 \cdot \dfrac{\vec{v}}{v}$

($\dfrac{\vec{v}}{v}$ sert juste à créer un vecteur unitaire de même sens et direction que $\vec{v}$)

Relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$ (noté dans le temps : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$)

Ce qui donne, en projection sur l'axe des z :

$$m \cdot g - K \cdot v^2 = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

soit :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m} \cdot v^2$$

$\downarrow$ on pose $b = \dfrac{K}{m}$

$$\frac{dv}{dt} = g - b \cdot v^2$$

D'où (voir remarque 1) :

$$\frac{dv}{g - b \cdot v^2} = dt$$

Il "suffit" maintenant d'intégrer entre t_o et t ...

$$\int_{v_o}^{v} \frac{1}{g - b \cdot v^2} \cdot dv = \int_{t_o}^{t} dt$$

(là aussi les profs de math ont des sueurs froides (voir remarque 2 à la fin de ce texte))

"quelques" lignes de calculs, qui sont très semblables au C.1. du "vol de la fusée", le lecteur peut passer directement à la fin si il trouve le développement trop mathématique.

Les étapes de calculs sont un peu plus détaillées que dans le "vol de la fusée".

$$\frac{1}{b} \cdot \int_{v_o}^{v} \frac{1}{\frac{g}{b} - v^2} \cdot dv = \int_{t_o}^{t} dt$$

$\downarrow$ on "sait" que : $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot a} \ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + \text{constante}$

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{g}{b}}} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{b}} + v}{\sqrt{\frac{g}{b}} - v} \right) \right]_{v_o}^{v} = [t]_{t_o}^{t}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{g \cdot b}} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{b}} + v}{\sqrt{\frac{g}{b}} - v} \right) \right]_{v_o}^{v} = [t]_{t_o}^{t}$$

Si $t_o = 0$ et $v_o = 0$ alors :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{b}} + v}{\sqrt{\frac{g}{b}} - v}\right) = 2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t$$

$\downarrow$ on prend l exponentielle des deux membres et $e^{\ln x} = x$

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{b}} + v}{\sqrt{\frac{g}{b}} - v} = e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t}$$

$$\sqrt{\frac{g}{b}} + v = \left(\sqrt{\frac{g}{b}} - v\right) \cdot e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t}$$

$$v \cdot e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t} + v = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t} - \sqrt{\frac{g}{b}}$$

$$v \cdot (e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1) = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot (e^{2 \cdot \sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1)$$

Et, finalement :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1}}$$

<u>Remarque</u> : quand $t \rightarrow \infty$ alors $\frac{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1} \rightarrow 1$

donc : $v \rightarrow \sqrt{\frac{g}{b}}$ qui est la vitesse maximale ou vitesse stationnaire.

deux choses : - on retrouve (facilement) ce résultat en posant a = 0 (a : l'accélération) ce qui est rassurant sur la validité du calcul.

- on peut définir $\frac{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1}$ qui est le taux de stationnarité (il varie entre 0 et 1 quand t augmente)

Si on multiplie ce taux par 100 on obtient le pourcentage de la vitesse maximale que l'on a atteint.

II) Expression de l'altitude en fonction du temps

On sait que :

$$v = \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad dz = v \cdot dt$$

Encore une fois ... il "suffit" d'intégrer entre t_o et t ...

$$\int_{z_o}^{z} dz = \int_{t_o}^{t} v \cdot dt$$

"quelques" lignes de calculs, qui sont très semblables au C.1. du vol de la fusée :

$$\int_{z_o}^{z} dz = \int_{t_o}^{t} \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1} \cdot dt$$

$$\int_{z_o}^{z} dz = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \int_{t_o}^{t} \frac{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + 1} \cdot dt$$

$$\downarrow \quad e^{2.x} = e^x \cdot e^x$$

$$\int_{z_o}^{z} dz = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \int_{t_o}^{t} \frac{e^{\sqrt{g.b} \cdot t} \cdot e^{\sqrt{g.b} \cdot t} - 1}{e^{\sqrt{g.b} \cdot t} \cdot e^{\sqrt{g.b} \cdot t} + 1} \cdot dt$$

$\downarrow$ on multiplie chaque terme par : $e^{-\sqrt{g \cdot b} \cdot t}$

$$\downarrow \quad e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$$

$$\int_{z_o}^{z} dz = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \int_{t_o}^{t} \frac{e^{\sqrt{g.b} \cdot t} - e^{-\sqrt{g.b} \cdot t}}{e^{\sqrt{g.b} \cdot t} + e^{-\sqrt{g.b} \cdot t}} \cdot dt$$

$\downarrow$ on divise et on multiplie par: $\sqrt{g \cdot b}$

$$\int_{z_o}^{z} dz = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g \cdot b}} \int_{t_o}^{t} \frac{\sqrt{g \cdot b} \cdot \left(e^{\sqrt{g.b} \cdot t} - e^{-\sqrt{g.b} \cdot t}\right)}{e^{\sqrt{g.b} \cdot t} + e^{-\sqrt{g.b} \cdot t}} \cdot dt$$

$\downarrow$ tout ça pour faire apparaitre une forme du type $\frac{f'}{f}$

$\downarrow$ car $(e^u)' = u' \cdot e^u$

$\downarrow$ et la primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln(f)$

$$[z]_{z_o}^{z} = \frac{1}{b} \cdot \left[\ln\left(e^{\sqrt{g.b} \cdot t} + e^{-\sqrt{g.b} \cdot t}\right)\right]_{t_o}^{t}$$

$$\downarrow \quad t_o = 0 \text{ et } z_0 = 0$$

Et, finalement :

$$\boxed{z = \frac{1}{b} \cdot \ln\left(\frac{e^{\sqrt{g \cdot b} \cdot t} + e^{-\sqrt{g \cdot b} \cdot t}}{2}\right)}$$

(voir remarque 3)

Si on a pu par ailleurs déterminer b, la mesure du temps de chute (à la vidéo par exemple) permet de calculer l'altitude maximale atteinte.

III) Expression de t_c

L'expression précédente permet de tirer t_c (**t**emps de **c**hute) si on connaît z (la hauteur de chute) et b = K/M :

$$e^{zb} = \frac{e^{\sqrt{g\,.\,b}\,.\,t} + e^{-\sqrt{g\,.\,b}\,.\,t}}{2}$$

$\downarrow$ on sait que: $ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$$e^{zb} = ch(\sqrt{g\,.\,b}\,.\,t)$$

$\downarrow$ on sait que: $Arg\,ch(ch(x)) = x$

$\downarrow$ et que : $Arg\,ch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

D'où :

$$\boxed{t_c = \frac{1}{\sqrt{g\,.\,b}}\,.\,\ln\left(e^{z\,.\,b} + \sqrt{e^{2\,.\,z\,.\,b} - 1}\right)}$$

IV) Expression simplifiée de t_c

Si (z . b) est assez grand (en gros (z . b) > 2,5) alors :

$$e^{2\,.\,z\,.\,b} - 1 \approx e^{2\,.\,z\,.\,b}$$

Soit :

$$\sqrt{e^{2\,.\,z\,.\,b} - 1} \approx \sqrt{e^{2\,.\,z\,.\,b}} \approx e^{z\,.\,b}$$

Ce qui donne dans l'expression du t_c :

$$t_c \approx \frac{1}{\sqrt{g\,.\,b}}\,.\,\ln(e^{z\,.b} + e^{z\,.b})$$

$$t_c \approx \frac{1}{\sqrt{g\,.\,b}}\,.\,\ln(2\,.\,e^{z\,.b})$$

$$\boxed{t_c \approx \frac{(z\,.\,b) + \ln 2}{\sqrt{g\,.\,b}}}$$

Ceci est une expression simplifiée du t_{ras} valable si (z . b) > 2,5.

<u>Remarque</u> : - si (z.b) = 2,5 l'erreur sur t_c est de l'ordre de 0,05 %
- si (z.b) = 2,3 l'erreur sur t_c est de l'ordre de 0,1 %
- si (z.b) = 1,3 l'erreur sur t_c est de l'ordre de 1 %

V) Mesure de b

b reste un problème, il faut le déterminer expérimentalement.

De l'expression simplifiée de t_c on tire :

$$t_c = \frac{(z\ .\ b)}{\sqrt{g\ .\ b}} + \frac{\ln 2}{\sqrt{g\ .\ b}}$$

$$t_c = \frac{z}{\sqrt{g}}\ .\ \sqrt{b} + \frac{\ln 2}{\sqrt{g}}\ .\ \frac{1}{\sqrt{b}}$$

↓ on élève les deux menbres au carré

↓ et : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$

$$t_c^2 = \frac{z^2}{g}\ .\ b + \frac{(\ln 2)^2}{g}\ .\ \frac{1}{b} + \frac{2\ .\ z\ .\ \ln 2}{g}$$

↓ on multiplie tous les termes par b

$$g\ .\ b\ .\ t_c^2 = z^2\ .\ b^2 + (\ln 2)^2 + 2\ .\ z\ .\ \ln 2\ .\ b$$

Soit :

$$z^2\ .\ b^2 + + (2\ .\ z\ .\ \ln 2 - g\ .\ t_c^2)\ .\ b + (\ln 2)^2 = 0$$

Il "ne reste plus qu'à" trouver un endroit assez haut pour lâcher la fusée et mesurer t_c. ... puis résoudre cette équation du second degré.

Remarque : toute équation du second degré ayant 2 solutions, il faudra en éliminer une.

Attention : la valeur de b étant obtenue par une approximation, on ne manquera pas de vérifier à la fin du calcul que l'on a bien (z . b) > 2,5 (ou moins si l'on est prêt à accepter une erreur plus grande).

On avait posé : $b = \frac{K}{m}$ et $K = \frac{1}{2}\ .\ \rho\ .\ SCx$

D'où : $$SCx = \frac{2\ .\ m\ .\ b}{\rho}$$

où :
- m est la masse à vide de la fusée (en kg)
- b a la valeur déterminée ci-dessus (en m^{-1})
- ρ est la masse volumique de l'air (en $kg.m^{-3}$)
- SCx en m^2

Si on divise SCx par S on obtient le Cx. Cette opération peut être utile si on utilise un simulateur qui demande le Cx en tant que donnée. Elle permet aussi de se faire une idée de l'efficacité de la forme choisie, plus le Cx baisse et plus c'est efficace.

Néanmoins, il faut garder à l'esprit que c'est le SCx qui intervient et que dans certains cas il peut être stupide de diviser par S pour multiplier par S après !
Sans compter que la détermination de S n'est pas forcément évidente.

VI) C'est quoi ce b ?

Bernard de GoMars m'a fait remarquer que le b était autrefois appelé coefficient balistique, son unité étant le m^{-1}.

Son inverse est donc homogène à une distance que nous appellerons distance balistique.

A quoi correspond cette distance ?

Quand la fusée à parcouru cette distance (1/b), elle atteint 93% de sa vitesse maximale.

Démonstration :

On part de la formule du t_C :

$$t_c = \frac{1}{\sqrt{g\ .\ b}}\ .\ \ln\left(e^{z\ .\ b} + \sqrt{e^{2\ .\ z\ .\ b} - 1}\right)$$

On pose z = 1/b :

$$t = \frac{1}{\sqrt{g\ .\ b}}\ .\ \ln\left(e^{\frac{1}{b}\ .\ b} + \sqrt{e^{2\ .\ \frac{1}{b}\ .\ b} - 1}\right)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g\ .\ b}}\ .\ \ln\left(e^{1} + \sqrt{e^{2} - 1}\right)$$

soit :

$$\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t = \ln\left(e^{1} + \sqrt{e^{2} - 1}\right) = 1,657454454$$

le taux de stationnarité est :

$$\frac{e^{2\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t} - 1}{e^{2\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t} + 1} = \frac{e^{2\ .\ 1,657454454} - 1}{e^{2\ .\ 1,657454454} + 1} = 0,92987 \approx 93\%$$

Plus intéressant :

Pour z = 2/b on trouve :

$$\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t = \ln\left(e^{2} + \sqrt{e^{4} - 1}\right) = 2,688536497$$

Et le taux de stationnarité est :

$$\frac{e^{2\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t} - 1}{e^{2\sqrt{g\ .\ b}\ .\ t} + 1} = 0,9908 \approx 99\%$$

A moins de 1 % prés on a la vitesse maximale.

Ceci nous permet de proposer une méthode simplifiée pour mesurer b puis le Cx (en réalité c'est une idée de Bernard de GoMars).

VII) Méthode "simplifiée" de mesure du Cx

Si vous n'avez rien compris de ce qui précède mais que vous savez utiliser une calculatrice scientifique (ou un tableur) vous pouvez quand même appliquer la méthode suivante. Il faut aussi une caméra vidéo.

1) Filmez le vol d'une fusée, en particulier toute la chute.

2) Juste avant le retour au sol, mesurer la distance parcourue par la fusée (d) pendant une durée t. Le temps t est déterminé par l'écart entre deux images.

Pour trouver d, ce sera plus dur, plusieurs méthodes :

- utiliser un objet en arrière plan ... mais attention aux erreurs de perspective.
- filmer, après le crash, une personne qui porte un objet étalon (mat de planche à voile possédant une marque tous les mètres) sur le lieu du crash. Attention, la caméra ne doit pas changer de position ni de focale (ne pas "zoomer")
- utiliser la longueur de la fusée comme référence (si l'image est assez nette).

3) Après c'est juste du calcul :

$$v = \frac{d}{t}$$ d en m et t en s

4) La vitesse étant considérée comme stabilisée, on a :

$$v = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

d'où :

$$b = \frac{g}{v^2} = \frac{9,81}{v^2}$$ noter la valeur de b (elle sert après)

5) On avait posé : $b = \frac{K}{m}$ et $K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot Cx$

D'où : $$Cx = \frac{2 \cdot m \cdot b}{S \cdot \rho}$$

où :
- m est la masse à vide de la fusée (en kg)
- b a la valeur déterminée ci-dessus (en m^{-1})
- ρ est la masse volumique de l'air (en $kg.m^{-3}$)
- S est le maître couple (en m^2)

6) Sur la vidéo on mesure le temps de chute (t_c) et avec la formule suivante on calcule la hauteur de chute (z).

$$z = \frac{1}{b} \cdot \ln\left(\frac{e^{\sqrt{g \cdot b} \cdot t_c} + e^{-\sqrt{g \cdot b} \cdot t_c}}{2}\right)$$

On doit avoir z > 2/b pour valider le calcul.

Au passage on a aussi calculé l'altitude maximale atteinte !

<u>Note</u> : Pour calculer ρ on peut utiliser la formule :

$$\rho = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}$$

où :
- M est la "masse molaire de l'air", 29.10^{-3} $kg.mol^{-1}$
- p est la pression en pascal, $1,013.10^5$ Pa
- R est la constante des gaz parfaits, 8,314 $J.mol^{-1}.K^{-1}$
- T la température en K, la température en °C + 273,15

Soit :

$$\rho = \frac{29.10^{-3} \cdot 1,013.10^5}{8,314 \cdot (273,15 + \theta)}$$

où θ est la température en °C

A titre d'exemple on trouve 1,205 $kg.m^{-3}$ à 20°C et 1,293 $kg.m^{-3}$ à 0°C.

Il est possible de changer p en fonction des données météo locales.

Remarques

Remarque 1 :

En mathématiques, on a tendance à considérer que la dérivée est une opération que l'on effectue sur une variable ou une fonction et on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x)$$

En physique (ou en chimie) on dit que si dt est suffisamment petit alors on peut revenir à la définition de base de la dérivée, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = dx \cdot \frac{1}{dt}$$

Ceci, directement ... la rigueur mathématique imposerait que l'on vérifie que la fonction est continue et deux fois dérivable. Mais comme en physique les fonctions sont toujours continues et dérivables (enfin on l'espère), il n'y a pas de problèmes (enfin on l'espère (bis)).

Remarque 2 :

Il y a dans le texte des expressions du type : $\int_{z_o}^{z} dz = \int_{t_o}^{t} v \cdot dt$.

Il est strictement interdit d'écrire ce genre de choses en mathématiques, une borne et la variable ne pouvant être identiques ... en physique on prend parfois quelques libertés, ce qui permet d'alléger un peu l'écriture !

Remarque 3 :

Pour les expressions de v et de z, on retrouve les mêmes résultats que dans le C.1. du vol de la fusée avec :

$a = g$ au lieu de $a = \frac{P}{m} - g$

$\alpha = 1$ au lieu de $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot v_o}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot v_o}$ (vient de $v_o = 0$)

$t_o = 0$

$h_o = 0$