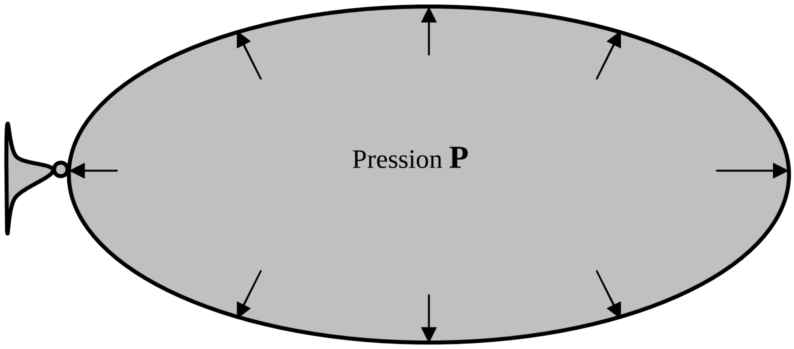
LA PARTIE CACHÉE DE LA FORCE

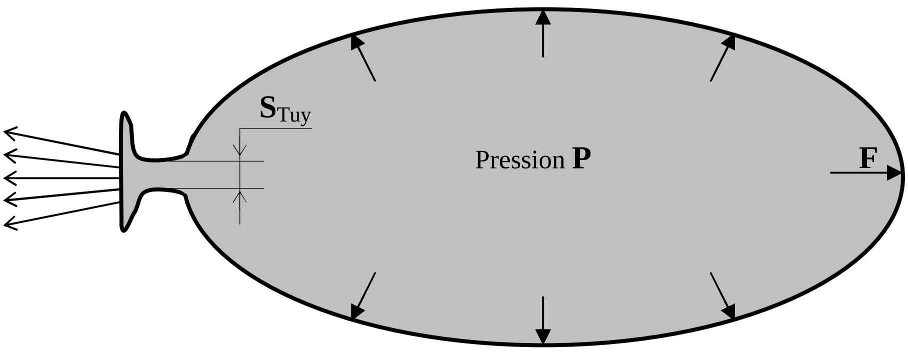
Voici une version brouillonne
datée du 17/11/08
de ce qui sera ce texte
Aidez-nous de vos remarques…

Lorsque l'on explique le principe de Réaction qui propulse nos fusées depuis le sol jusqu'à l'Espace, on fait souvent appel au dessin qui montre les forces de pression s'exerçant à l'intérieur de l'enveloppe d'un ballon de baudruche gonflé et noué :



On fait alors remarquer que l'ensemble de ces forces de pressions s'annule, deux à deux ou quatre à quatre. C'est ce qui explique qu'un ballon gonflé et noué peut être posé sur une table sans manifester de tendance à se déplacer.

Puis on dénoue par la pensée le ballon de baudruche : son embouchure s'en trouve ouverte, ce qui constitue une tuyère, par laquelle l'air tend à être expulsé :



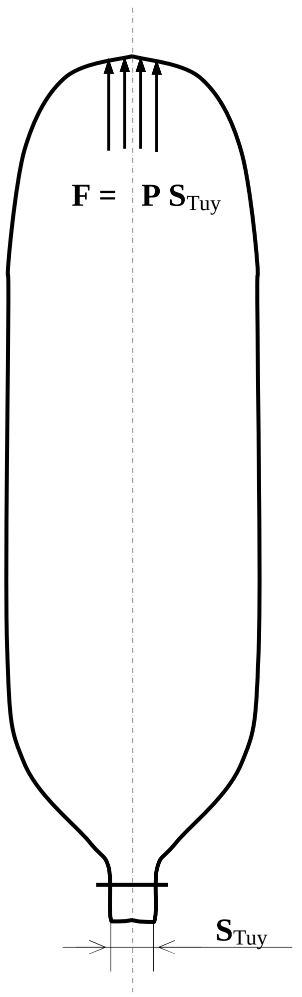
La force de pression **F**, s'exerçant du côté opposé à la tuyère, n'est plus équilibrée par la force qui s'exerçait sur l'aire de l'embouchure lorsque celle-ci était nouée.

La force qui naît de ce déséquilibre est facilement calculable : c'est $\mathbf{P}\,\mathbf{S}_{\mathrm{Tuy}}$, du moins si l'on nomme **P** la Pression Interne au ballon et $\mathbf{S}_{\mathrm{Tuy}}$ la section de la tuyère.

On en tire la conclusion que le ballon est propulsé par la force de Réaction :

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{S}_{\mathrm{Tuy}}}$$

Ainsi explique-t-on souvent le principe de la Réaction, par ce raisonnement qu'on pourrait nommer *du déséquilibre des forces internes*.



Mesurée à cette aune, la force de Réaction qui propulse une fusée à eau est également :

$\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{S}_{\mathrm{Tuy}}$:

De fait, lorsque l'on lance une fusée à eau *sèche* (c-à-d sans emport d'eau), on peut très bien assimiler la fusée à air au ballon de baudruche.

Et lorsque l'on charge la même fusée d'une certaine masse d'eau, dans la mesure où l'on peut dire qu'il n'existe pas à l'endroit du goulot de surface matérielle où puisse s'appliquer la pression interne de la fusée, on peut également penser qu'existe le même déséquilibre entre les forces internes et que la force de Réaction qui en résulte vaut :

$\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{S}_{\mathrm{Tuy}}$.

Or, lorsque l'on étudie la Réaction par une autre voie, une voie *externe* cette fois-ci, celle de la conservation des Quantités de Mouvements, on trouve pour la force de Réaction de la même fusée à eau (ou à air) :

$$\boxed{\mathbf{F = q\ V}_{\text{éject}}}$$

avec :

q le débit massique (en **Kg/s**) de la Masse d'Appui, c-à-d l'eau ou l'air,

et $\mathbf{V}_{\text{éject}}$ la vitesse d'éjection (en **m/s**) de cette Masse d'Appui.

Cette formule est extrêmement simple, mais pourtant ne nous méprenons pas : <u>c'est bien celle qu'utilisent les ingénieurs</u>, qu'ils conçoivent des moteurs de vaisseaux spatiaux thermochimiques (à poudre ou à ergols liquides) ou *à plasma* [1] ! [2]

À titre d'exemple, si l'on applique cette formule au premier étage de la fusée lunaire Saturne V qui consommait 2085 tonnes d'ergols en 150 secondes (soit un débit moyen de 13,9 t/s), l'éjection de toute cette masse se faisant à 2700 m/s, on trouve une poussée de :

13900 Kg/s x 2700 m/s = 37,53 10^6 N

…chiffre qui doit être comparé avec la poussée annoncée de **3402 Tonnes-force**, soit **33,37 10^6 N** : on est bien dans le même ordre de grandeur. La différence étant imputable à l'imprécision de nos données.

Mais revenons à nos fusées à eau…

À ces engins à réaction *froide*, la formule $\mathbf{F = q\ V}_{\text{éject}}$ est également applicable [3]. Mais que vaut alors le débit massique **q** qui y figure ?

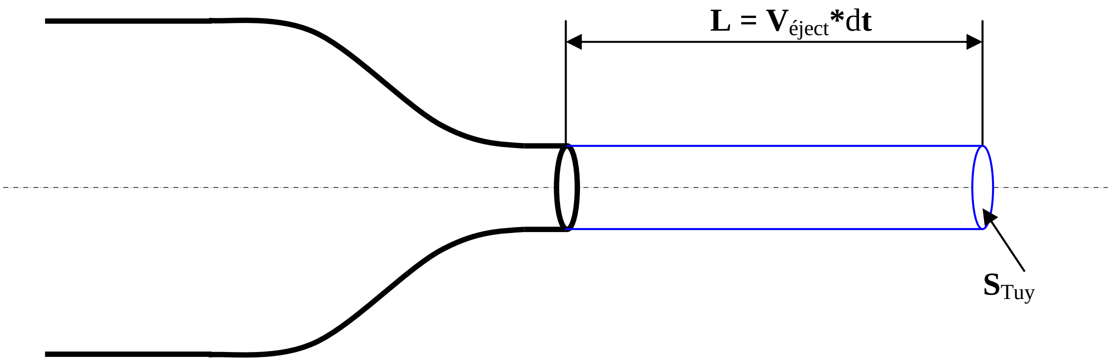
---

[1] … ces derniers moteurs étant encore appelés *ioniques*.

[2] Les ingénieurs complètent juste cette formule d'un terme additif lorsque les gaz propulsifs, à leur sortie de la tuyère, possèdent encore de la pression relativement au milieu ambiant (l'atmosphère ou le vide de l'espace) ; ce terme est : $+ (\mathbf{P}_{\text{sortie}} - \mathbf{P}_{\text{ambiante}})\ \mathbf{S}_{\text{Tuy}}$, si l'on appelle $\mathbf{P}_{\text{sortie}}$ la pression des gaz à la sortie de la tuyère et $\mathbf{P}_{\text{ambiante}}$ la Pression régnant autour de la fusée.

[3] …et là sans aucun additif puisque la pression de la matière éjectée est celle du milieu ambiant…

Reprenons, pour appuyer notre réflexion, le schéma de notre texte La Propulsion de la Fusée à Eau :



Et livrons-nous au travail consistant à isoler, par la pensée, l'eau éjectée par la tuyère durant un temps élémentaire de d**t** seconde.

Cette eau se présente sous la forme d'un gros spaghetti liquide, un cylindre d'eau *extrudé* [4] par la tuyère [5] :

Si $\mathbf{V}_{\acute{e}ject}$ est la vitesse d'éjection de l'eau, la longueur du spaghetti éjecté pendant cette durée d**t** est :

$\mathbf{L} = \mathbf{V}_{\acute{e}ject}*d\mathbf{t}$.

Et son volume est $\mathbf{L}*\mathbf{S}_{Tuy}$, soit $\mathbf{V}_{\acute{e}ject}*d\mathbf{t}*\mathbf{S}_{Tuy}$.

La masse éjectée, quant à elle, est, bien-sûr : $\rho\mathbf{V}_{\acute{e}ject}*d\mathbf{t}*\mathbf{S}_{Tuy}$ …

Pour connaître le Débit Massique **q** en **Kg/s**, il faut diviser cette masse par le temps d**t** pendant lequel elle a été éjectée. Ce Débit Massique est donc :

$\mathbf{q} = \rho\mathbf{V}_{\acute{e}ject}\ \mathbf{S}_{Tuy}$

L'utilisation de cette valeur du Débit Massique dans la formulation de la Force de Propulsion, à savoir : $\mathbf{F} = \mathbf{q}\ \mathbf{V}_{\acute{e}ject}$, donne :

$$\boxed{\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}_{\acute{e}ject}^{2}\ \mathbf{S}_{Tuy}}$$

[4] *Extrudé* est bien le terme technique. Les spaghettis sont bien formés par *extrusion*, comme les profilés d'aluminium…

[5] Que l'eau éjectée se présente sous une autre forme (en particulier une forme moins *mathématique*) ne change en rien son volume…

(nous encadrons cette expression parce qu'elle est fondamentale dans la science des fusées)

D'un autre côté, la loi de la Conservation de l'Énergie des particules d'un fluide incompressible (ici l'eau) [6] conduit à la valeur de sa vitesse d'éjection en fonction de la pression à laquelle il est soumis.

Si l'on admet, comme nous l'avons posé, que la fusée est fixe [7] , on donne souvent pour simplifier à cette vitesse d'éjection la valeur :

$$\sqrt{\frac{\mathbf{2P}}{\boldsymbol{\rho}}}$$

… **P** étant la pression de ce fluide à sa surface libre (c-à-d la pression de l'air dans la bouteille).

Mais la vraie valeur de cette vitesse d'éjection, si l'on ne prend pas en compte l'effet de la gravité et de l'accélération sur les particules d'eau, est :

$$\mathbf{V}_{\text{éject}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2P}}{\boldsymbol{\rho}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}{}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}{}^{\mathbf{4}}}\right]}}$$

…ceci du fait que la surface libre de l'eau n'est pas fixe mais qu'elle est également dotée d'une vitesse vers le bas (voir à ce sujet le texte d'Alain Juge cité dans nos liens bibliographiques).

Dans l'équation ci-dessus $\mathbf{D}_{\text{Tuy}}$ représente l'aire de la tuyère et $\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}$ l'aire de la surface libre de l'eau à l'instant considéré ; cette aire n'est constante que lorsque le surface libre de l'eau se situe dans une portion cylindrique de la bouteille ; pour certaines fusées, ceci est vrai une bonne partie du temps, mais pour des fusées à la silhouette tintinoïde, ce n'est pas vrai. [8]

Pour cette raison, nous allons donc **limiter la présente étude à la propulsion des fusées durant la phase où la surface libre de l'eau se situe encore dans la portion cylindrique de leur réservoir** (cela veut dire que cette étude ne traitera pas de la phase pendant laquelle la surface libre de l'eau est dans la partie de forme globalement conique qui précède le goulot).

[6] loi dégagée par Daniel Bernoulli ; cette loi impose la conservation de l'énergie totale du fluide, à savoir $\mathbf{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^2$.

[7] …c-à-d que l'eau présente au-dessus de la tuyère n'est l'objet d'aucune pression additionnelle du fait de l'accélération de la fusée, cette accélération créant en réalité un surcroît de pression de l'ordre de **15 %**, voir à ce propos notre texte déjà évoqué.

[8] Notons d'ailleurs que cette formulation de la Vitesse d'Éjection n'est pas admissible lorsque le diamètre de la surface libre s'approche trop de celui de la tuyère : il faut alors passer à un calcul de la Poussée en *Instationnaire*. Voir à ce sujet notre texte MONTÉE EN VITESSE D'ÉJECTION D'UNE FUSÉE À EAU…

Sur une fusée ordinaire de **1,5 L**, le diamètre de la tuyère par rapport à celui de la bouteille fait que la différence entre les deux expressions précédentes de $\mathbf{V}_{\text{éject}}$ est de l'ordre de **2,5 millièmes**. C'est peu, mais il ne coûte pas grand-chose de prendre la bonne expression.

Nous avons affirmé à l'instant ne pas prendre en compte l'effet que pouvait produire l'accélération de la pesanteur sur ce qu'il est convenu d'appeler *la hauteur de la colonne d'eau* au dessus de la tuyère.

Paradoxalement, puisqu'une fusée en vol est abandonnée à la gravité, cette gravité est sans effet sur le mouvement de ses fluides internes [9] ; donc la gravité n'a pas d'action sur sa *colonne d'eau*.

Par contre, une autre accélération, celle de la fusée (et l'on sait que les fusées accélèrent énormément) agit de façon significative sur la colonne d'eau au-dessus de la tuyère.

C'est pourquoi **<u>nous limiterons également cette étude à l'étude des forces internes et externes sur une fusée à eau maintenue au banc d'essais fixe dans une région du monde non soumise à la gravité.</u>** [10]

Ces limites fixées, nous pouvons revenir vers notre fusée à eau. Le carré de sa Vitesse d'Éjection est :

$$\mathbf{V}_{\text{éject}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2P}}{\boldsymbol{\rho}\left[\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{4}}}\right]}$$

Le simple report de cette vitesse dans notre formulation de la Force de Propulsion $\mathbf{F} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{V}_{\text{éject}}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{S}_{\text{Tuy}}$ conduit à :

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{2\,P\,S}_{\text{Tuy}}\ \frac{\mathbf{1}}{\left[\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{4}}}\right]}}$$

qui est la force de Réaction propulsant une fusée à eau,
P étant la pression de l'air comprimé
et $\mathbf{S}_{\text{Tuy}}$ l'aire de la tuyère d'éjection

[9] De fait, lorsque les moteurs du premier étage s'éteignent, les ergols du deuxième étage se trouvent dans un état proche de l'apesanteur et manifestent une dangereuse tendance à se regrouper en boule au milieu de leurs réservoirs, échappant ainsi à l'action des pompes censées les mettre en présence dans la chambre de combustion…

[10] Ainsi que nous l'avons dit, la pesanteur n'agit pas lorsque la fusée est en vol. Mais elle agit sur une fusée au banc d'essais. C'est pourquoi nous devons nous transporter de la sorte dans une région de l'Univers suffisamment à l'écart de tout champ gravitationnel.

Si l'on considère que le terme fractionnaire n'introduit qu'une correction de l'ordre de **2,5 millièmes** dans les cas usuels de fusées de **1,5 L**, on peut donc mémoriser, pour la Force de Poussée des fusées à eau, la valeur :

$$\boxed{\mathbf{F = 2\,P\,S_{Tuy}}}$$

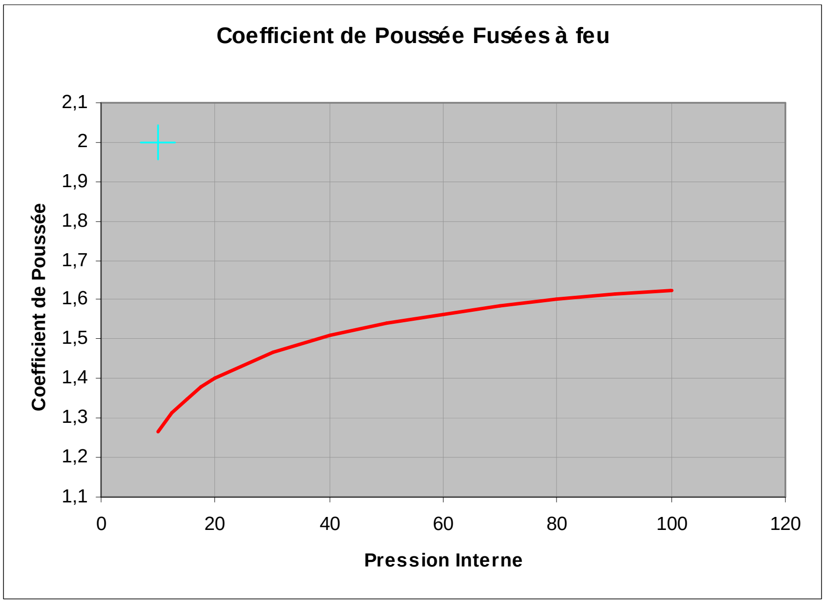
qui est la valeur simplifiée de la force de Réaction propulsant une fusée à eau,
P étant la pression de l'air comprimé
et $\mathbf{S}_{Tuy}$ l'aire de la tuyère d'éjection

Nous constatons donc un doublement de la force de propulsion par rapport à la formulation dégagée par le *raisonnement du déséquilibre des forces internes* de pression !

Il n'y a d'ailleurs pas que pour la fusée à eau que la force de propulsion est ainsi supérieure au simple produit de la pression interne par la section de la tuyère. Les constructeurs de moteurs de fusées thermochimiques utilisent ainsi un coefficient qu'ils appellent *Coefficient de Poussée* ; ce coefficient pondère le produit $\mathbf{P\,S}_{Tuy}$ pour donner la poussée des moteurs (**P** étant la pression régnant dans la chambre de combustion du moteur).

L'existence de ce vocable de *Coefficient de Poussée* nous met à l'aise : nous allons en faire usage également pour nos fusées à eau : nous le symboliserons par $\mathbf{C}_f$. Dans ce cas des fusées à eau, nous l'avons vu, la valeur théorique de ce $\mathbf{C}_f$ est **2**.

Dans le cas des fusées à feu (thermochimique) ce Coefficient de Poussée est plus faible. Il évolue en fonction de la pression interne du moteur, selon la loi théorique suivante :



Ceci pour la théorie ; dans la pratique, le Coefficient de Poussée est un peu plus faible de quelque **5 %** pour les fusées professionnelles.

Nous nous sommes permis de porter sur ce graphe le Coefficient de Poussée des fusées à eau, sans le pondérer non plus d'un quelconque rendement [11] : nous le prenons ici comme égal à **2**, bien que nous possédions toujours deux valeurs pour ce Coefficient de Poussée des fusées à eau : **2** et **1** …

Ce genre de situation (une dissonance entre les conclusions de deux raisonnements) n'est pas acceptable en science physique. On doit donc admettre que, s'agissant des fusées à eau, l'un des deux raisonnements que nous avons mis en œuvre est erroné…

J'ai cherché longtemps ce qu'il pouvait y avoir de faux dans le *raisonnement du déséquilibre des forces de pression internes*. Sans rien trouver…

Jusqu'au moment où m'est venu une idée : ce raisonnement est exact, mais il ne rend pas compte de <u>toute</u> la réalité des choses !

En effet, le raisonnement du *déséquilibre des forces internes* tel qu'il est pratiqué généralement laisse de côté un autre déséquilibre des pressions sur les parois du réservoir :

Dans le cas des fusées à eau, lorsque les particules de liquide s'écoulent vers la tuyère, elles acquièrent de la vitesse. Et cette vitesse, en application de la loi de Bernoulli, diminue leur pression ; ceci jusqu'à ce que cette pression soit égale, à la tuyère, à la Pression Atmosphérique (c'est-à-dire que leur Pression relative sera divisée par **5** ou par **10** !)…

Nous venons d'écrire que <u>la pression de l'eau diminue continuellement sur son trajet menant à la tuyère</u>, pour atteindre la pression Atmosphérique à cette tuyère.

Dire ceci n'est pas rien, car cette diminution de pression va sérieusement modifier l'équilibre des forces interne du réservoir :

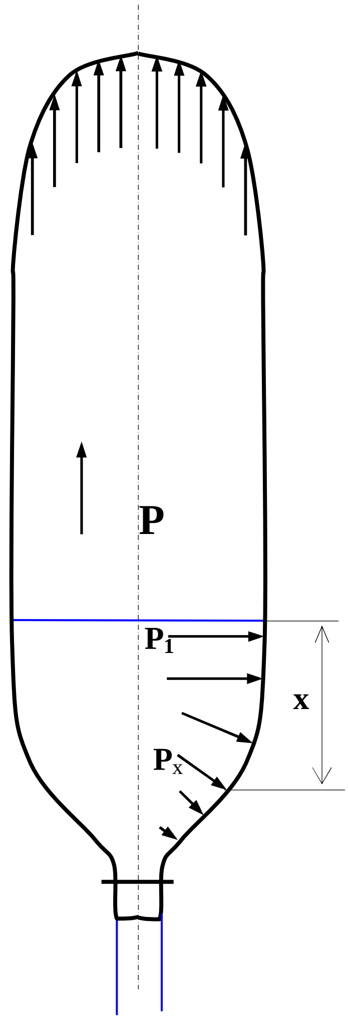
→d'un côté du réservoir (côté *fond*) la pression est celle de l'air comprimé ;

→alors que de l'autre côté, sur la partie du réservoir qui converge vers la tuyère (prenons l'habitude d'appeler cette partie le *convergent*) la pression diminue graduellement pour arriver à la pression ambiante (5 ou 10 fois plus faible que la pression interne)…

Observons plus précisément ce phénomène sur une fusée fixée sur son banc d'essais (elle n'est donc sujette à aucune accélération).

Nous ne nous intéresserons qu'à la partie de la phase propulsive pendant laquelle la surface libre de l'eau demeure dans la partie cylindrique du réservoir et considérerons l'écoulement comme *Stationnaire* :

[11] On doit en effet penser que la poussée réelle est plus faible que cette poussée théorique, du fait des frottements visqueux du fluide sur les parois du réservoir et spécialement la tuyère…



À peu de distance sous la surface libre de l'eau, la pression de ce fluide équivaut à la pression **P** de l'air comprimé.

Mais à mesure que les particules d'eau s'approchent de la tuyère, elles doivent accélérer puisque la section du réservoir leur offre de moins en moins de passage.

Considérons ainsi la pression de deux particules d'eau :

→la première se situant à la surface libre de l'eau ; cette particule est à la pression $\mathbf{P_1 = P}$, et elle est dotée d'une certaine vitesse $\mathbf{V}_{SL}$ (SL pour *Surface Libre*)

→et la deuxième à une certaine profondeur **x** sous cette même surface libre (elle est à la pression $\mathbf{P}_x$ et à la vitesse $\mathbf{V}_x$, puisque elle a déjà accéléré du fait d'une certaine restriction de section).

Nous savons depuis Jacob Bernoulli qu'il y a conservation de l'énergie totale du liquide ; ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathbf{P + ½\, \rho\, V_{SL}^2 = P_x + ½\, \rho\, V_x^2}$$

Il en résulte que la Pression $\mathbf{P}_x$ de l'eau à la profondeur **x** est :

$$\mathbf{P_x = P - ½\, \rho\, (V_x^2 - V_{SL}^2)}$$

Comme la vitesse de la Surface Libre $\mathbf{V}_{SL}$ est plus faible que la vitesse à la profondeur **x**, il y a donc bien diminution de la pression sur le *convergent*) : cette diminution de la pression est due au fait que l'eau accélère sa vitesse depuis la Surface Libre jusqu'à la tuyère…

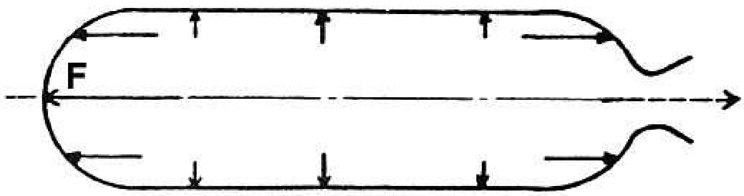
Nous avons donc l'espoir de démontrer que c'est dans cette diminution de la pression des particules d'eau sur le convergent que réside la différence entre les forces de propulsion dégagées par les deux raisonnements (*externe* et *interne*), à savoir $\mathbf{F = 2\, P\, S}_{Tuy}$ et $\mathbf{F = P\, S}_{Tuy}$ (si l'on adopte l'expression simplifiée de ces deux paramètres)

Autrement dit, nous espérons prouver que la dépression de Bernoulli produit une Poussée propulsive très importante, de valeur proche de $\mathbf{P\, S}_{Tuy}$.

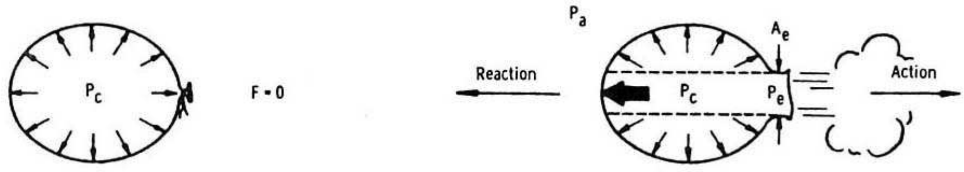
Mais auparavant, refaisons une petite excursion chez les pyro-fuséistes.

Citons des exemples de l'oubli fréquent de cette diminution de pression sur le convergent (ceci sans méchanceté, mais plutôt pour montrer que même les meilleurs se trompent).

Honneur à nos amis Belges du G.E.A. (Groupe d'Études Aérospatiales) : L'arsenal juridique de leur pays ne les prive pas de la possibilité de construire leurs propres moteurs. C'est dire s'ils s'intéressent à la théorie de la tuyère… Dans leur excellent site , on trouve à la page expliquant le principe de la réaction :



La force de propulsion d'une fusée est une force de pression appliquée sur l'avant du propulseur, non équilibrée en raison de l'orifice pratiqué à l'arrière.

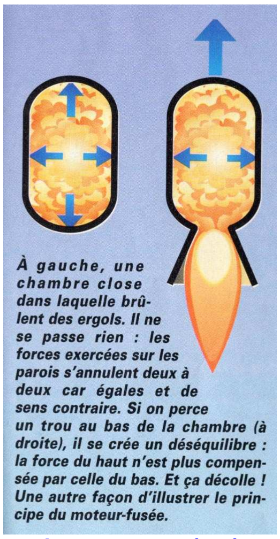


http://users.skynet.be/bk263249/fr/moteurs/index_motor.html

Ici encore, donc, on évoque le déséquilibre des pressions dans le cylindre théorique prolongeant la tuyère vers l'intérieur (cylindre représenté ci-dessus en pointillés), ce déséquilibre résultant en la force $P\mathbf{S}_{Tuy}$. Et ce faisant passe sous silence le déséquilibre des pressions tout autour de ce cylindre théorique.

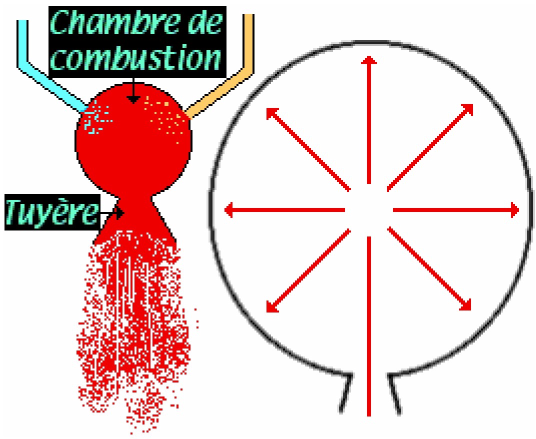
Voici d'autres exemples :

Sur le site également excellent Ariane5tpe :



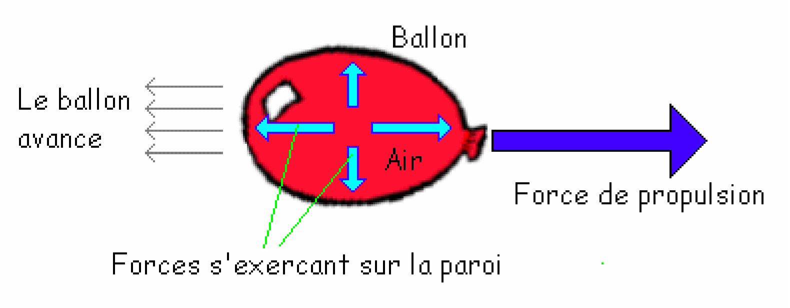
http://ariane5tpe.free.fr/partie1.htm

Sur le site : http://ilsera.com/Espace/f.prop_fusees2.php

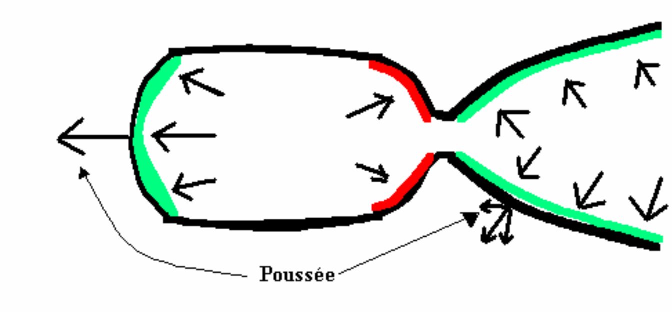


Le texte indique : « Les forces qui s'exercent en face de cette ouverture étant les seules à ne pas avoir de forces opposées… Il est facile de comprendre pourquoi la fusée avance. »

Et sur le site http://dispourquoipapa.free.fr/sciences/sc0016.htm :



Sur le formidable site Accrodavion, par contre, l'auteur introduit la notion de *convergent* en indiquant, à juste titre, que l'intuition le fait ressentir comme contre-productif, puisque sa surface génère des forces de pression vers l'arrière et donc dans le sens du freinage du mobile (forces s'appliquant sur la partie en rouge) :



http://accrodavion.jexiste.be/Accrodavions/lapropulsion9.html

Il précise alors que cet effet contre-productif est compensé par les forces de pression s'appliquant au *divergent* qui le suit (en vert, à la droite du schéma), ce qui est vrai…

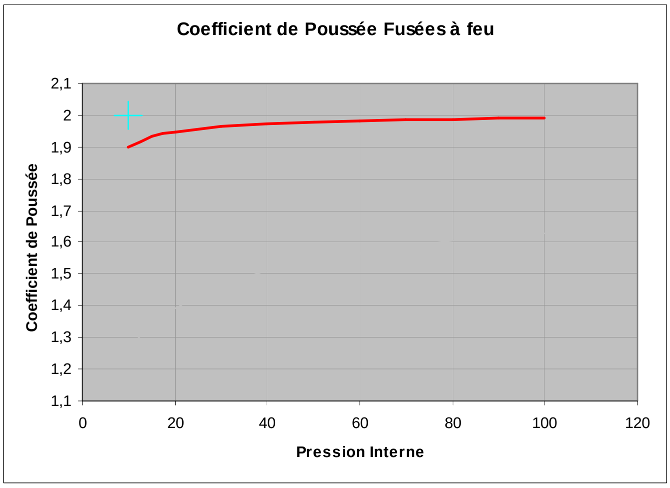
De ce rapide tour d'horizon du Web on peut retirer deux constats :

→ il existe en chacun de nous une réticence à considérer les forces naissant de *dépressions* comme des forces à part entière : sur le schéma ci-dessus, on est prêt à admettre que les forces de pression rouges freinent la fusée, mais on est tout aussi prêt à négliger l'effet de la diminution de ces mêmes forces.

→il y a fréquemment sous-évaluation de la dépression créée par la prise de vitesse des particules de fluide éjectées.

Or, pour ce qui est des fusées à eau (et probablement des fusées baudruches elles-mêmes), le bilan des dépressions sur les parois du convergent est extrêmement fort puisqu'il double pratiquement la force propulsive.

L'attribution, dans le calcul produisant le graphique déjà montré page 7, d'une très forte valeur à l'exposant isentropique γ [12] (ce qui place le fluide considéré dans la situation d'incompressibilité) nous donne d'ailleurs matière à réflexion : le Coefficient de Poussée de fusées à feu rejoignent leur homologue des fusées à eau :



Il conviendrait donc de dérouler le calcul général concernant les fluides compressibles afin de comprendre pourquoi les deux modes de propulsion se rejoignent lorsque le choix de l'exposant isentropique d'un fluide rend celui-ci incompressible…

Ceci dit, il n'est pas acquis qu'une tuyère puisse fonctionner avec un fluide incompressible…

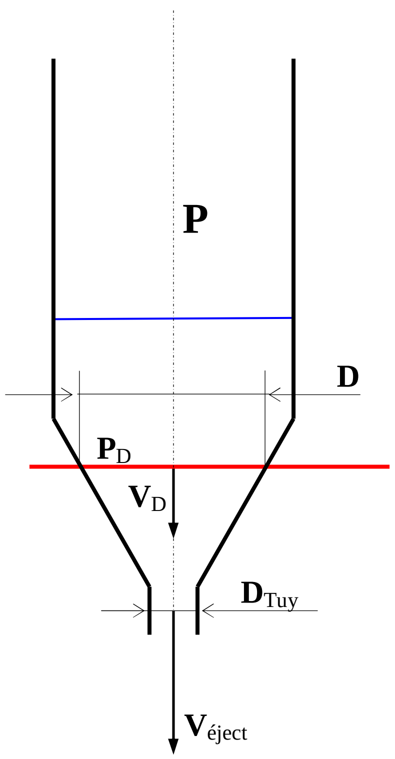
De même, il conviendrait de refaire le calcul de la propulsion du moteur-baudruche sur les bases de la *Théorie de la tuyère*, ceci en admettant pour l'écoulement au col une vitesse quelconque. D'ailleurs, des mesures de pression sur le convergent des ballons (ou, plus facilement, sur une prothèse rigide de convergent) serait du domaine du possible dans les lycées…

[12] Cet exposant isentropique (ou adiabatique) varie généralement de **1,4** pour l'air à **1,22** pour les gaz éjectés par les fusées à feu d'amateurs…

La Partie Cachée de la Force

Recentrons à présent nos réflexions sur la propulsion hydropneumatique.

Considérons la fusée à eau fixée au banc d'essais et caractérisée par les paramètres suivant :



Étudions l'écoulement dans la section du tube de courant de diamètre **D** (en rouge sur le schéma), section située à la profondeur **x** sous la surface libre du liquide. Nous avons déjà écrit que la pression régnant dans cette section est :

$$\mathbf{P_x = P - \tfrac{1}{2}\,\rho\,(V_x^2 - V_{SL}^{2})}$$

Pour les besoins de notre calcul, abandonnons les indices **x** pour les remplacer par des indices **D** ; la section de diamètre **D** est donc le siège d'une pression $\mathbf{P_D}$ valant :

$$\mathbf{P_D = P - \tfrac{1}{2}\,\rho\,(V_D^2 - V_{SL}^2)}$$

(comme il est souvent pratiqué, nous considérons donc ici que la pression dans toute cette section est égale, ce qui revient à négliger la vitesse radiale des particules d'eau, en particulier près de la paroi du convergent ; nous reviendrons plus loin sur cette simplification)

Or la loi de conservation du débit massique exige :

$$\mathbf{V_D \frac{\pi\, D^2}{4} = Constante = V_{Tuy} \frac{\pi\, D_{Tuy}^{\;2}}{4}}$$

D'où l'on tire la vitesse à la section de diamètre **D** qui nous intéresse :

$$\mathbf{V_D} = \mathbf{V_{éject}} \frac{\mathbf{D_{Tuy}^{\;2}}}{\mathbf{D^2}} \qquad \text{(qui est plus faible que } \mathbf{V_{Tuy}}\text{)}$$

… et celle de la Surface Libre :

$$\mathbf{V}_{SL} = \mathbf{V}_{\acute{e}ject}\,\frac{\mathbf{D}_{Tuy}^{\ \ 2}}{\mathbf{D}_{Bouteille}^{\ \ 2}} \qquad \text{(qui est assez faible)}$$

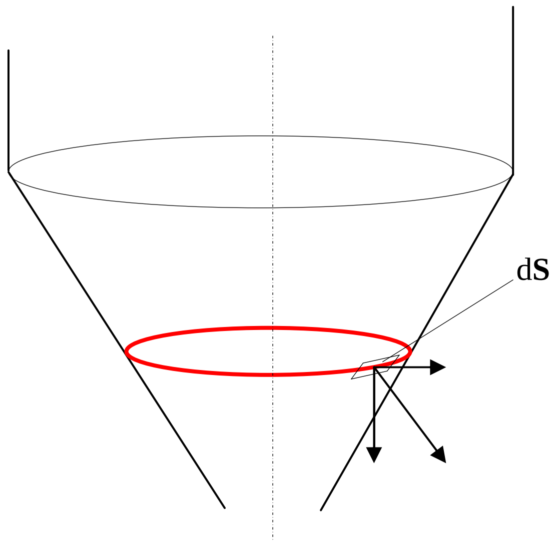
La pression sur les particules de la section de diamètre **D**, que nous avions établie à :

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{P} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{V}_D^{\ 2} - \mathbf{V}_{SL}^{\ 2})$$

en devient :

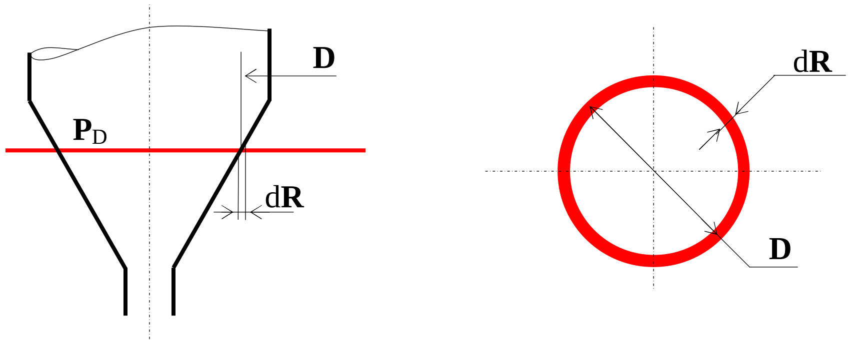
$$\mathbf{P}_D = \mathbf{P} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{V}_{\acute{e}ject}^{\ \ 2}\left(\frac{\mathbf{D}_{Tuy}^{\ \ 4}}{\mathbf{D}^4} - \frac{\mathbf{D}_{Tuy}^{\ \ 4}}{\mathbf{D}_{Bouteille}^{\ \ 4}}\right)$$

Cette pression locale crée sur chaque élément de surface d**S** à la périphérie de la section considérée une force qui peut être décomposée en une composante horizontale et une composante verticale :



L’ensemble des composantes horizontales s’annulent deux à deux.

Tout se passe donc comme si $\mathbf{P}_D$, la pression locale au diamètre **D**, s'appliquait, pour ce qui est de ses conséquences propulsives, sur une couronne de diamètre moyen **D** et de largeur d**R** (couronne rouge à droite) [13] :



L'aire *efficace* de cette couronne est donc $-\pi\,\mathbf{D}\,\frac{d\mathbf{D}}{2}$ (nous faisons précéder cette valeur d'un signe moins puisque d**D** est négatif lorsque l'on s'approche de la tuyère et que nous allons intégrer le problème en descendant vers cette tuyère).

La pression $\mathbf{P}_D$ s'appliquant sur cette aire efficace étant, ainsi que nous l'avons déjà écrit :

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{P} - \tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathbf{V}_{\text{éject}}^{2}\left(\frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{4}}{\mathbf{D}^{4}} - \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{4}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{4}}\right)$$

…la force axiale appliquée par le fluide sur cette partie du convergent est donc :

$$d\mathbf{F} = -\,\mathbf{P}\,\pi\,\mathbf{D}\,\frac{d\mathbf{D}}{2} + \tfrac{1}{2}\,\rho\mathbf{V}_{\text{éject}}^{2}\,\pi\,\mathbf{D}\,\frac{d\mathbf{D}}{2}\,\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{4}\left(\frac{1}{\mathbf{D}^{4}} - \frac{1}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{4}}\right)$$

L'intégration sur toute la longueur du convergent à savoir :

$$\mathbf{F}_{\text{Conv}} = \int_{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}}^{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}} d\mathbf{F}$$

…donnera donc la force sur ce convergent :

$$\mathbf{F}_{\text{Conv}} = -\,\tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\,\pi\int_{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}}^{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}}\mathbf{D}\,d\mathbf{D} \;+\; \tfrac{1}{4}\,\rho\mathbf{V}_{\text{éject}}^{2}\,\pi\,\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{4}\left[\int_{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}}^{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}}\frac{d\mathbf{D}}{\mathbf{D}^{3}} + \int_{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}}^{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}}\frac{\mathbf{D}\,d\mathbf{D}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{4}}\right]$$

[13] Ainsi la force créée par une pression sur un piston ne dépend-elle pas de la forme de la tête de ce piston (qui peut fort bien être bombée)…

La primitivation est évidente et donne :

$$F_{Conv} = -\tfrac{1}{4}\, P\, \pi \left[D^2\right] + \tfrac{1}{4}\, \rho V_{\acute{e}ject}^{\,2}\, \pi\, D_{Tuy}^{\,4} \left[-\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{D^2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{D^2}{D_{Bouteille}^{\,4}}\right]$$

Cette primitivation est à prendre entre les bornes susdites, ce qui donne :

$$F_{Conv} = P\,\frac{\pi}{4}\left[D_{Bouteille}^{\,2} - D_{Tuy}^{\,2}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \rho V_{\acute{e}ject}^{\,2}\,\frac{\pi}{8} D_{Tuy}^{\,4}\left[-\left[\frac{1}{D_{Tuy}^{\,2}} - \frac{1}{D_{Bouteille}^{\,2}}\right] + \frac{1}{D_{Bouteille}^{\,4}}\left[D_{tuy}^{\,2} - D_{Bouteille}^{\,2}\right]\right]$$

ou, après simplifications :

$$F_{Conv} = P\,\frac{\pi}{4}\left[D_{Bouteille}^{\,2} - D_{Tuy}^{\,2}\right] + \rho V_{\acute{e}ject}^{\,2}\,\frac{\pi}{8} D_{Tuy}^{\,4}\left[\frac{-1}{D_{Tuy}^{\,2}} + \frac{D_{tuy}^{\,2}}{D_{Bouteille}^{\,4}}\right]$$

…ou encore :

$$F_{Conv} = P\,\frac{\pi}{4}\left[D_{Bouteille}^{\,2} - D_{Tuy}^{\,2}\right] - \rho V_{\acute{e}ject}^{\,2}\,\frac{\pi}{8} D_{Tuy}^{\,2}\left[1 - \frac{D_{tuy}^{\,4}}{D_{Bouteille}^{\,4}}\right]$$

Il est facile de reconnaître dans le premier terme le produit de **P** par l'aire de la projection frontale du convergent. C'est normal : c'est la partie *inchangée par la loi de Bernoulli* de la force de pression sur le convergent $\mathbf{P\,S}_{Conv}$.

D'ailleurs, dans le cas limite où la vitesse d'éjection serait nulle (et donc où la bouteille resterait fermée), seul ce terme $\mathbf{P\,S}_{Conv}$ subsisterait…

Le dernier terme est un soustractif (on retranche une quantité positive).

Dans ce dernier terme, que vaut $\mathbf{V}_{\acute{e}ject}$? Ainsi que nous l'avons écrit page 5, et si la fusée est maintenue fixe, $\mathbf{V}_{\acute{e}ject}$ vaut :

$$V_{\acute{e}ject} = \sqrt{\frac{2P}{\rho\left[1 - \frac{D_{Tuy}^{\,4}}{D_{Bouteille}^{\,4}}\right]}}$$

Son carré vaut donc :

$$\mathbf{V}_{\text{éject}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2P}}{\rho\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}{}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}{}^{\mathbf{4}}}\right]}$$

Si l'on reporte ce libellé dans le résultat de notre intégration, on obtient :

$$\mathbf{F}_{\text{Conv}} = \mathbf{P\,S}_{\text{Conv}} - \mathbf{P}\frac{\pi}{\mathbf{4}}\mathbf{D}_{\text{Tuy}}{}^{\mathbf{2}}$$

Comme on reconnaît dans $\frac{\pi}{4}\mathbf{D}_{\text{Tuy}}{}^{2}$ la section de la tuyère, on peut écrire que $\mathbf{F}_{\text{Conv}}$, la somme des forces de pression sur le convergent est :

$$\mathbf{F}_{\text{Conv}} = \mathbf{P\,S}_{\text{Conv}} - \mathbf{PS}_{\text{Tuy}}{}^{\mathbf{2}}$$

Ce qui fait que le bilan de toutes les forces s'exerçant sur les parois du moteur, soustraction des forces agissant sur le fond et des forces agissant sur le convergent, est :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P\,S}_{\text{Fond}} - (\mathbf{P\,S}_{\text{Conv}} - \mathbf{PS}_{\text{Tuy}}{}^{\mathbf{2}})$$

Comme $\mathbf{P\,S}_{\text{Fond}} - \mathbf{P\,S}_{\text{Conv}}$ est égal à $\mathbf{P\,S}_{\text{Tuy}}$, on peut écrire enfin que :

Le bilan de toutes les forces s'exerçant sur les parois internes du réservoir d'une fusée à eau est : $\mathbf{F} = \mathbf{2P\,S}_{\text{Tuy}}$
Et ce bilan *interne* est bien égal à la force propulsive calculée par la *voie externe*.

…ce que nous cherchions à démontrer.

<u>Pourquoi trouvons-nous exactement la même valeur de la Poussée ?</u>

Il y a ici matière à réflexion.

En premier lieu, il faut revenir sur la façon dont nous avons réalisé notre calcul exposé ci-dessus ; et surtout revenir sur ses limitations et simplifications implicites et explicites :

En application du Principe de Bernoulli, nous avons calculé le bilan des pressions sur le convergent d'une fusée maintenue au banc (la fusée étant maintenue fixe, donc), ce banc étant situé dans une région non soumise à aucun champ de gravité).

Dans une étape suivante il serait possible d'ajouter l'accélération de la fusée puis de faire rentrer en jeu la gravité, mais nous n'en sommes pas là, ces deux phénomènes modifiant assez peu la valeur de la Poussée [14] .

Il est d'ailleurs important de noter que nous avons appliqué une fois le Principe de Bernoulli dans notre raisonnement <u>interne</u> (afin de donner une valeur à la pression variable sur le convergent).

Or le raisonnement externe utilise également le Principe de Bernoulli pour donner valeur à la Vitesse d'Éjection dans la formule de la poussée $\mathbf{F} = \mathbf{q}\mathbf{V}_{\text{éject}}$.

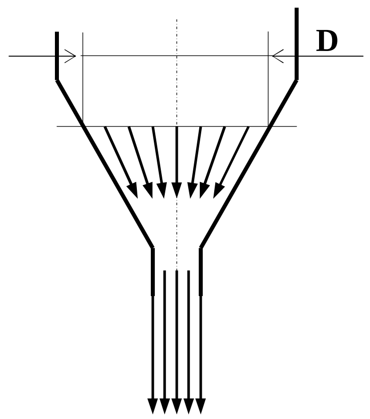
L'application du Principe de Bernoulli est donc égalitaire et symétrique : on ne pourrait pas songer à l'utiliser dans l'un des raisonnement et pas dans l'autre !

LIMITATIONS DE NOTRE CALCUL :

1° Convergent de forme non conique : Lors de notre développement, nous avons implicitement calculé l'effet de la pression des particules d'eau sur un convergent conique. Or l'effet de cette pression n'est lié en rien à l'angle de conicité de notre convergent. Une intégration sur un convergent de révolution de génératrice quelconque donnerait donc le même résultat. Ceci est une constatation intéressante…

2° Non prise en compte de l'angle des vecteurs vitesses : Lors de notre application du principe de Bernoulli, nous avons quand-même effectué une supposition de taille : celle que les particules glissant le long du convergent possédaient la vitesse de la section considérée du tube de courant…

Dessinons l'écoulement de l'eau sur le convergent, ou, plus précisément, à travers la section de diamètre **D** du tube de courant :



Pour que l'eau puisse circuler, il faut bien que les vecteurs vitesse s'inclinent à mesure qu'ils s'éloignent de l'axe du convergent (il n'y a guère que dans la partie rectiligne du goulot que les vecteurs vitesse retrouvent leur parallélisme).

Le long de ce convergent, le vecteur vitesse possède donc deux composantes : une composante axiale (constante sur toute la section) et une composante radiale (de plus en plus forte à mesure qu'on s'approche du convergent). Mais surtout, le module

[14] D'ailleurs, paradoxalement, la gravité n'a aucune action sur la Poussée…

du vecteur vitesse le long du convergent est plus important. La dépression de Bernoulli (**½ ρV²**) est donc plus importante que nous l'avons considéré dans notre calcul.

Le long du convergent, la vitesse de l'eau est multipliée par un facteur constant qui est :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Cos(\alpha/2)}}$$

α/2 étant le demi angle au sommet du convergent.

Ce demi angle ne variant pas dans notre intégration du phénomène, c'est donc tout notre bilan de la dépression de Bernoulli qui est menacé d'être pondéré (augmenté) par le carré de ce coefficient. Cela fait beaucoup…

Ce qui est embêtant, de plus, c'est que cette pondération dépend de l'angle du convergent qui n'est absolument pas pris en compte par le raisonnement externe : la dissonance entre les deux raisonnements variera donc selon cet angle, ce qui n'est guère satisfaisant…

Ce problème de la vitesse radiale des sections de courant dans un convergent est abordé par J. Haertig dans son texte *Cours Tuyère* : J.Haertig_compressible_3D------------------. Il écrit :

Il y a donc là un problème difficile sur lequel nous achoppons…

3° Existence d'une force interne : À y bien réfléchir, il existe également un phénomène qui n'est pris en compte dans notre raisonnement interne : le déplacement du Centre des Masses de l'eau avant son éjection. Expliquons-nous :

Ce phénomène nous est appris par Dean Wheeler, dans son magnifique texte mathématique (cité dans nos liens, en fin de celui-ci).

Si le grand homme indique que ce phénomène crée une *force interne* sur la fusée, il ne donne pas de nom au phénomène lui-même ; je propose quant à moi celui (quelque peu guerrier) de *mobilisation à la tuyère*.

Quel est ce phénomène qui naît naturellement des équations rigoureuses de Dean ?

Avant même d'être éjectée à la tuyère, l'eau de nos engins doit être déplacée vers cette tuyère.

Imaginons, par exemple une fusée longue de trois mètres dont la réserve d'eau serait placée en partie haute (sur une hauteur du tiers, soit un mètre) [15] ; avant d'éjecter cette quantité d'eau il faudrait déjà la déplacer (à travers un aqueduc) sur deux mètres.

[15] Nous construisons ici une fusée à Flux d'Air Inversé (voir notre site à ce propos), mais l'on peut aussi imaginer que la réserve d'air comprimé est située sur une hauteur de deux mètres au-dessus de l'eau, les deux mètres situés sous l'eau étant deux mètres morts (du point de vue propulsif) et simplement traversés par un tuyau conduisant l'eau à la tuyère (l'aqueduc)…

Et ce déplacement occasionnerait un mouvement général du Centre des Masses de la fusée : du fait de la loi de Conservation des Quantités de Mouvements, tout déplacement interne de masse crée une force sur la fusée, même si celle-ci est bridée sur son banc d'essais : que ceux qui ne se sont jamais déplacé d'avant en arrière dans une canoë essayent de le faire : le canoë se déplace plus vite que vous ne vous déplacez vous-même, mais dans l'autre sens ; c'est assez déstabilisant. Inversement, si vous voulez que le canoë ne se déplace pas sous vos pieds, il faut demander à quelqu'un de le tenir : cette personne appliquera alors sur l'embarcation la force que nous venons d'évoquer pour la fusée au banc d'essais…

Le phénomène de mobilisation à la tuyère est évidemment à classer dans le chapitre qu'on pourrait appeler la *balistique interne* de la fusée : cette expression est utilisée par les artilleurs pour définir ce qui se passe lorsque l'obus est accéléré *à l'intérieur* du canon (de fait, un canon commence à reculer bien avant que l'obus ne sorte par sa bouche à feu, en fait dès que cet obus commence sa course interne) : Dean Wheeler s'en explique très bien dans son texte…

Quelle est la valeur numérique de la force générée par cette *mobilisation à la tuyère* ?

Cette valeur est très faible. Ce qui absout tous les hydrofuséistes qui n'en tiennent pas compte dans leur calcul.
De plus, comme l'eau est déplacée vers le bas par la mobilisation, le reste de la fusée s'en trouve déplacée vers le haut : la force naissant de la mobilisation à la tuyère est donc *propulsive*. J'avais calculé que sur la grande fusée Cocavic MC (voir les vidéos de son vol sur notre site), l'altitude d'apogée ne s'en trouvait augmenté de quelque **30 cm** : ne pas tenir compte de cette force interne est donc faire acte de modestie quant aux performances de son engin…

Dean Wheeler donne la formulation de cette force ; c'est :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \frac{d}{d\mathbf{t}} \int \boldsymbol{\rho}\, \mathbf{V}_z\, \mathbf{S}_z\, d\mathbf{z}$$

où $\boldsymbol{\rho}$ est la Masse Volumique de l'eau (ou du fluide constituant la Masse d'Appui)
$\mathbf{V}_z$ la vitesse de ce fluide à la distance **z** de la tuyère
$\mathbf{S}_z$ la section de la bouteille à la même distance **z**

Les constatations de circonstances conduisent alors Dean à proposer une valeur plus facilement utilisable, à savoir :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{\rho}\, \mathbf{S}_{\mathbf{Tuy}} \left[\mathbf{H}_t \frac{d\mathbf{V}_{\text{éject}}}{d\mathbf{t}} + \frac{\mathbf{S}_{\text{Tuy}}}{\mathbf{S}_{\text{H}}} \mathbf{V}_{\mathbf{éject}}^{\ 2} \right]$$

$\mathbf{H}_t$ étant la hauteur de l'eau au dessus de la tuyère.
$\mathbf{S}_H$ la section de la surface libre de l'eau

Il serait intéressant de commenter cette expression, mais comme nous limitons notre étude à la propulsion des fusées durant *la phase où la surface libre de l'eau se situe encore dans la portion cylindrique de leur réservoir*, nous sommes bien aise de constater qu'alors $\frac{\mathbf{S}_{\text{Tuy}}}{\mathbf{S}_{\text{H}}}$ est constant et égal à $\frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{2}}}$ …

De plus, comme nous ne nous intéressons, pour simplifier, qu'à la valeur de la force de Propulsion <u>en fonction d'une certaine Pression interne</u>, nous somme donc autorisé à imaginer que cette pression interne est maintenue constante (par un dispositif pyrotechnique ou mieux parce que le volume réservé à l'air est extrêmement grand (nous n'avons pas posé, jusque là, de limitation à ce volume) ; dans ces conditions, nous pouvons donc admettre que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_{\text{éject}}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

On a donc, dans le cadre précis de notre étude :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{\rho}\ \mathbf{S}_{\mathbf{Tuy}} \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{2}}} \mathbf{V}_{\textbf{éject}}^{\ \mathbf{2}}$$

Si nous reprenons la valeur déjà utilisée de $\mathbf{V}_{\text{éject}}^{\mathbf{2}}$, à savoir :

$$\mathbf{V}_{\text{éject}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2P}}{\boldsymbol{\rho}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{4}}}\right]}$$

…nous pouvons écrire :

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{P}\ \mathbf{S}_{\mathbf{Tuy}} \frac{\mathbf{2}}{\left[\frac{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{2}}} - \frac{\mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{2}}}\right]}}$$

Ce qui se lit peut-être plus facilement sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{P}\ \mathbf{S}_{\mathbf{Tuy}} \frac{\mathbf{2}\ \mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{2}}\ \mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{2}}}{\left[\mathbf{D}_{\text{Bouteille}}^{\mathbf{4}} - \mathbf{D}_{\text{Tuy}}^{\mathbf{4}}\right]}}$$

À titre d'exemple, on peut alors calculer que, pour une fusée type de **1,5 L**, la fraction qui pondère **P S**$_{Tuy}$ dans les encadrés ci-dessus vaut **~ 0,137** .[16]

Voici, en fonction de ce rapport des sections, l'évolution de cette Force Interne (ou plutôt de sa valeur multiplicatrice de **PS**$_{Tuy}$) :

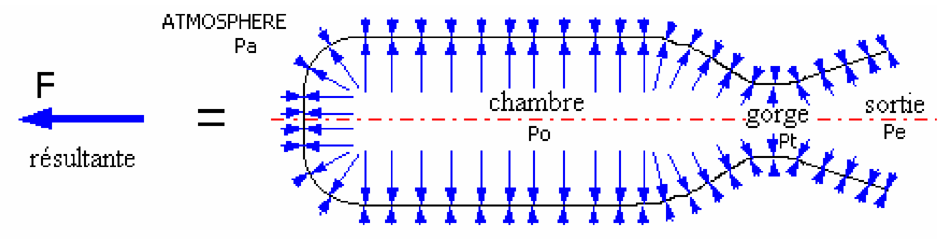
À faire

En vert fluo est le rapport usuel des sections pour une fusée à eau de **1,5 L**.

RETOUR AUX FUSÉES À FEU :

Nourrissons encore notre réflexion d'un dernier exemple, pris dans le domaine des fusées à feu :

Richard Nakka , dans son schéma illustrant son grand texte THÉORIE DES MOTEURS DE FUSÉE À PROPULSEUR SOLIDE (traduit de l'anglais par Alexandre Burelle), fait bien état de la diminution progressive de la pression des gaz sur le convergent précédant le col de la tuyère :



La force de Poussée du moteur est représentée ici comme la somme de toutes les forces de pression sur les parois du moteur : c'est en effet le mode de raisonnement que l'on doit adopter : En effet, si l'on néglige les forces de friction que développe le fluide éjecté sur les parois du moteur (et en particulier de son convergent et de sa tuyère) [17] , les seules forces demeurant en jeu sont les forces de pression sur les mêmes parois.

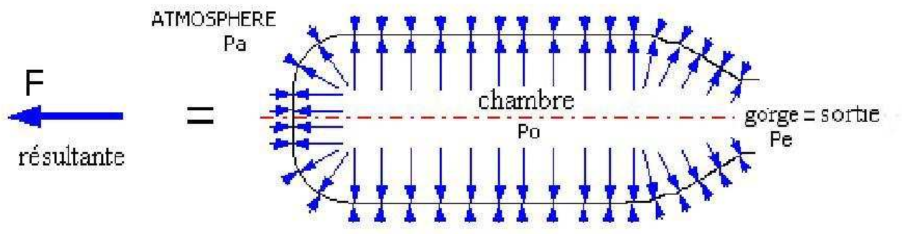
[16] On remarque que cette force interne de *mobilisation à la tuyère* est fonction du rapport des sections de la masse d'eau restant à éjecter. En effet, il n'est ici besoin que de s'intéresser au déplacement du Centre des Masses de cette eau restante : tout se passe comme si c'était l'eau côté surface libre qui était retirée à chaque instant au bilan de la masse d'eau restante, puisqu'à chaque instant on doit rechercher le barycentre de la masse d'eau restante ; or celle-ci est la masse d'eau qui restait au pas de temps précédent diminuée de la masse d'une certaine tranche d'eau située à la surface libre…

[17] On peut deviner que ces forces de friction résulteront en un freinage des gaz éjectés par le moteur, donc en une diminution de sa poussée (de telles forces de friction naissent aussi du mouvement de l'air sur le fuselage de la fusée, mais on a l'habitude de les regrouper avec les forces de pression, en les comptant dans le Cx).

Si l'on veut comprendre d'où vient la Poussée d'un moteur fusée, c'est bien de ces forces de pression locales sur des parois physiques qu'il faut faire le bilan !

Néanmoins, pour en revenir au texte de Richard Nakka, on peut arguer que la présence du *divergent* (cette pièce en forme de coquetier ou en forme de cône qui termine le moteur vers le bas) fausse la comparaison avec les fusées à eau ou même les ballons.

Aussi, pour faciliter notre réflexion, et sur les pas de Richard Nakka, intéressons-nous à un moteur de fusée à feu sans divergent : ses gaz sont alors éjectés dès leur passage à la gorge (le col de la tuyère). Le schéma se transforme donc en celui-ci :



Richard Nakka nous donne le Coefficient de Poussée d'un tel moteur comme valant **0,62**, soit une valeur inférieure à l'unité !

Refaisons ce calcul avec les formules qu'il nous donne :

Si $\mathbf{P}_0$ est la pression des gaz dans la chambre de combustion, la pression des gaz à la gorge est donnée par la formule

$$\mathbf{P}_{gorge} = \mathbf{P}_0 / [1 + (k-1)M^2/2]^{(k/(k-1)}$$, avec **M = 1** par définition [18]

Elle vaut donc **0,56** $\mathbf{P}_0$ avec l'exposant isentropique du carburant étudié par Richard dans son texte.

La théorie de la tuyère accorde alors à ce moteur sans divergent un Coefficient de Poussée de **1,23** pour une pression interne de **70 bars**. Sur ce point, nous ne sommes donc pas d'accord avec le texte de Richard qui ne lui donne que **0,62** , puisque nous dégageons le double). En fait, le grand fuséiste ne pas prendre en compte la Poussée de Pression qui augmente ledit Coefficient de Poussée de presque autant [19], ceci parce qu'il

[18] Tout est fait pour que l'écoulement du fluide atteigne la vitesse du son au col de la tuyère.

[19] Il semble qu'il ait varié, entre-temps dans sa définition du coefficient de poussée : certains auteurs le définissent sans prendre en compte la Poussée de Pression **(**$\mathbf{P}_0$**-**$\mathbf{P}_a$**)** $\mathbf{S}_{Tuy}$, ce qu'il n'a pas fait au début de son texte, mais ce qu'il fait sans doute pour ce calcul. L'exclusion de la Poussée de Pression des gaz est d'ailleurs justifiée lorsque la tuyère possède un divergent bien *adapté*. Mais utiliser ce $\mathbf{C}_f$ pour comparer la poussée d'une tuyère à divergent adapté avec une tuyère sans divergent ne signifie rien, puisque s'ils ne sont pas accélérés dans un divergent les gaz délivrent quand-même une forte Poussée de Pression.

désire effectuer une démonstration de l'apport du seul divergent sur la force de propulsion.

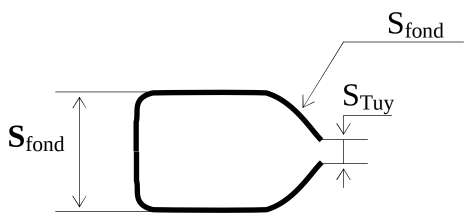
Certes, ce divergent est un moyen très efficace d'augmenter la vitesse d'éjection [20], mais s'il n'existe pas la Poussée de Pression est plus forte : il reste quand-même, sans divergent, un pression de sortie de $\mathbf{0{,}56\ P_0}$, ainsi que nous venons de l'écrire !

Mais pénétrons plus loin à l'intérieur de la tuyère, sur la foi des renseignements que nous possédons déjà : nous prétendions à l'instant avoir dégagé, à l'aide de la théorie de la tuyère, un Coefficient de Poussée de **1,23**.

La poussée du moteur est donc $\mathbf{1{,}23\ P_0\ S_{Tuy}}$ (si $\mathbf{P_0}$ est la Pression interne et $\mathbf{S_{Tuy}}$ l'aire de la tuyère.

Or, si nous dressons le bilan des forces sur les parois physiques du moteur, nous pouvons donc écrire, en nommant $\mathbf{S_{fond}}$ l'aire du fond du moteur et $\mathbf{S_{conv}}$ l'aire du convergent (projetée axialement) :

$$\textbf{Poussée} = \mathbf{P_0\ S_{fond} - K\ P_0}\ S_{conv} = \mathbf{1{,}23\ P_0\ S_{Tuy}}$$



…ceci si l'on fait appel à **K**, coefficient d'intégration de la Pression (variable) sur l'ensemble de l'aire du Convergent.

En effet, nous savons que la Pression sur le convergent évolue de $\mathbf{P_0}$ à $\mathbf{0{,}56\ P_0}$ à mesure que le fluide est dirigé vers le col de la tuyère ; il est alors tentant de chercher le coefficient **K** tel que l'intégration des forces de pression sur le convergent soit $\mathbf{K\ P_0\ S_{conv}}$…

Ce bilan des forces de pression sur les parois physiques du moteur est complet : il n'y a pas d'autres forces agissant sur ce moteur [21].

Comme $\mathbf{S_{conv}}$ vaut $\mathbf{S_{fond} - S_{Tuy}}$, on peut exprimer **K** par rapport à la valeur **1,23** du Coefficient de Poussée :

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{S_{fond} - 1{,}23\ S_{Tuy}}}{\mathbf{S_{fond} - S_{Tuy}}}$$

[20] en effet, dans le flux <u>supersonique</u> existant dans le convergent, l'augmentation de la section entraîne une augmentation de vitesse associée à une baisse de la pression.

[21] …hormis les forces de friction créées par le mouvement du fluide que nous négligeons ici.

Ce qui dans ce cas précis, en accordant par exemple à $\mathbf{S}_{Tuy}$ une valeur **15,3** fois plus faible que $\mathbf{S}_{fond}$ [22] :

K ≈ 0,984

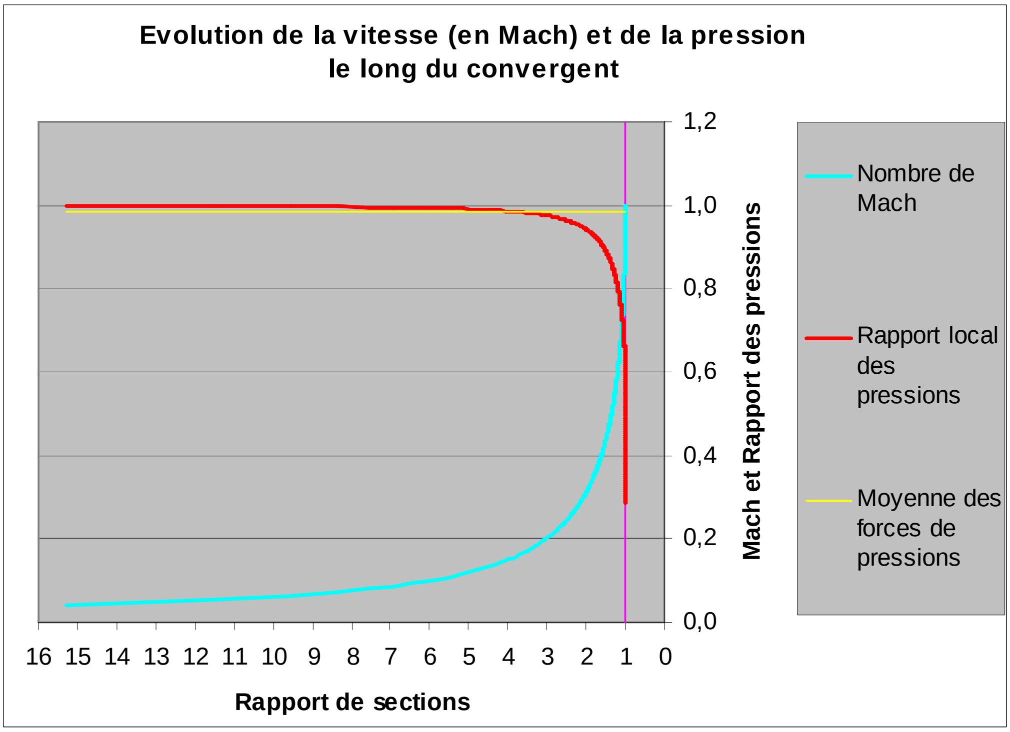
En conséquence, **K** , le coefficient d'intégration des forces de pression sur le convergent du moteur, vaut **0,984** pour une pression interne $\mathbf{P}_0$ de **70 bars** et ce rapport de sections moteur/col de **15,3**.

Comment ce coefficient d'intégration des forces de pression peut-il être aussi proche de l'unité ?

Extérieurement (sans rentrer dans le problème) nous savons qu'il se situe entre **1** et **0,56,** ceci parce que la pression à la tuyère vaut **0,56** $\mathbf{P}_0$…

Le fait qu'il soit beaucoup plus proche de l'unité que de **0,56** tendrait à prouver que la pression des gaz ne consent à descendre qu'aux abords immédiats du col de la tuyère (ce qui génère des forces sur des sections très réduites du convergent).

Ceci est difficile à croire pour des gens comme nous, familiers de la loi de Bernoulli pour les fluides incompressibles (ce que ne sont pas les gaz éjectés par une fusée à feu). Il faut faire les calculs et en produire la représentation graphique pour s'en convaincre :



[22]Cette valeur de **15,3** est le rapport de la section du moteur à la section du col de la tuyère sur le moteur Kappa étudié par Richard Nakka dans son texte…

Sur ce graphe est porté en abscisse le rapport local de la section du tube de courant à la section du col de la tuyère : les abscisses vont ici de **15,3** à **1**…

En turquoise est dessiné l'évolution de la vitesse (en Mach) depuis la chambre de combustion (où l'on considère que la vitesse est négligeable) jusqu'au col de la tuyère. Attention au fait que cette vitesse en Mach est relative à la vitesse locale du son ; cette vitesse n'est donc pas une vitesse en **m/s**…

En rouge est le rapport local des pressions (le quotient de la pression locale régnant sur le convergent par $\mathbf{P}_0$, la pression interne de la chambre de combustion). C'est cette pression qui nous intéresse, en tant que génératrice des efforts sur le convergent… On note que cette pression ne diminue qu'aux abords immédiats du col de la tuyère

En jaune est représentée la moyenne des forces de pression sur le convergent (c'est le coefficient d'intégration de cette pression sur cette aire) : Nous le dégageons, à l'issue d'une intégration *graphique* (par la méthode des trapèzes) comme valant **0,98412**, pour ce rapport de sections moteur de **15,3** : c'est bien la valeur que nous trouvions par la seule étude du Coefficient de Poussée de ce moteur. On peut d'ailleurs apprécier visuellement que l'aire du rectangle entre l'horizontale jaune et l'ordonnée **1,0** équivaut bien à l'aire comprise entre la courbe rouge et l'ordonnée **1,0** , ceci à gauche de l'abscisse **1** (en fuchsia)…

Il est donc patent que le fluide, pourtant très accéléré dans sa vitesse par la convergence de la tuyère, trouve dans l'évolution de sa température une façon de maintenir sa pression jusqu'à l'approche du col de la tuyère [23].

Bernard de GO MARS ! !
le 18/11/2008

RÉFÉRENCES ET LIENS :

« Modelling the Thrust Phase » de Dean Wheeler :

http://www.et.byu.edu/~wheeler/benchtop/pix/thrust_eqns.pdf

Le site du grand Dean :

http://www2.et.byu.edu/~wheeler/benchtop/index.php

[23] Il n'en demeure pas moins que cette température se trouve très peu diminuée à l'issue de cette contribution (la température au col de la tuyère étant simplement les **9/10**^èmes^ de la température de la chambre de combustion). Un calcul de l'énergie cinétique conférée aux gaz éjectés par rapport à l'énergie totale crée par la combustion devait être révélateur du rendement de nos engins préférés. À cet égard, on peut rêver que les gaz éjectés soit libérés sans pression relative (ce qui est souvent presque le cas), mais également sans aucune température résiduelle…

Le texte sur la Théorie de la Tuyère de Richard Nakka, traduit par Alexandre Burelle *THÉORIE DES MOTEURS DE FUSÉE À PROPULSEUR SOLIDE* :

ou :

http://www.nakka-rocketry.net/articles/theorie.pdf

Le site de Richard Nakka :

http://www.nakka-rocketry.net/

Notre texte : *LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE* :

ou :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/la_fusee_en_vol_balistique7.doc

Notre texte : *MONTÉE EN VITESSE D'ÉJECTION D'UNE FUSÉE À EAU :*

ou :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/montee_v_eject.doc

Notre texte où est proposé une prise en compte du freinage atmosphérique, en additif à la fameuse formule de Tsiolkovski, et où est démontré l'insensibilité de cette formule aux changements de Débit massique :

AMENDEMENT ATMOSPHÉRIQUE À LA VITESSE DE TSIOLKOVSKI

ou :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/amendement_tsiolkovski.doc

Notre texte *LA PROPULSION DE LA FUSÉE À EAU* généralisant la formule de Tsiolkovski aux fusées à eau *:*

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/pro_fao.pdf

…tous ces textes étant consultables sur la page ***Physique de la fusée*** :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm

du site Go Mars ! :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/

Le site d'Alain Juge et spécialement son texte "Principes" consacré à la propulsion de la fusée à eau :

http://pagesperso-orange.fr/alain.juge/Francais/CadreFR.htm

Et n'oublions pas les textes papiers d'un grand précurseur : Jean-Paul Soulard. Par exemple : "LA FUSÉE A EAU, pratique, approche théorique, mesures".