

LA PROPULSION DE LA FUSÉE À EAU

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE TSIOLKOVSKI À LA FUSÉE À EAU

ou :

AMENDEMENT ADIABATIQUE À LA FORMULE DE TSIOLKOVSKI

Version 1-3
du 01/05/08 ¹

Faites-nous l'amitié
de vos critiques !

En 1896, l'instituteur russe Tsiolkovski calcula la vitesse à espérer d'une fusée à l'issue de sa Phase Propulsive.

En négligeant la résistance de l'air ², cette Vitesse de Fin de Propulsion est :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \ln[(M+Q)/M] - gT$$

formule générale dite de Tsiolkovski où :

M est la masse à vide ;

Q la masse d'appui (la masse de carburant pour les fusées chimiques, la quantité d'eau pour les fusées à eau, la masse de gaz neutre pour les fusées ioniques ou nucléaires) ;

V_{éject} la vitesse d'éjection de la masse d'appui, supposée constante.

g l'accélération de la pesanteur

T la durée de la Phase Propulsive.

Rappelons que le quotient $(M+Q)/M$ est nommé Rapport de Masses de la fusée...

¹ Quelques nouveaux ajouts et clarifications sur les cas non usuels des Quotas d'eau quasi unitaires.

² Nous verrons à la fin de ce travail qu'une prise en compte tout à fait satisfaisante des pertes en vitesses dues à la Traînée pendant la propulsion aqueuse est possible. En effet, l'effet négatif de la Traînée peut être sorti de l'intégrale générale donnant la Vitesse de Fin de Propulsion. Dans ces conditions, l'effet sur la Vitesse de Fin de Propulsion du freinage atmosphérique peut être ramené au produit de la quantité SCX par une intégrale essentiellement dépendante de la Masse à Vide et de la Quantité d'Eau embarquée sur le Pas de Tir.

Dans le cas de nos fusées hydropneumatiques, la masse d'appui Q est donc tout simplement la masse d'eau embarquée. Comme cette eau ne recèle aucune énergie, on a facilité à comprendre qu'elle n'intervient que comme masse *passive* d'appui ³.

Mais, toujours dans ce cas hydropneumatique, la vitesse à laquelle cette masse d'appui est éjectée n'est pas constante (en majeure partie parce que la pression de l'air *enclos* diminue durant la propulsion).

On est donc en droit de se demander quelle forme prendra cette équation générale de Tsiolkovski dans ce cas des fusées à eau (toujours si l'on néglige la résistance de l'air) ⁴.

L'hypothèse qui vient le plus naturellement est que la Vitesse de Fin de Propulsion U_{FinProp} sera alors donnée par une formule équivalente à la formule générale de Tsiolkovski, mais pondérée par un certain coefficient multiplicateur, coefficient prenant en compte la diminution *adiabatique* de la pression ⁵. Pour cette raison que la pression évolue *adiabatiquement*, nous nommerons ce coefficient K_{Adiab} dans cet exposé.

La vitesse d'éjection $V_{\text{éject}}$ de la formule, quant à elle, deviendrait la vitesse d'éjection initiale $V_{\text{éjectInit}}$ (celle du premier instant de la Phase Propulsive), vitesse prise alors comme référence. On écrirait alors une **formule de Tsiolkovski étendue aux fusées à eau** comme suit :

(Équation 2)

$$U_{\text{FinProp}} = K_{\text{Adiab}} V_{\text{éjectInit}} \text{Ln}[(M+Q)/M] - gT$$

formule de Tsiolkovski étendue aux fusées à eau, où :

- K_{Adiab} serait un coefficient pondérateur ;
- $V_{\text{éjectInit}}$ serait la Vitesse d'Éjection Initiale (celle du début de la Phase Propulsive) ⁶.
- M serait la masse à vide ;
- Q la masse d'appui (la masse d'eau embarquée).
- g l'accélération de la pesanteur
- T la durée de la Phase Propulsive.

³ Dans le cas des fusées à feu classiques, la masse de poudre ou de carburant(s) est également source d'énergie, ce qui complique la compréhension de leur utilité : cette masse de produits chimiques est alors à la fois masse *génératrice* de chaleur et masse d'appui *passive* destinée à être éjectée, masse sur laquelle la fusée s'appuiera pour s'élever... Dans le cas des fusées à moteur ionique et des fusées nucléaires, la masse d'appui est totalement passive.

⁴ Au demeurant, pour les fusées à eau, l'influence de la résistance de l'air sur la Vitesse de Fin de Propulsion est assez faible. Elle est également très faible pour les fusées à feu d'amateur...

⁵ Rappelons que "adiabatique" signifie seulement qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre la masse d'air enclos et l'extérieur durant la détente de cet air. Cette absence d'échange devient évidente lorsqu'on pense à la brièveté de la phase propulsive de nos fusées à eau (quelques centièmes de secondes pour une fusée de 1,5 L "plein goulot").

⁶ La formule très simple donnant cette vitesse d'éjection sera donnée en cours d'exposé.

Précisons à présent que le soustractif *gravitaire* gT n'est lié au phénomène de propulsion que par la durée de celle-ci. La brièveté de cette durée (pour les fusées à eau *plein goulot*, elle est inférieure au dixième de seconde) maintient ce soustractif gravitaire en dessous de **1 m/s**.

Ce **m/s** est bien sûr à comparer avec l'ordre de grandeur des vitesses de Fin de Propulsion des fusées à eau : **50 m/s**. Négliger l'action de la gravité sur la fusée revient donc à se rendre coupable d'une erreur de **2 %**.

Pourtant, si dans l'étude qui suit nous négligeons ce facteur gT ce n'est pas cette erreur de **2 %** que nous commettrons, mais une erreur nettement moindre. En effet nous y effectuons la comparaison entre :

→ la Vitesse de Fin de Propulsion d'une fusée ayant éjecté toute son eau à une Vitesse d'Éjection constante (et basée sur la pression initiale)

→ et la Vitesse de Fin de Propulsion d'une fusée ayant vu sa Vitesse d'Éjection diminuer à mesure que diminuait adiabatiquement la pression interne dans son réservoir...

Le temps de propulsion de cette dernière fusée *adiabatique* est bien sûr un peu plus long ; le produit gT en sera donc un peu plus fort que dans le cas de la fusée à Vitesse d'Éjection constante ⁷... Mais cette différence nous paraît devoir tomber en dessous du %, du moins pour les fusées usuelles (dont la détente adiabatique ne modifie pas énormément la pression interne et donc la Vitesse d'Éjection et le Temps de Propulsion) : En effet, notre tableau de simulation nous informe que pour un Quota d'eau usuel de **1/3**, la durée de Propulsion n'est allongée que de **21,5 %** pour une Pression Initiale de **5 bars relatifs** ⁸ et que de **20,1 %** pour une Pression de **7 bars relatifs** ^{9 10}. Ce qui ne diminue la perte de vitesse par freinage gravitaire sur l'ensemble de la Phase Propulsive que de **0,09** et **0,07 m/s**, diminutions négligeables s'il en est ¹¹...

Nous ne mentionnerons plus par la suite ce produit gT dans cette étude. Il n'empêche que chacun devra veiller à le réintroduire dans le bilan de la Vitesse de Fin de Propulsion à l'issue des calculs...

Résumé de l'exposé qui suit

Au cours de cet exposé, nous calculerons analytiquement ce fameux K_{Adiab} et nous en proposerons même la valeur (selon une formule très simple n'utilisant que les trois paramètres du lancement que sont : Pression, Remplissage en Eau et un critère qui apparaîtra de lui-même et que nous nommerons *Masse Volumique* de la fusée, du moins au long des deux premières parties de cette étude).

⁷ Pour une fusée emportant **1/3** d'eau et pressurisée à **5 bars relatifs**, si l'on se basait pour calculer le temps d'éjection de l'eau sur la vitesse d'éjection en fin de propulsion, la durée de propulsion n'en serait allongée que de 40 %. Le soustractif gravitaire n'en serait donc accru que des 40 % de 2 %...

⁸ Ce qui fait passer le temps de propulsion de **0,0423** à **0,0514 secondes**.

⁹ Ce qui fait passer le temps de propulsion de **0,0358** à **0,0429 secondes**.

¹⁰ On note que plus la Pression Initiale est forte et moins la baisse adiabatique de pression allonge la phase propulsive. Mais cette baisse se stabilise assez vite autour de **16,7 %**. Elle n'est due, en réalité qu'au jeu sur la pression relative et la pression absolue. Dans le vide de l'espace, ce pourcentage d'allongement *adiabatique* de la phase propulsive serait constant et égal à **16,7 %**...

¹¹ À comparer toujours à l'ordre de grandeur des Vitesses de Fin de Propulsion de **50 m/s**.

Ce calcul de K_{Adiab} se fera d'abord en ne tenant compte que de la seule propulsion due à l'eau (sans effet de la hauteur de la colonne d'eau). Puis nous intégrerons la propulsion due à l'air résiduel. Enfin nous aurons la chance de pouvoir prendre en compte l'effet de la colonne d'eau sur la Pression d'éjection.

Ainsi, K_{Adiab} étant connu par une relation simple, chacun pourra l'utiliser dans l'équation (2) ci-dessus pour calculer la Vitesse de Fin de Propulsion recherchée.

L'altitude d'apogée de la fusée étant calculable analytiquement d'après cette Vitesse de Fin de Propulsion et les caractéristiques balistiques de l'engin (comme son C_x et sa Masse à sec)¹², notre exposé permettra aux curieux d'estimer, avec une précision de quelques pour cent, les performances de leurs créations.

PREMIÈRE PARTIE :

1 : ÉTUDE DE NOTRE COEFFICIENT K_{Adiab} POUR LA PROPULSION AQUEUSE UNIQUEMENT

Nous appellerons propulsion *aqueuse* de la fusée à eau la propulsion produite par la seule éjection de l'eau. Dans une deuxième partie, en effet, nous aurons l'occasion de calculer l'appoint propulsif, non négligeable, procuré par l'éjection de l'*air résiduel*, c'ad l'air comprimé qui reste dans le réservoir au moment où toute l'eau vient d'être éjectée. Cette propulsion due à l'éjection de l'air prendra symétriquement le nom de propulsion "*gazeuse*".¹³

PREMIÈRE ESTIMATION A MINIMA DE K_{Adiab}

Pour une première estimation *a minima* du coefficient K_{Adiab} , on peut évidemment considérer que toute la masse d'appui n'est éjectée qu'à une vitesse correspondant à la pression de fin de propulsion : Cette pression est donnée par la loi de détente adiabatique de l'air $PV^\gamma = \text{Cste}$:

¹² Voir par exemple notre autre travail LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE, dont nous donnons un exemple d'exploitation plus loin.

¹³ Nous adoptons ce faisant le vocabulaire utilisé par Alain Juge sur son site (voir lien en fin de texte)

$$P_{\text{FinProp}} = (P_{\text{init}} + 1)(Q_{\text{Air}}^\gamma) - 1_{\text{brelat}} \quad \text{où :}$$

P_{FinProp} est la Pression de Fin de Propulsion en **bars relatifs**.¹⁴

P_{init} est la Pression relative initiale (à $t = 0$)

Q_{Air} est le quota d'air enclos dans le réservoir de la fusée, c-à-d le quotient du volume d'air comprimé par le volume total du réservoir (les hydro-fuséistes utilisent en général des quotas proches de $2/3$).

γ est le fameux exposant utilisé pour la quantification d'une détente adiabatique (**1,4** pour l'air comprimé qui stocke l'énergie de nos engins).

Remarquons que la pression à prendre en compte ici n'est pas la pression absolue mais la pression relative...

Cette valeur de la Pression minimum conduit à une vitesse minimum d'éjection hydraulique¹⁵ V_{mini} de :

$$V_{\text{mini}} = \sqrt{2\{(P_{\text{init}} + 1)(Q_{\text{air}}^\gamma) - 1_{\text{brelat}}\} / \rho} \quad \text{où :}$$

ρ est la densité du fluide éjecté (pour nous de l'eau).

γ est l'exposant adiabatique classique (**1,4** pour l'air).

La comparaison par quotient de cette vitesse avec la vitesse d'éjection initiale dont nous informe la loi de Bernoulli¹⁶ :

$$V_{\text{éjectInit}} = \sqrt{2P_{\text{init}} / \rho}$$

...nous permet de libeller un coefficient multiplicateur **EstimMinima** inférieur à l'unité tel que :

$$V_{\text{mini}} = V_{\text{éjectInit}} \text{ **EstimMinima** , **EstimMinima** honorant la formule :$$

$$\text{**EstimMinima**} = \sqrt{\{(P_{\text{init}} + 1)(Q_{\text{air}}^\gamma) - 1_{\text{brelat}}\} / P_{\text{init}}}$$

¹⁴ Nous écrivons 1_{brelat} car il nous gêne de laisser, dans une formule littérale ce chiffre **1** sans son unité car on pourrait croire que c'est un coefficient de nos formules. Nous avons choisi de mesurer les Pressions en bars relatifs ; la dimension de ce 1 est donc le **bar relatif**.

¹⁵ Nous faisons le calcul en considérant l'écoulement comme *stationnaire* à chaque instant, càd en considérant classiquement que le niveau d'eau varie "lentement". La vitesse à la tuyère est alors tirée de la loi de conservation de l'énergie totale. Un calcul plus complet, en *instationnaire*, donne des résultats très peu différents...

De plus nous négligeons ici le surcroît de pression statique à la tuyère dû à la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de cette tuyère...

¹⁶ Nous revenons plus bas sur l'établissement de cette Vitesse d'éjection.

La Vitesse de Fin de Propulsion de nos fusées à eau est donc supérieure à :

$$U_{\text{FinProp}} = \text{EstimMinima } V_{\text{éjectInit}} \text{ Ln}\{(M+Q)/M\}$$

avec :

$$\text{EstimMinima} = \sqrt{\{(P_{\text{init}}+1)(Q_{\text{air}}^\gamma) - 1_{\text{brelat}}\} / P_{\text{init}}}$$

EstimMinima est bien la valeur minimale du coefficient K_{Adiab} dont nous pondérons la formule générale de Tsiolkovski...

On voit que la valeur de ce coefficient **EstimMinima** dépend malheureusement de P_{init} et de Q_{air} , mais on peut néanmoins la calculer pour certains cas classiques, en particulier les cas, fréquents en milieu scolaire, où la pression relative P_{init} est limitée à 5 bars relatifs pour des raisons de sécurité :

À cette pression de 5 b relatifs, le coefficient **EstimMinima** prend la valeur **0,48** pour un quota d'air enclos classique de $Q_{\text{Air}}=2/3$ et **0,255** pour $Q_{\text{Air}}= 1/2$... Au plus bas, la vitesse à atteindre de nos fusées à eau sera donc :

$$U_{\text{FinPropMini}} = \text{EstimMinima } V_{\text{éjectInit}} \text{ Ln}\{(M+Q)/M\} \quad \text{avec :}$$

EstimMinima valant, pour $P_{\text{init}} = 5$ b relatifs, de **0,48** à **0,255** selon le quota d'air enclos Q_{Air}
(Attention, le **Q** du logarithme du rapport de masses dépend évidemment également de Q_{Air}).

À ce stade de la réflexion, on peut évidemment estimer que dans la réalité des choses, la Vitesse de Fin de Propulsion de nos fusées à eau se situera entre la valeur calculée avec un K_{Adiab} égal à cet **EstimMinima** (pour les P_{init} et Q_{Air} adoptés) et la valeur calculée avec un K_{Adiab} égal à 1.

C'est déjà une première fourchette...

INTÉGRATION ANALYTIQUE DU PROBLÈME

Notre connaissance de la physique de la propulsion va nous permettre de calculer la vitesse acquise en fin de propulsion par une fusée à eau.

Dans un premier temps, nous effectuerons ce calcul :

→ en nous limitant à la propulsion due à la seule éjection de l'eau (donc sans l'effet propulsif dû à la violente chasse d'air qui se produit lorsque toute l'eau a été éjectée) ¹⁷

→ et compte non tenu de la pression due à l'accélération de la colonne d'eau au-dessus de la tuyère). ¹⁸

En cours de calcul, nous serons amenés à nous affranchir de la variable temps, en prenant comme variable le taux d'expansion **E** de l'air dans le réservoir. Dans les cas usuels, ce taux d'expansion **E** variera pendant la Phase Propulsive de **E = 1** à **E = 1/ Q_{Air}**. Ces valeurs seront donc les limites à utiliser pour l'intégration du problème.

Pour commencer, considérons la force de propulsion, la Poussée. Elle est donnée, à chaque instant, par la formule très mnémotechnique : **2 P_{Tuy} S_{Tuy}** (avec **P_{tuy}**, la pression **relative** instantanée à la tuyère et **S_{Tuy}** la surface de la tuyère d'éjection) (voir à ce sujet notre note de fin de texte sur l'[Application de la formule de Bernoulli à la propulsion de la fusée à eau](#)).

Cette **Poussée**, ou force de propulsion, est appliquée à chaque instant sur la masse :

$$M + \rho V_f (1 - Q_{Air} E) \quad \text{où :}$$

M est la Masse à Vide de la fusée

V_f est le volume du réservoir de la fusée

ρ le densité du fluide éjecté (l'eau dans la plupart des cas)

Q_{Air} le quota d'air dans le réservoir

E le taux d'expansion de cet air (variant donc de 1 à 1/ Q_{Air})

¹⁷ Le calcul tenant compte de l'apport propulsif de l'éjection de l'air sera réalisé dans la deuxième partie...

¹⁸ Des simulations nous ont persuadé que l'accélération de cette colonne n'augmente la Vitesse de Fin de Propulsion que de quelque 3 % . Cette augmentation étant d'ailleurs possiblement compensée par la traînée due à la pénétration de l'engin dans l'air.

Réfléchissons à l'effet de la hauteur de la colonne d'eau sur la pression à la tuyère : On peut songer, dans un premier temps, que les accélérations maximales atteintes par nos engins hydropneumatiques sont importantes (de l'ordre de **40 g**). Mais ces accélérations formidables n'interviennent que lorsque la fusée a été notablement allégée, càd quand la masse d'eau a été en grande partie éjectée. Comme la masse d'eau restante est faible, on a également une faible hauteur de la colonne d'eau (de quelques cm). Or on sait qu'une accélération de 1 g donne une pression de 1 bar sur une colonne d'eau type de 10m. Comme notre colonne d'eau ne fait que quelques millièmes de cette hauteur type, il faudra 1000 g pour créer quelques bars de pression supplémentaire à la tuyère. Or nous n'avons des accélérations maximales que de 40g, soit 25 fois moins... La pression supplémentaire due à la colonne d'eau n'est donc que de quelques 1/25 ème de b, soit quelques 100^{ème} de la pression de fin de propulsion.

Dans ces conditions, l'accélération $U'_{(t)}$ est, à chaque instant

(Équation 25)

$$U'_{(t)} = -g + \frac{2 S_{Tuy} P_{Tuy}}{M + \rho V_f (1 - Q_{Air} E)}$$

(car il faut tenir compte du freinage par gravité)

Conséquemment, la vitesse $U_{FinProp}$ acquise en fin de propulsion (à l'instant T) sera l'intégration de cette formule dans l'espace de $t = 0$ à $t = T$:

$$U_{FinProp} = \int_{de t = 0}^{à t = T} \left[-g + \frac{2 S_{Tuy} P_{Tuy}}{M + \rho V_f (1 - Q_{Air} E)} \right] dt$$

On peut, d'entrée, résoudre le problème de l'intégration de $-g dt$. Elle vaut $-gT$. Il reste donc :

(Équation 30)

$$U_{FinProp} = -gT + \int_{de t = 0}^{à t = T} \frac{2 S_{Tuy} P_{Tuy}}{M + \rho V_f (1 - Q_{Air} E)} dt$$

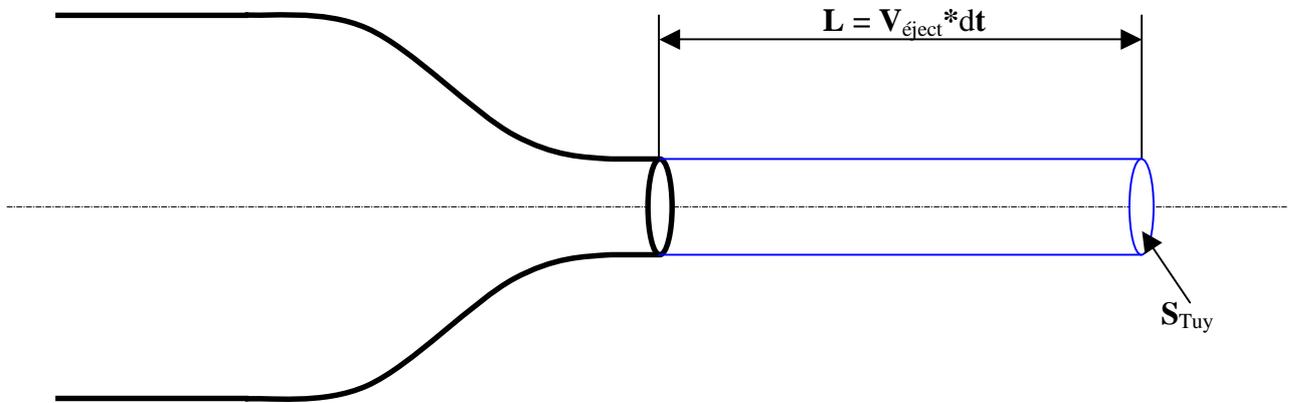
À ce point de la démarche, nous allons opérer notre changement de variable, ceci afin de nous affranchir du facteur temps : en effet, la durée de propulsion T est une variable dépendant de la plupart des autres paramètres...

La nouvelle variable que nous allons utiliser pour l'intégration est E , le taux d'expansion de l'air (variation de son volume relativement à son volume sur le Pas de Tir). Dans le cas général¹⁹, ce taux E évolue donc de 1 à $1/Q_{Air}$ si Q_{Air} est le quota d'air dans le réservoir sur le pas de Tir.

Exprimons dt par rapport à cette variable E :

¹⁹ On verra plus loin ce qui se passe dans certains cas extrêmes...

Pour ce faire, il faut penser au débit massique D_m . Que vaut ce débit massique ? Pour le trouver, il faut isoler (par la pensée) l'eau éjectée par la tuyère pendant un temps élémentaire dt seconde ; cette eau se présente sous la forme d'un gros spaghetti liquide, un cylindre d'eau *extrudé*²⁰ par la tuyère²¹ :



La longueur du spaghetti éjecté pendant cette durée dt est : $L = V_{\text{éject}} * dt$. Et son volume est $L * S_{\text{Tuy}}$, soit $V_{\text{éject}} * dt * S_{\text{Tuy}}$.

La masse éjectée, quant à elle, est bien sûr : $\rho V_{\text{éject}} * dt * S_{\text{Tuy}} \dots$

Pour connaître le débit massique D_m en **Kg/s**, il faut diviser cette masse par le temps dt pendant lequel elle a été éjectée. Ce débit massique est donc :

$$D_m = \rho V_{\text{éject}} S_{\text{Tuy}}$$

Or la loi de la conservation de l'énergie (celle de Bernoulli), on l'a vu, nous donne la valeur de la vitesse d'éjection en fonction de la pression P_{Tuy} du liquide à la tuyère. Cette vitesse d'éjection est :

$$V_{\text{éject}} = \sqrt{2P_{\text{Tuy}}/\rho}$$

On a donc :

$$D_m = \rho S_{\text{Tuy}} \sqrt{2P_{\text{Tuy}}/\rho}$$

Ceci est une chose.

À présent, nous devons penser que le débit massique D_m n'est autre que l'inverse de la variation, par unité de temps, de la masse de liquide dans le réservoir (inverse puisque la diminution de liquide dans le réservoir crée un débit positif à travers la tuyère).

²⁰ *Extrudé* est bien le terme technique. Les spaghettis sont bien formés par *extrusion*, comme les profilés d'aluminium...

²¹ Que l'eau éjectée se présente sous une autre forme (en particulier une forme moins *mathématique*) ne change en rien son volume...

Comme la masse d'eau restante est $\rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)$, le débit massique D_m est sa dérivée par rapport au temps :

$$D_m = \frac{d}{dt} [\rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)]$$

Ce qui donne :

$$D_m = \rho V_f Q_{\text{Air}} \frac{dE}{dt}$$

On peut donc accoler ces deux valeurs de D_m :

$$\rho S_{\text{Tuy}} \sqrt{2P_{\text{Tuy}}/\rho} = \rho V_f Q_{\text{Air}} \frac{dE}{dt}$$

...de laquelle égalité on tire :

$$\boxed{dt = \frac{\rho V_f Q_{\text{Air}}}{S_{\text{Tuy}} \sqrt{2\rho P_{\text{Tuy}}}} dE}$$

...qui sera notre valeur de l'incrément dt en fonction de dE , l'incrément de l'expansion.

Ne tirons pas de cet encadré la conclusion que dt est proportionnel à dE : P_{Tuy} est une quantité tout à fait variable selon l'expansion E !

À présent, remplaçons dans l'équation (30) cet incrément dt par sa valeur :

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{2 S_{\text{Tuy}} P_{\text{Tuy}} \rho V_f Q_{\text{Air}}}{\{M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)\} S_{\text{Tuy}} \sqrt{2\rho P_{\text{Tuy}}}} dE$$

Après simplification et en sortant de l'intégrale tous les paramètres constants durant le vol, cela donne :

(Équation 35)

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{P_{\text{Tuy}}}}{M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)} dE$$

Il faut penser, à ce stade, à exprimer P_{Tuy} par rapport à l'expansion de l'air enclos.

Puisque nous conservons, pour l'instant, l'option que la hauteur de la colonne de liquide au-dessus de la tuyère ne produit pas de pression sous l'effet de l'accélération de la fusée, nous avons $P_{\text{Tuy}} = P$ (avec P la pression de l'air à la surface libre du liquide) et donc la force de propulsion est : $2 P S_{\text{tuy}}$.

On a, comme toujours lors d'une expansion adiabatique, la pression instantanée P donnée par :

$$(P+1)V^\gamma = (P_{\text{init}}+10^5)V_{\text{init}}^\gamma \quad \text{ce qui, dans notre cas, donne :}$$

$$P = (P_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5 \quad 22$$

$$(P_{\text{init}} + 1_{\text{brelat}})/E^\gamma - 1_{\text{brelat}}$$

L'équation U_{FinProp} en devient alors :

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{(P_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5}}{M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)} dE$$

Attention, la pression P_{init} sous le radical doit être exprimée en Pascals relatifs !

²² La Pression initiale P_{init} doit être exprimée en Pascals relatifs !

Ce qui peut se simplifier en :

(Équation 39)

$$U_{\text{FinProp}} = -\mathbf{gT} + Q_{\text{Air}} \sqrt{2/\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{(\mathbf{P}_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5}}{(\mathbf{M}/\rho V_f) + 1 - Q_{\text{Air}} E} dE$$

où :

\mathbf{P}_{init} doit être exprimée en Pascals relatifs !

\mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur

\mathbf{T} est la durée de la propulsion

V_f est le volume total du réservoir de la fusée

E est le taux d'expansion depuis $t = 0$ (où il est égal à 1) à $t = T$ (où il est égal à $1/Q_{\text{Air}}$)

ρ est la masse volumique de l'eau

\mathbf{P}_{init} est la pression initiale sur le Pas de Tir

\mathbf{M} la masse à vide de la fusée

Q_{Air} est le Quota d'air dans le réservoir sur le Pas de Tir

Dans cette équation (39), le produit \mathbf{gT} , qu'on pourrait appeler *freinage gravitaire*, sera souvent très faible étant donné le temps très bref de la propulsion hydropneumatique (du moins pour les fusées « plein goulot »). Par exemple, pour une fusée de **1,5 L**, plein goulot²³, le temps de propulsion ne dépasse pas 0,05 secondes, ce qui confère au produit \mathbf{gT} la valeur **0,5 m/s**. Cette valeur du freinage gravitaire est, on le voit, négligeable.

C'est pourquoi nous allons nous affranchir de ce produit \mathbf{gT} pour ne plus considérer dans les réflexions qui suivent que la valeur de U_{FinProp} énoncée par l'équation (40) suivante :

(Équation 40)

$$U_{\text{FinProp}} = Q_{\text{Air}} \sqrt{2/\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{(\mathbf{P}_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5}}{(\mathbf{M}/\rho V_f) + 1 - Q_{\text{Air}} E} dE$$

(valeur de la Vitesse de Fin de Propulsion compte non tenu de la gravité) où, comme plus haut :

\mathbf{P}_{init} doit être exprimé en Pascals relatifs

V_f est le volume total du réservoir de la fusée

E est le taux d'expansion depuis $t = 0$ (où il est égal à 1) à $t = T$ (où il est égal à $1/Q_{\text{Air}}$)

ρ est la masse volumique de l'eau

²³ C-à-d éjectant sa masse d'appui par le goulot "limonade", de 21,7mm de diamètre...

P_{init} est la pression initiale sur le Pas de Tir
 M la masse à vide de la fusée
 Q_{Air} est le Quota d'air dans le réservoir sur le Pas de Tir

EXÉGÈSE DE CETTE ÉQUATION (40) :

Notre projet, rappelons-le est de réaliser une généralisation de la Formule de Tsiolkovski à la fusée à eau, cette généralisation se présentant comme suit :

(Équation 2)

$$U_{FinProp} = K_{Adiab} V_{éjectInit} \text{Ln}\{(M+Q)/M\}$$

équation où :

K_{Adiab} serait un coefficient prenant en compte les spécificités de la propulsion hydropneumatique et $V_{éjectInit}$ la Vitesse d'éjection au début de la Phase Propulsive, (vitesse prise comme référence, donc).

Exégèse de l'équation (40) dans les cas usuels

→ On peut remarquer incidemment que si l'on donne au coefficient γ une valeur nulle (càd si l'on se place dans une situation où la pression instantanée reste constante, puisque, selon la loi de la détente adiabatique $P V^\gamma = \text{Constante}$, lorsque γ est nul P est constant.) on se retrouve dans le cas des fusées à feu dont la pression d'éjection est ~ constante (et donc le débit) ²⁴.

La pression initiale P_{init} peut alors facilement être sortie de l'intégration et, si

l'on remarque que $V_{éjectInit} = \sqrt{2P_{init}/\rho}$, l'intégration de l'équation (40) est plus simple et résulte en la formule classique de Tsiolkovski. Le coefficient K_{Adiab} prenant alors la valeur 1...

→ Dans l'équation (40), $U_{FinProp}$ dépend de P_{init} . C'est fâcheux car cela laisse penser que K_{Adiab} dépendra également de cette pression initiale.

→ Dans l'équation (40), $U_{FinProp}$ ne dépend pas, par contre, de S_{Tuy} qui a disparu par simplification lors du calcul. Notre formulation vaudra donc également pour les fusées à tuyère réduite.

→ Également, on remarque que, dans l'intégrale $U_{FinProp}$, la seule référence à la Masse à Vide est au dénominateur sous la forme $M/\rho V_f$ (M étant la masse à vide de la fusée, V_f étant le volume de son réservoir).

²⁴ Ceci sur l'essentiel de la phase propulsive. Mais ce qui nous importe surtout c'est que nous retrouvons les conventions qui président à l'établissement de l'équation de Tsiolkovski (débit et vitesse d'éjection constants). En fait, de ces deux conventions, seul celle de la constance de la vitesse d'éjection est nécessaire à l'intégration de Tsiolkovski...

Si l'on admet que nos fusées éjectent toujours de l'eau, on est donc amené à introduire la notion de *Masse Volumique* de la fusée : cette notion est assez intuitive, finalement, puisqu'elle rapporte, par quotient, la masse "utile" de nos fusées à leur capacité de stockage d'énergie. Elle se rapproche donc du rapport poids/puissance qui caractérise les véhicules tels qu'automobiles et motos... Nous définissons donc la **Masse Volumique** d'une fusée à eau comme le quotient en **Kg/M³** de sa masse à vide par le volume de son réservoir. (dans les propositions empiriques ci-dessous la dimension de ladite Masse Volumique sera parfois le **g/L**, unité non scientifique, mais plus pratique à manier)

C'est donc en fonction de cette Masse Volumique que nous tenterons de donner des résultats valant pour des fusées de tous volumes et de toutes masses à vide...

Exégèse de l'équation (40) dans les cas limites (non usuels)

Étudions à présent ce qui se passe dans des conditions très particulières de remplissage en eau :

→ **Lorsque le Quota d'eau tend vers 0**, on peut pressentir intuitivement que l'éjection de la très faible quantité d'eau se fera à vitesse d'éjection quasiment constante puisque cette éjection est effectuée avec une expansion minimale de l'air et donc à une pression très proche de la pression initiale. Le Coefficient Adiabatique K_{Adiab} tends donc, pour ce remplissage en eau presque nul, vers **1**²⁵.

→ **Lorsque le Quota d'eau tend, à l'inverse, vers 1**, la place réservée à l'air comprimé est réduite au minimum. Mais cela n'empêche pas la petite quantité d'air d'être comprimé à la pression initiale que l'on désire. La vitesse d'éjection initiale sera donc la même que dans des conditions plus banales, mais cette vitesse d'éjection chutera très vite dès que quelques molécules d'eau auront été éjectées (la très petite quantité d'air se détendant très vite).

Nous reviendrons sur ce cas limite des forts Quotas d'eau dans le commentaire de nos résultats, au chapitre qui suit...

²⁵ Nous ne nous intéressons pour le moment qu'à la propulsion aqueuse. L'éjection de l'air sera prise en compte plus loin dans cette étude...

INTÉGRATION GRAPHIQUE SOUS EXCEL

L'intégration que nous ferons de la Vitesse de Fin de Propulsion dégagée plus haut, à savoir :

(Équation 40)

$$U_{\text{FinProp}} = Q_{\text{Air}} \sqrt{2/\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{(P_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5}}{(M/\rho V_f) + 1 - Q_{\text{Air}} E} dE$$

...n'est, on le devine, qu'une intégration *graphique*. Elle consistera à dessiner la courbe de l'accroissement instantané de vitesse U'_t (c-à-d le quotient sous le signe de l'intégrale) selon le taux d'expansion E de l'air enclos, puis à mesurer la surface de cette courbe depuis l'abscisse $E=1$ à l'abscisse à $E=1/Q_{\text{Air}}$.

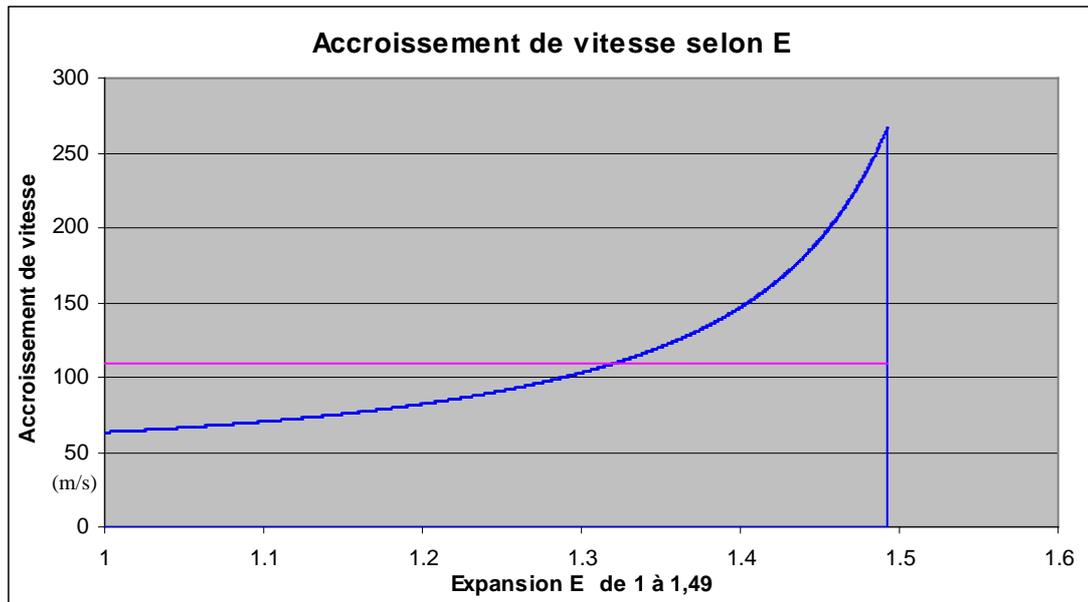
La connaissance de U_{FinProp} nous permettra, par référence à l'équation (2) page 2, de déterminer la valeur du coefficient adiabatique K_{Adiab} par comparaison de cette vitesse acquise U_{FinProp} avec la vitesse qu'acquerrait la fusée si la vitesse d'éjection était

constante et égale à $V_{\text{éjectInit}} = \sqrt{2P_{\text{init}}/\rho}$.

Premiers résultats :

La construction d'un premier tableau Excel (de quelque **1500** lignes) nous procure nos premiers résultats :

Voici la courbe montrant l'accroissement de vitesse d'une fusée de **67 Kg/M³** de Masse Volumique ²⁶, lancée avec **1/3** d'eau (donc **2/3** d'air) à la pression de **7 b relatifs** ²⁷ :



L'expansion de l'air enclos se produit de **E = 1** à **E = 1,493**, valeur pour laquelle toute l'eau a été éjectée.

En bleu est donc l'accroissement de vitesse (en **m/s**) à chaque pas d'expansion (le pas choisi, est ici est **3,33 10⁻⁴**, ce qui étend le calcul sur près de **1500** lignes de tableau).

Il faut faire très attention, lors de la lecture de ce graphe, au fait que l'accroissement de vitesse ne constitue pas une accélération (du fait qu'il est calculé en référence à l'expansion et non au temps).

En violet, nous avons fait figurer l'accroissement de vitesse moyen sur la plage d'Expansion de **0,493** considérée : **108,6 m/s**. La surface comprise entre cette courbe violette et l'axe des **x** est évidemment la même que la surface entre la courbe bleue et le même axe : elle représente l'intégrale que nous recherchons : la Vitesse de Fin de Propulsion aqueuse.

²⁶ Nous avons défini la **Masse Volumique** d'une fusée à eau comme le quotient de sa masse à vide par le volume de son réservoir. Cette valeur de **67 Kg/M³** correspond à une fusée de **1,5 L** et d'une **masse à sec** de **100g**.

²⁷ Qu'on nous pardonne d'utiliser encore cette unité au lieu du Pascal. La raison en est que c'est bien le Bar qui figure sur la plupart des pompes. Il correspond à **1000 hPa**, c-à-d la pression atmosphérique moyenne...

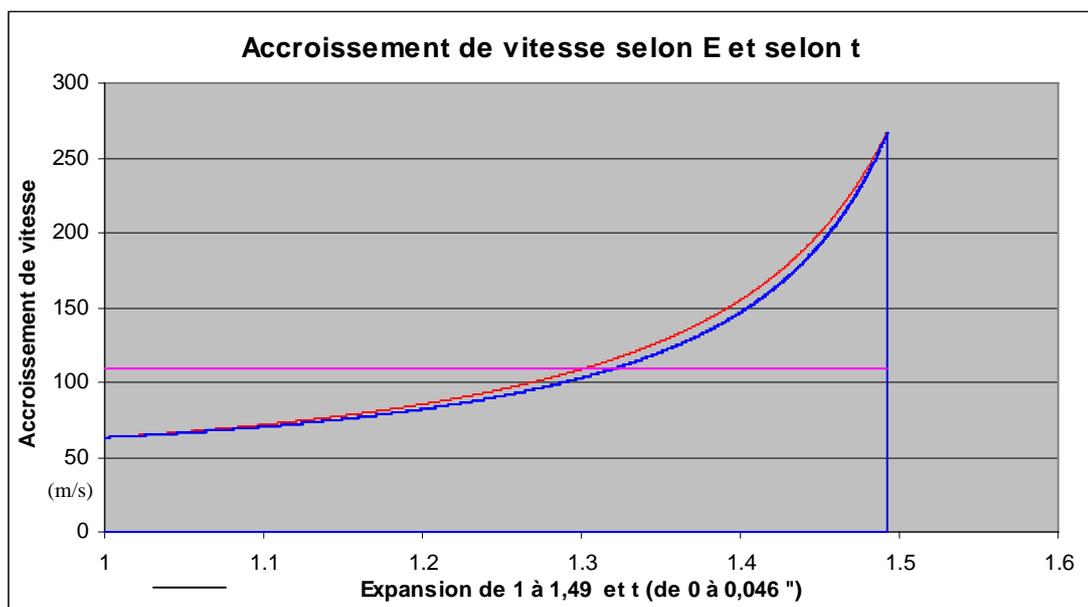
On peut cependant calculer et dessiner le même accroissement de vitesse en référence au temps puisque nous connaissons la loi de correspondance entre le pas d'expansion $dt_{(E)}$ ²⁸ et le pas de temps : nous l'avons [précédemment](#) établie (page 8) comme :

$$Dt_{(E)} = \frac{\rho V_f Q_{air}}{S_{Tuy} \sqrt{2\rho P_{tuy}}} dE$$

Cette loi nous permet de calculer le moment, la *date*, où est réalisé chaque taux d'expansion, par simple sommation de tous les $dt_{(E)}$ déjà révolus.

La date de chaque taux d'expansion étant ainsi connue, on peut donc redessiner la courbe de l'accroissement de vitesse en fonction du temps : Dans la pratique, on reprend les mêmes accroissements de vitesses, mais en les redistribuant horizontalement d'une façon donnant un déroulement régulier du temps²⁹, l'échelle de représentation de ce temps (qui court de **0** à **T**) étant pondérée pour occuper la même longueur que celle de l'Expansion (qui court de **1** à **1,493** pour **E**).

Cela donne la courbe rouge (accroissement de vitesse en référence au temps) :



Dans un premier temps, on peut trouver cette courbe rouge pas très éloignée de la courbe bleue (accroissement de vitesse en référence à l'Expansion) : Mais cette impression est trompeuse : la différence d'abscisse observée au milieu des courbes pour la même ordonnée est quand-même de **9 %**. De plus, bien que cela ne se remarque guère, cette différence relative se fait beaucoup plus forte à gauche pour les Expansions plus proche de **1**.

²⁸ Nous notons ce pas $dt_{(E)}$ afin de bien signifier qu'il dépend de **E**

²⁹ en coordonnées cartésiennes, donc...

Quoiqu'il en soit de la représentation de l'accroissement de vitesse (en fonction de l'expansion ou du temps), nous connaissons à présent la valeur de U_{FinProp} pour les paramètres de vol donnés plus haut. C'est le produit de l'accroissement (**108,6 m/s**) moyen de vitesse par la largeur de la plage d'Expansion considérée (**0,493**) :

$$U_{\text{FinProp}} = 108,6 * 0,493 = 53,55 \text{ m/s}$$

Cette vitesse tournant autour des **50 m/s** est d'ailleurs une vitesse usuelle à retenir...

Il nous est facile, à présent, de déterminer le coefficient adiabatique qui pondère notre formule de Tsiolkovski étendue à cette fusée à eau. C'est :

$$K_{\text{Adiab}} = \frac{U_{\text{FinProp}}}{V_{\text{éjectInit}} \text{Ln}\{(M + Q)/M\}}$$

Numériquement, cela donne :

$$K_{\text{Adiab}} = 53,55 / 37,42 \text{ Ln } 5,925$$

$$\text{puisque } V_{\text{éjectInit}} = \sqrt{2P_{\text{init}}/\rho} = 37,42 \text{ m/s} ,$$

... et que le Rapport de Masse se hisse à **5,925** .

La valeur de K_{Adiab} pour le vol de cette fusée de **67 Kg/M³** , remplie de **1/3** d'eau et lancée à la pression de **7 b relatifs**, est donc :

$$K_{\text{Adiab}} = 0,8043$$

... ce que Excel donne bien sûr automatiquement...

Extension du calcul :

Nous sommes encouragés par ces premiers résultats. Il nous vient même l'idée, afin d'utiliser pleinement notre tableau d'intégration, de déterminer le pas d'Expansion **dE** (constant pour toutes les lignes du tableau) de telle sorte que les **1500** lignes de notre tableau soient toutes utilisées : le pas d'intégration est ainsi le plus *fin* possible.

Ce calcul du pas est simple : il suffit de diviser l'intervalle d'expansion (de **1** à **1/Q_{air}**, dans les cas usuels, ce qui donnait ~ **0,5** dans l'exemple précédent) par le nombre de lignes allouées au calcul...

C'est fort de cette amélioration appréciable que nous décidons de reproduire par copier/coller notre tableau à une dizaine d'exemplaires sur la même feuille, en

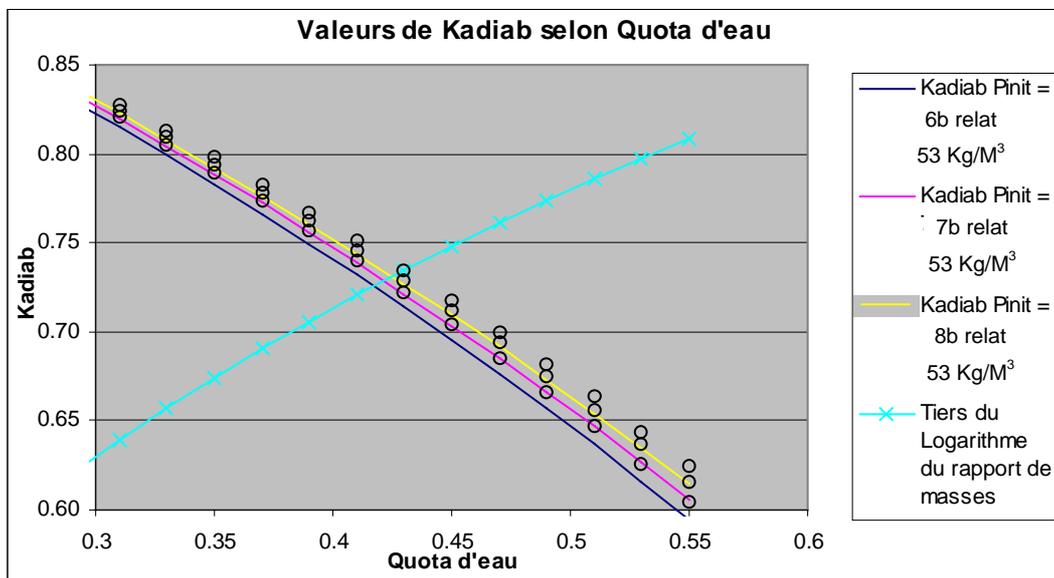
assignant à chacun de ces nouveaux tableaux le calcul pour un certain Quota d'air dans le réservoir.

D'une façon générale nous décidons, à partir d'ici, de caractériser le remplissage de la fusée sur son pas de tir par son **Quota d'eau** et non plus par son **Quota d'air** qui nous à bien servi, jusque là dans notre travail analytique...³⁰

Ces calculs en série vont nous prouver que, dans la pratique, K_{Adiab} prend des valeurs de **0,813** à **0,65** pour des Quotas **d'eau** variant de **0,33** à **0,5**, et ceci (de façon surprenante) avec très peu d'influence de la Pression initiale et de la *Masse Volumique* de la fusée (moins de **1 %** de variation de K_{Adiab} pour une pression initiale passant de **6** à **8** bars relatifs et moins de **0,5 %** de variation pour des Masses Volumiques de fusée passant de **57** à **77 Kg/M³** soit une masse à vide passant de **0,85** à **115g**).³¹

Voici, pour illustrer ces dires, les évolutions de K_{Adiab} selon le Quota **d'eau** enclos et pour les Pressions Initiales de **6, 7 et 8 bars relatifs**, ceci pour une masse à vide de **80 g** (pour **1,5L** de volume de réservoir, soit une Masse Volumique de la fusée de **~ 53 Kg/M³**).

Les trios de marques non colorées représentent les courbes pour les mêmes pressions, mais pour une Masse à Vide de **120g /1,5L**, soit une Masse Volumique de la fusée de **80 Kg/M³** :



³⁰ Sur les aires de lancements, on entend d'ailleurs plus souvent parler du taux de remplissage en eau que du taux d'air...

³¹ Il ne faudra pas oublier cependant que la pression est prise en compte dans la Vitesse d'éjection initiale de notre formule de Tsiolkovski étendue et que la Masse Volumique est intégrée dans le calcul du logarithme du Rapport de Masse $\text{Ln}\{(M+Q)/M\}$ de cette même formule !

Première constatation : Les trios de marques rondes non colorées, représentatifs de K_{Adiab} pour les trois même pressions mais pour une Masse Volumique de la fusée augmentée à 80 Kg/M^3 montrent que K_{Adiab} dépend assez peu de la **Masse Volumique** de la fusée.

C'est une bonne surprise dans le cadre de notre recherche de K_{Adiab} (mais attention, cette Masse Volumique influe cependant beaucoup sur le rapport des masses de la fusée présent dans la formule de Tsiolkovski).

Noter que pour cette Masse Volumique augmentée, les courbes du K_{Adiab} se situent plus haut que pour une Masse Volumique plus faible.

Deuxième constatation : La variation de K_{Adiab} selon le **Quota d'eau** est négative. C'est tout à fait naturel : avec un **Quota d'eau** très faible, l'air emplit presque tout le volume et il n'y a presque pas de chute (adiabatique) de la pression durant l'éjection de cette faible quantité d'eau...

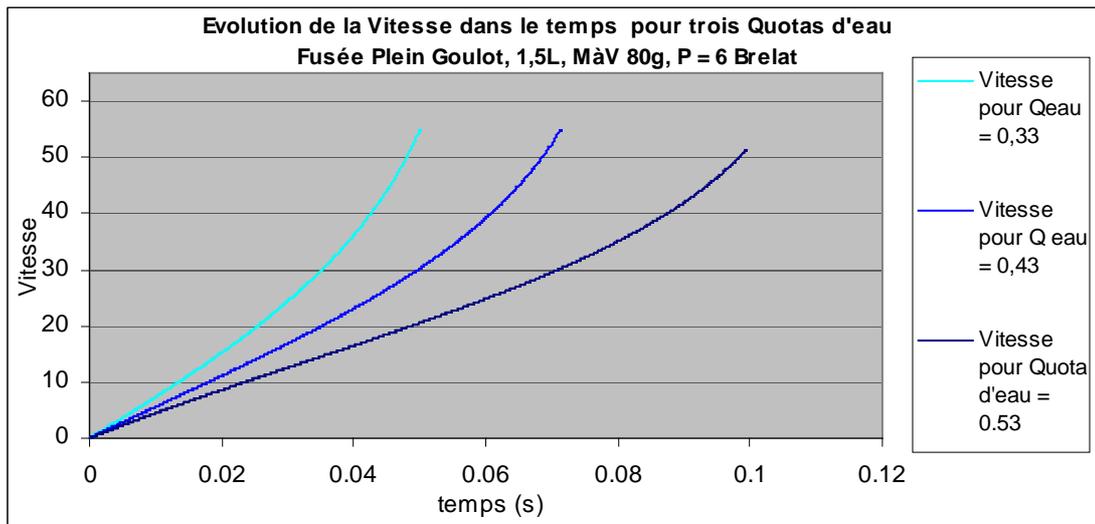
Troisième constatation : Cette courbe K_{Adiab} selon le **Quota d'eau** est tout à fait linéarisable. C'est une excellente chose. On peut donc envisager l'établissement d'une relation simple entre K_{Adiab} et le **Quota d'eau**...

Quatrième constatation : Si le coefficient K_{Adiab} dépend nettement du **Quota d'eau**, il faut également penser que ce **Quota d'eau** a aussi une grande influence sur le Rapport de Masses de la fusée. Or il est notable que l'évolution de ce Rapport des Masses est positive lorsque le **Quota d'eau** croît (la courbe bleu clair montre, quant à elle, la variation du logarithme de ce Rapport de Masses selon le Quota d'eau, puisque c'est sous cette forme que le Rapport des Masses agit dans la formule de Tsiolkovski) : Cette évolution du logarithme contrebalance donc pour partie la chute corrélative du coefficient adiabatique K_{Adiab} ³². On peut donc prédire que la Vitesse de Fin de Propulsion U_{FinProp} ne variera pas énormément selon le **Quota d'eau**.

Vérifions-le sur le graphe suivant, qui donne l'évolution dans le temps de la vitesse de la fusée "plein goulot"³³ de **80 g** pour différents remplissages en eau (**0,33**, **0,43** et **0,53**) et à la pression typique de **6 bars relatifs** (sans influence de la gravité, de la hauteur de la colonne d'eau et pour la seule propulsion *aqueuse*) :

³² La Vitesse de Fin de Propulsion dépend en effet du produit de K_{Adiab} et de ce logarithme.

³³ C'est éjectant sa masse d'appui par le goulot "limonade", de 21,7mm de diamètre...



On y remarque effectivement, à la pente initiale de courbes, que si l'accélération d'une fusée embarquant plus d'eau est beaucoup plus faible, cette accélération durant plus longtemps, la vitesse atteinte en fin de propulsion est assez peu différente (**-6 %**, ici pour le **Quota d'eau de 0,53**).

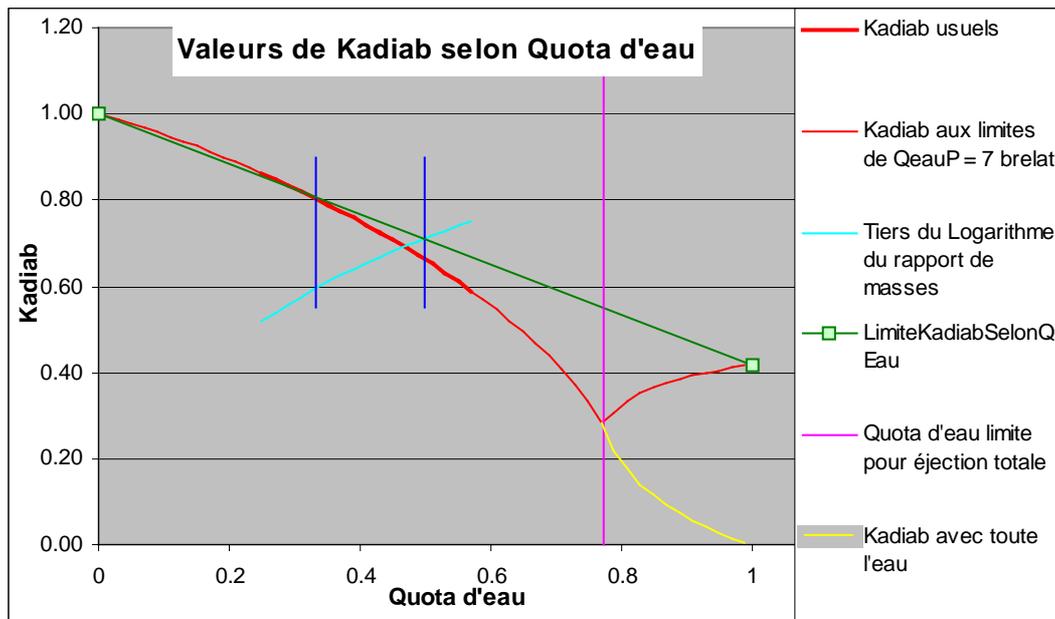
C'est assez surprenant. Mais l'on peut songer que si une fusée très remplie en eau est plus massive à accélérer et dispose de moins d'énergie stockée (le volume alloué à l'air comprimé étant moindre), elle dispose en revanche de plus de masse d'appui à éjecter : il semble que ce gain en *potentiel en réaction* compense en partie la plus grande masse au décollage et le plus faible emport d'énergie.

Il faudra s'en souvenir si l'on désire filmer le vol de ses fusées et avoir sur l'image autre chose qu'un vague fantôme de silhouette d'engin...

Étude de K_{Adiab} aux limites de Q_{eau} :

Il nous a semblé intéressant de tracer la courbe complète de K_{Adiab} sur toute la plage du Quota d'eau (de 0 à 1). Voici cette courbe, en rouge, pour une **Pression initiale** de 7 bars relatifs et une Masse Volumique de la fusée de **67 Kg/M³** :

La plage de Quotas d'eau s'étend de 0 à 1. Les deux traits verticaux bleu foncé indiquent la zone usuelle des Quotas d'eau, déjà évoquée plus haut. La courbe rouge plus épaisse illustre les Quotas d'eau un peu moins usuels mais malgré tout pratiqués...



→ À gauche, ainsi qu'il a été dit plus haut lors de l'exégèse de l'équation (40) dans ses cas limites, K_{Adiab} prend effectivement la valeur limite de 1 pour un Quota d'eau extrême de 0, puisque alors toute l'éjection de la très faible quantité d'eau se fait presque sans détente et donc quasiment à la Pression Initiale.

→ À droite, un peu avant le Quota d'eau 0,8, au passage de la verticale fuchsia, la courbe rouge montre un point de rebroussement. Ce rebroussement est dû au fait qu'à partir de ce Quota d'eau la quantité d'air comprimé est trop faible pour assurer l'expulsion de la totalité de l'eau : l'air enclos ayant retrouvé au cours de sa détente la pression de l'atmosphère extérieure, une certaine quantité d'eau demeure donc à l'intérieur de l'enceinte de la fusée. Comme cette eau n'a pas été éjectée, il ne peut être justifié de la compter dans le Rapport des Masses de l'équation de Tsiolkovski³⁴.

La quantité d'eau résiduelle ne pouvant être comptée dans le rapport de Masses, on ne peut faire autrement que de la faire rentrer dans la Masse à Vide de la fusée (Masse à Vide qu'il serait paradoxal d'appeler ici Masse à Sec).

³⁴ Et il ne faut pas escompter qu'elle s'écoule à l'extérieur du réservoir sous l'action de la gravité : au contraire, le freinage aérodynamique qui suit la phase propulsive tendra à projeter cette eau vers l'ogive de la fusée (même si cette phase propulsive ne crée ici qu'une vitesse assez faible du fait de la très forte quantité d'eau embarqué).

On assiste donc à une rétention d'eau par la fusée ; cette eau pourra d'ailleurs être utilisée a posteriori par les cosmonautes pour la toilette ou pour la boisson.

La courbe fine rouge montre donc les valeurs de K_{Adiab} calculées avec cette eau comptée comme masse *utile*...

→ Le Quota d'eau à partir duquel de l'eau reste non éjectée en fin de détente de l'air est donné par la verticale fuchsia. Sa valeur (variable selon P_{init}) est :

$$1/E_{\text{AdiabMax}}$$

Cette expansion maximale E_{AdiabMax} est celle qui amène l'air enclos à la pression atmosphérique. Elle est de :

$$E_{\text{AdiabMax}} = \left(\frac{P_{\text{init}} + 1}{1_{\text{brelat}}} \right)^{(1/\gamma)} \quad 35$$

On peut donc mémoriser qu'à droite de la verticale fuchsia l'air subit une détente complète (jusqu'à la Pression Atmosphérique)...

Le Quota d'eau à partir duquel il restera de l'eau non éjecté est :

$$\left(\frac{P_{\text{init}} + 1}{1_{\text{brelat}}} \right)^{-(1/\gamma)} \quad (P_{\text{init}} \text{ étant exprimé en b relatifs})$$

(attention : ceci n'est ni la quantité ni le Quota d'eau restant en Fin de Propulsion)

Ce dernier Quota d'eau à partir duquel il subsiste de l'eau résiduelle varie donc en fonction de la pression initiale de l'air. ³⁶

→ Dans les conditions très particulières des Quotas d'eau de presque 1, l'intégration sous Excel montre que K_{Adiab} , s'il dépend un peu de P_{init} , tourne autour de **0,42** pour des pressions initiales de **6 à 8 bars relatifs**.

Certes, avec une quantité d'air réduite à presque rien, la propulsion de la fusée est presque annihilée ³⁷. Mais ce qui nous intéresse ici n'est pas la Vitesse de Fin de

³⁵ Ici encore nous nous devons de signifier que ce Quota n'ayant pas de dimension, la quantité élevée à la puissance $1/\gamma$ doit également être sans dimension. P_{init} est ici exprimé en **bars relatifs**. Si l'on désire l'exprimer en **Pascals relatifs**, il faut lui ajouter 10^5 et le diviser par 10^5 ...

³⁶ On peut intuitivement imaginer que, même avec des Quota d'air usuels (de l'ordre des deux tiers), si la pression initiale est très faible (de l'ordre, par exemple de 1,1 b relatif), l'expansion de l'air amènera très vite sa pression aux alentours de la pression atmosphérique, limite au dessous de laquelle l'éjection de l'eau n'a plus de raison, dans nos conventions, de se produire...

³⁷ En fait, dans les cas extrêmes elle ne quittera pas son pas de tir. Notons que la formule de Tsiolkovski calcule la vitesse d'une fusée parfaitement libérée à l'instant de son décollage (c-à-d susceptible de s'élever mais aussi de descendre si sa force propulsive $2PS_{\text{Tuy}}$ est inférieure à son poids initial Mg .)

Propulsion de la fusée (presque nulle)³⁸ mais l'influence sur cette vitesse presque nulle de la détente adiabatique de l'air.

L'intégration graphique réalisée par Excel nous informe donc de cette influence. Une étude analytique du phénomène produit les mêmes résultats : nous la réalisons dans une [note](#) de fin de texte.

Tous les paramètres hormis la pression (et donc la Vitesse d'Éjection) restant constant durant la Phase Propulsive, on peut donc considérer que ce Coefficient Adiabatique de $\sim 4,2$ peut être déterminé par comparaison entre :

- l'intégration, sur la durée de la propulsion, de la Force de Propulsion variable $2P_{(t)}S_{Tuy}$, la Pression $P(t)$ suivant une évolution adiabatique vers sa détente complète.
- l'intégration (aisée) d'une Force de Propulsion constante sur la durée de la propulsion (raccourcie) résultant de la constance de la Pression prise comme égale à la Pression Initiale.

Par linéarisation des résultats donnés par notre tableau, nous avons trouvé pour ce Coefficient Adiabatique, dans ce cas limite du Quota d'eau tendant vers 1, la valeur :

$$K_{\text{Adiab}(Q_{\text{Eau}} = 1)} = 0,553 - 0,0196 * P_{\text{init}} \quad (P_{\text{init}} \text{ étant exprimé en b relatifs})$$

Cette valeur assez "banale" de K_{Adiab} ne change pourtant rien au sort qui frappe la Vitesse de Fin de Propulsion dans ce cas précis des fusées sans éjection de Masse d'Appui : La Masse instantanée de la fusée pouvant être considérée comme constante pendant la Phase Propulsive, le logarithme du Rapport de Masses tend vers ϵ et la formule de Tsiolkovski se simplifie en $U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éjectInit}} * K_{\text{Adiab}} * \epsilon$, ce qui revient à dire que U_{FinProp} confine naturellement à la nullité...

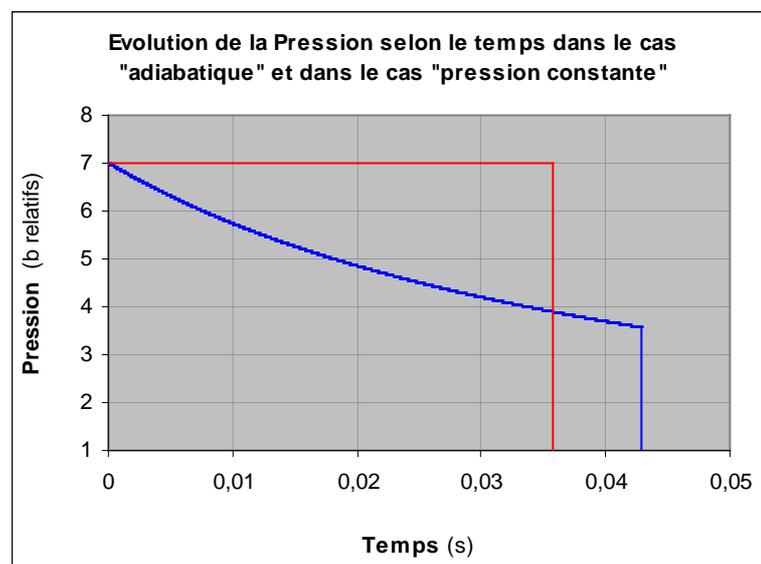
→ La courbe jaune, dans le prolongement direct de la courbe rouge fine de gauche, donne les valeurs de K_{Adiab} calculées en posant que toute l'eau embarquée doit compter dans le Rapport de Masses (scrupule que nous avons réfuté plus haut).

→ On peut voir que la courbe rouge tangente plus ou moins, à gauche, la droite verte qui unit ses deux points limites (carrés verts pour $Q_{\text{Eau}} = 0$ et 1). Nous n'avons pas établi pourquoi...

→ Sur le même graphe, la courbe bleu clair croissante représente toujours, pour mémoire, une fraction du logarithme du rapport de masses, quantité qui intervient comme multiplicateur dans le calcul de la Vitesse de Fin de Propulsion par l'équation de Tsiolkovski...

³⁸ et rappelons que nous ne parlons ici que de la composante de la Vitesse de Fin de Propulsion due à la propulsion. La composante gravitaire deviendrait prépondérante sur cette dernière si la durée de la Phase propulsive (durant laquelle agit la gravité) ne devenait très brève. Une étude particulière s'impose donc à ce sujet précis...

→ On peut s'étonner que, du moins pour les Quotas d'eau usuels le Coefficient Adiabatique ne plonge pas plus vite vers des petites valeurs. L'une des explications en est que ce Coefficient Adiabatique est obtenu par comparaison avec la Vitesse donnée par la formule de Tsiolkovski pour une Vitesse d'Éjection constante. Or pour une telle Vitesse d'Éjection constante, le temps de propulsion est obligatoirement plus court que pour une propulsion se produisant avec une baisse adiabatique de la pression et donc de la Vitesse d'Éjection : il y a donc une légère compensation de la baisse de Vitesse d'Éjection par l'allongement de la Phase Propulsive. Voici d'ailleurs un graphe montrant l'évolution de la Pression instantanée dans les deux cas de propulsion (le cas à "pression constante" et le cas à "évolution adiabatique de la pression") :



Ces courbes sont établies pour une Pression initiale de **7 b relatifs** et un Quota d'eau de **0,33**.

Si l'on se remémore que, toutes choses égales par ailleurs, la Pression à la tuyère est représentative de la force propulsive (celle-ci valant $2PS_{tuy}$)³⁹, on doit admettre que l'intégration sur le temps de propulsion de cette pression est bien représentative de la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée. Dans ces conditions, la petite surface de la courbe bleue dépassant à droite de la courbe rouge opère bien une légère compensation de la moindre hauteur de cette courbe bleue. Nous y revenons dans une [note](#) de fin de texte.

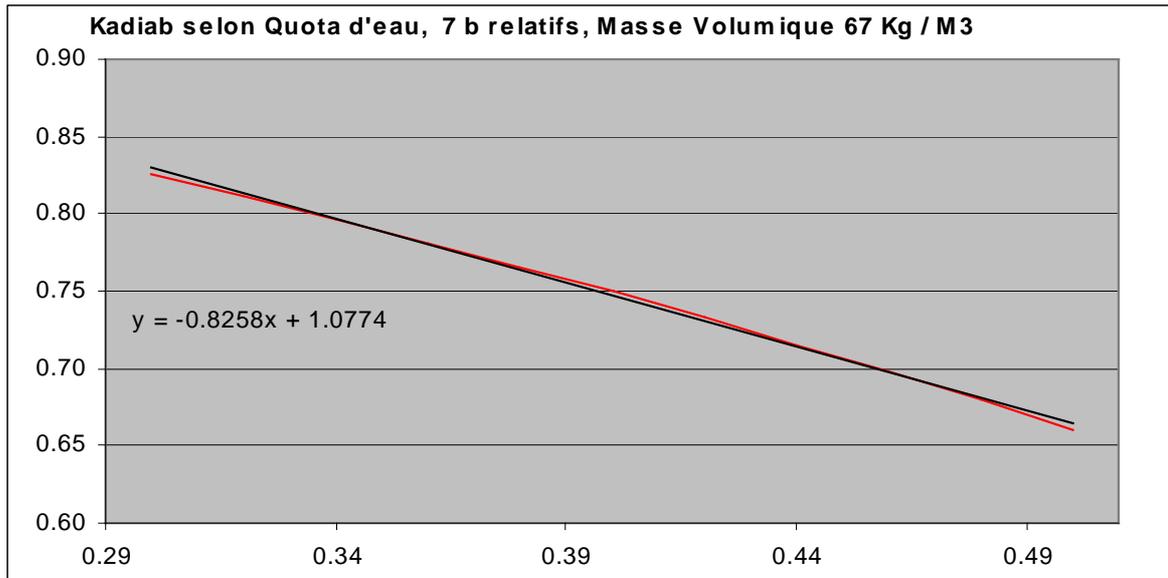
Linéarisation et résultats numériques :

Excel, par ses propositions de courbes de tendance linéaires nous aide grandement à dégager une expression du coefficient K_{Adiab} en fonction du Quota d'eau.

³⁹ Nous nous cantonnons toujours à la seule propulsion *aqueuse* et sans prise en compte de la hauteur de la colonne d'eau.

Toutefois nous ne présenterons que rapidement les résultats ainsi dégagés à ce stade de notre étude ; ceci parce que, dans notre deuxième partie, nous aurons l'occasion d'améliorer la précision de ladite étude en prenant en compte la non-négligeable propulsion due à l'éjection de l'air résiduel, puis la propulsion due à la hauteur de la colonne d'eau...

Quoiqu'il en soit (et à l'issue de la seule propulsion aqueuse), Excel nous dessine le graphe ci-dessous pour une pression initiale de **7 b relatifs** et une Masse Volumique de la fusée de **67 Kg/M³**, :



Ainsi que cela apparaît sur le graphe, la formule linéarisant l'évolution de K_{Adiab} est :

$$K_{\text{Adiab}} = -0,8258 Q_{\text{Eau}} + 1,0774$$

On peut également relever les chiffres de la même linéarisation de K_{Adiab} pour les pressions de **6** et **8 bars relatifs** (pour la même Masse Volumique de la fusée de **67 Kg/M³**). Ils sont :

pour **6 b** :

$$K_{\text{Adiab}} = -0,8522 Q_{\text{Eau}} + 1,0815$$

pour **8 b** :

$$K_{\text{Adiab}} = -0,8065 Q_{\text{Eau}} + 1,0745$$

Nous pouvons nous appuyer sur ces chiffres pour avancer alors une loi simple donnant l'évolution de K_{Adiab} en fonction de la pression initiale P_{init} en **bars relatifs**⁴⁰. Cette loi est :

$$K_{\text{Adiab}} = 1,0774 - [0,8258 - 0,0228 (P_{\text{init}} - 7)] Q_{\text{Eau}}$$

Si l'on remarque à présent qu'une augmentation de la Masse Volumique de la fusée agit sur K_{Adiab} de la même façon qu'une augmentation de pression⁴¹, on peut proposer une loi générale d'évolution de K_{Adiab} en fonction de la pression initiale P_{init} et de la Masse Volumique $M_{\text{Volumique}}$ de la fusée. Cette loi se présente sous la forme d'un polynôme du premier degré en P_{init} et P_{init} ⁴² :

$$K_{\text{Adiab}} = 1,0774 - \{0,8258 - 0,0228 [(P_{\text{init}} - 7) + 0,03 (P_{\text{init}} M_{\text{Volumique}} - 67)]\} Q_{\text{Eau}}$$

avec :

P_{init} en **bars relatifs**, dans la plage de **6 à 8** ;
 $M_{\text{Volumique}}$ la Masse Volumique de la fusée en **Kg/M³** ou **g/L**, dans la plage de **57 à 77** ;
 Q_{Eau} , le Quota d'eau sans dimension (ex. : **0,33**), dans la plage de **0,3 à 0,5** ;

Ce K_{Adiab} est bien sûr celui qui intervient dans notre formule de Tsiolkovski étendue aux fusées à eau donnant la Vitesse de Fin de Propulsion aqueuse à attendre de ces fusées, compte non tenu de la résistance de l'air :

$$U_{\text{FinProp}} = K_{\text{Adiab}} V_{\text{éjectInit}} \text{Ln}\{(M+Q)/M\}$$

(Vitesse de Fin de Propulsion pour une fusée à eau quelconque, compte non tenu du freinage aérodynamique, de la propulsion due à l'air et de l'effet de la hauteur de la colonne d'eau), avec :

$V_{\text{éjectInit}}$ Vitesse d'éjection en début de la Phase Propulsive, prise comme référence ($V_{\text{éjectInit}}$ et U_{FinProp} dans la même unité) ;

M est la Masse à Vide de la fusée,

Q sa masse d'appui

À ce stade, si on le désire, on peut se souvenir que dans la formule de Tsiolkovski Q , la masse d'appui (masse d'eau embarquée) dépend directement du Quota d'eau (on a en effet : $Q = \rho Q_{\text{Eau}} V_f$).

⁴⁰ On voit que le reliquat évolue peu (moins de 4 pour 1000), aussi gardons-nous sa valeur de 1,0774... Mais on pourrait le faire varier linéairement en fonction de P_{init} dans notre linéarisation.

⁴¹ Cela peut paraître contraire à l'intuition, mais il faut se souvenir que le paramètre "Masse à Vide" de la Masse Volumique intervient également dans le rapport des masses.

⁴² Ce polynôme est présentée ici de sorte que sa méthode d'établissement apparaisse clairement. Mais on peut en simplifier la présentation en effectuant certains des produits qu'elle renferme.

Si on le désire, on peut donc généraliser cette formule de Tsiolkovski en utilisant uniquement les variables P_{init} , $M_{Volumique}$, Q_{Eau} et $V_{éjectInit}$.⁴³ On obtient alors :

$$U_{FinProp} = \{1,0774 - (0,8258 - 0,0228 ((P_{init} - 7) + 0,03 (M_{Volumique} - 67))) Q_{Eau}\} V_{éjectInit} \text{Ln}\left\{1 + \frac{Q_{Eau}}{M_{Volumique}}\right\}$$

(Vitesse de Fin de Propulsion pour une fusée à eau quelconque, compte non tenu du freinage aérodynamique et de l'effet de la hauteur de la colonne d'eau), avec :

P_{init} en **bars relatifs**, dans la plage de **6 à 8** ;
 $M_{Volumique}$ en **Kg/M³** ou **g/L**, dans la plage de **57 à 77** ;
 Q_{Eau} , sans dimension (ex. : **0,33**), dans la plage de **0,3 à 0,5** ;
 $V_{éjectInit}$ Vitesse d'éjection du début de la Phase Propulsive, prise comme référence ($V_{éjectInit}$ et $U_{FinProp}$ dans la même unité) ;

Applications numériques aux cas de lancement en milieu scolaire

En milieu scolaire, les lancements de fusées à eau se font souvent, pour des raisons de sécurité, à la pression maximum de **5 b relatifs**. On peut alors songer à relever les différentes courbes de tendance que propose Excel. Il s'agit de :

pour une Masse Volumique de la fusée de **57 Kg/M³** :

$$K_{Adiab} = 1,0874 - 0,8983 Q_{Eau}$$

Pour une Masse volumique de **67 Kg/M³** :

$$K_{Adiab} = 1,0875 - 0,8904 Q_{Eau}$$

Pour une Masse volumique de **77 Kg/M³** :

$$K_{Adiab} = 1,0874 - \{0,8833 Q_{Eau}$$

Ceci nous permet de proposer alors un polynôme simple donnant la valeur de K_{Adiab} en fonction du **Quota d'eau** pour cette pression initiale de **5 b relatifs**. C'est :

⁴³ Ce faisant, on s'éloigne cependant de la présentation de la formule de Tsiolkovski dans sa présentation classique, ce qui rend plus difficile la mémorisation de nos résultats.

$$K_{\text{Adiab}} = 1,0874 - \{0,8904 - 0,00075 (M_{\text{Volumique}} - 67)\} Q_{\text{Eau}}$$

avec :

$M_{\text{Volumique}}$ en **Kg/M³** ou **g/L**, dans la plage de **57** à **77** ;
 Q_{Eau} , sans dimension (ex. : **0,33**), dans la plage de **0,3** à **0,5** ;

Le Quota de remplissage d'eau étant d'ailleurs souvent pris à **1/3** (ou **0,33**), on peut même proposer pour K_{Adiab} pour cette pression initiale de **5 b** relatifs la valeur suivante de K_{Adiab} , en fonction de la Masse Volumique de la fusée :

$$K_{\text{Adiab}} = 0,7906 + 0,00025 (M_{\text{Volumique}} - 67)$$

avec :

$M_{\text{Volumique}}$ en **Kg/M³** ou **g/L**, dans la plage de **57** à **77** ;

Pour fixer les idées, si la Masse à Vide d'une fusée de **1,5 L** est de **100g**, on obtient pour cette même pression initiale de **5 b relatifs** et ce même Quota d'eau classique de **0,33** :

$$K_{\text{Adiab}} = 0,7906$$

et donc :

$$V_{\text{FinProp}} = 0,7906 V_{\text{éjectInit}} \text{Ln}\{(M+Q)/M\}$$

Vitesse de Fin de Propulsion pour une fusée à eau de **1,5 L** et de masse **0,1 Kg** et lancée à **5 b** relatifs avec un Quota d'eau de **1/3**, compte non tenu du freinage aérodynamique et de l'effet de la hauteur de la colonne d'eau, section de tuyère quelconque, avec :

$V_{\text{éjectInit}}$ la Vitesse d'éjection au début de la Phase Propulsive pour **5 b relatifs** ;

$V_{\text{éjectInit}}$ et V_{FinProp} dans la même unité ;

Q = Masse d'appui de la fusée (masse d'eau, ici) découlant du Quota d'eau choisi de **0,33** ;

M = Masse à Vide de la fusée = **0,1 Kg** ;

M et Q exprimés dans la même unité.

**CONCLUSION DE CETTE PREMIÈRE PARTIE TRAITANT DE LA
PROPULSION DUE À LA SEULE ÉJECTION DE L'EAU :**

Nous venons d'exposer et de mettre en pratique une méthode de linéarisation. Il faut admettre que nous avons bénéficié d'une certaine chance dans ce travail puisque finalement l'action de la Masse Volumique de la fusée nous est apparue assimilable à celle de la pression relative.

Mais nous n'insistons pas sur les résultats de cette linéarisation car nous allons à présent prendre en compte l'effet propulsif de l'éjection de l'air, ce qui nous conduira à une nouvelle linéarisation des performances de nos fusées, encore plus proche de la réalité.

DEUXIÈME PARTIE :

2 : PRISE EN COMPTE DE LA POUSSÉE “GAZEUSE” DUE À L’ÉJECTION DE L’AIR

Lorsque toute l’eau a été éjectée par l’air comprimé enclos, ce dernier n’a en général pas perdu pour autant toute sa pression et donc toute son énergie. Par exemple, pour un Quota d’air usuel de $2/3$, la pression atteinte à la fin de l’expulsion de l’eau est de **3 b relatifs** pour **6 b relatifs** de pression initiale, **2,4** pour **5**, et **1,8** pour **4**⁴⁴.

Cette pression résiduelle que possède l’air va alors entraîner son éjection à très grande vitesse par la tuyère. Les lois de la physique font que cette vitesse d’éjection égale celle du son⁴⁵...

Cette très grande vitesse d’éjection va alors compenser la très faible masse du fluide éjecté (il ne s’agit au fond que de quelques **g** d’air), ce qui apparaît dans le calcul de la poussée créée (cette poussée est toujours $F = qV$, où **q** est le débit massique et **V** la vitesse d’éjection).

L’éjection de l’air résiduel apporte donc une *impulsion*⁴⁶ non négligeable. Elle vaut par exemple **6** ou **7 %** de l’impulsion due à la propulsion proprement *aqueuse* pour une fusée de **1,5L** : c’est donc un appoint intéressant, ceci d’autant plus que cette impulsion s’applique sur une fusée dont la masse est très faible (alors qu’une grande partie de l’impulsion *aqueuse* n’est dépensée que pour accélérer une eau destinée à être éjectée...)

⁴⁴ Ce calcul étant effectué, bien sûr, selon la loi de la détente adiabatique.

⁴⁵ On peut tirer de l’excellent travail de Jean-Paul Soulard, la valeur de cette vitesse du son dans la tuyère convergente que constitue le goulot de la bouteille (la vitesse du son dépend en effet des circonstances) : C’est, pour un Quota d’air usuel de $2/3$:

$$V_{\text{éjectAir}} = 16,85 \sqrt{T_{\text{init}}}$$

si T_{init} est la température initiale de l’air comprimé au moment du lancement... Pour une température initiale de 290K, la vitesse est alors de 287 m/s, soit ~ 1000 Km/h

⁴⁶ L’impulsion est le produit de la force par le temps où celle-ci est développée. Cette notion, propre aux fusées, est assez intuitive. En effet, c’est bien la force de propulsion qui accélère une fusée, mais il convient que cette force s’applique le plus longtemps possible pour donner suffisamment de vitesse à l’engin.

Bruce Berggren a calculé l'Impulsion que procure à la fusée la vive éjection de l'air résiduel. La formule qu'il en donne ⁴⁷ est assez simple ⁴⁸ :

$$\text{Impulsion}_{\text{Air}} = V_f 4050 (P_{1\text{abs}}/P_{\text{atm}} - 1)^{1,24} / \sqrt{T_1}$$

formule de Bruce Berggren où :

- V_f est le volume du réservoir de la fusée en M^3
- $T_{1\text{abs}}$ est la température de l'air à la fin de la propulsion aqueuse (et donc au début de la propulsion due à l'air), en Kelvin
- $P_{1\text{abs}}$ est la pression absolue dans le réservoir de la fusée à la même fin de la propulsion aqueuse.
- P_{atm} est la pression atmosphérique.

Note sur la signification de l'Impulsion :

En fuséologie, l'impulsion **I** représente le produit du module d'une force **F** par son temps d'action **t**.

On a donc **I = Ft** .

L'action d'une force de **F** Newtons agissant sur une Masse **M** pendant **t** secondes est donc caractérisée par l'impulsion **Ft**.

Puisque d'autre part l'on sait que cette force **F** produit sur la Masse **M** une accélération de **F/M**, si **F** agit pendant **t** secondes, la vitesse de la Masse sera augmentée de **(F/M)*t** , vitesse qu'on peut aussi écrire **(Ft)/M** , soit **I/M**...

Ceci équivaut à dire que le gain de vitesse que procurera à notre fusée l'impulsion décrite par Bruce Berggren est égal au quotient de cette impulsion par la Masse à Sec à laquelle elle est appliquée.

Si l'on remarque que dans la formule de l'Impulsion de Bruce Berggren l'expression $(P_{1\text{abs}}/P_{\text{atm}} - 1)$ n'est autre que la pression relative en bars dans l'enceinte du réservoir ⁴⁹ , on peut réécrire cette formule sous la forme :

⁴⁷Il écrit :

I did some numerical integration and curve fitting, was able to put together a simplified equation that should give excellent accuracy to pressures < 5 atmospheres, and good accuracy up to 10 atmospheres :

$$\text{Impulse} = \text{Volume} * 4050 / \sqrt{T_i} * (P_i / P_{\text{atm}} - 1)^{1.24}$$

where Volume is the full chamber volume in cubic meters

T_i is the temperature of the air in the chamber at the start of the air 'pulse' (degrees K)

P_i is the absolute pressure in the chamber at the start of the air 'pulse' (Newtons per square meter)

P_{atm} is atmospheric pressure

⁴⁸ Nous la traduisons dans les termes utilisés par nous jusque-là...

⁴⁹ Le bar est l'unité non parfaitement scientifique que nous utilisons dans cette étude. Nous avons pris cette option parce qu'elle simplifie notablement la compréhension et l'écriture des formules (en les soulageant d'un grand nombre de puissances de 10 multiplicatrices...).

$$\text{Impulsion}_{\text{Air}} = V_f \cdot 4050 P_1^{1,24} / \sqrt{T_1}$$

formule de Bruce Berggren *réécrite* où :

Impulsion_{air} l'impulsion à attendre de l'éjection de l'air résiduel

V_f est le volume du réservoir de la fusée en M³

T₁ est la température de l'air à la fin de la propulsion aqueuse (et donc au début de la propulsion due à l'air), en Kelvin

P₁ est la pression relative en **b** dans le réservoir de la fusée à la même fin de la propulsion aqueuse.

On comprend alors, à la lecture de cette formule très simple que l'impulsion est:

- proportionnelle au volume de la fusée **V_f** ,
- proportionnelle à la racine de la température de début de propulsion due à l'air
- et proportionnelle à la pression relative résiduelle **P₁** (pression au début de la propulsion due à l'air) élevée à la puissance **1,24** (c'est effectivement cette pression qui agit pour expulser l'air vers l'extérieur).

Au reste, la formule de Bruce Berggren peut être modifiée pour prendre en compte directement ces seuls paramètres initiaux (puisque si la formule originale fait appel à Pression et Température de fin de propulsion aqueuse, ces deux paramètres découlent en fait des trois paramètres initiaux susnommés, selon les lois de la détente adiabatique). La formule de l'impulsion en devient alors :

$$\text{Impulsion}_{\text{Air}} = 4,05 V_f [(P_{\text{init}} + 1)(1 - Q_{\text{Eau}})^{\gamma} - 1]^{1,24} / [(1 - Q_{\text{Eau}})^{0,2} \text{Racine}(T_{\text{init}})]$$

avec :

Impulsion_{Air} l'impulsion à attendre de l'éjection de l'air résiduel ;

P_{init} la pression initiale en **b relatifs** ;

V_f le volume de la fusée en M³ ;

T_{init} la température en **Kelvin** ;

Ce qui donne, exprimé en langage Excel :

$$4.05 * V_{\text{fus}} * (((P_{\text{init}} + 1) * ((1 - Q_{\text{eau}})^{1.4}) - 1)^{1.24} / (\text{RACINE}(T_{\text{init}}) * ((1 - Q_{\text{eau}})^{0.2})))$$

EXPLOITATION DE CETTE ÉQUATION DE L'IMPULSION

D'une façon générale, il nous semble que la mesure de cette Impulsion due à l'air résiduel (et donc l'établissement d'une formule telle que celle proposée par Bruce Berggren) serait à la portée des amateurs éclairés que peuvent être les lycéens ⁵⁰.

Si pour des mesures de la propulsion complète Jean-Paul Soulard a utilisé un dispositif que l'on pourrait appeler un *mouton linéaire*, il nous semble que pour la seule propulsion gazeuse, c'est un *mouton pendulaire* qui devrait être mis à contribution : même de construction artisanale, un tel dispositif procurerait d'excellents renseignements sur cette question importante...

Mais revenons à la formulation de Bruce Berggren, remise en forme par nos soins :

On y remarque que comme pour la propulsion aqueuse, le diamètre de la tuyère n'intervient pas.

Le terme $(1-Q_{\text{Eau}})$ représente bien sûr le Quota d'air ⁵¹. Ce quota d'air ne peut varier que de **0** à **1** :

→ Pour la valeur **1** du Quota d'eau (cas où la fusée n'embarque que de l'eau, sans air comprimé), on peut alors prédire que l'impulsion vaut :

$$\text{Imp} = 4,05 V_{\text{fus}} (-1)^{1,24} / [(0)^{0,2} \text{Racine}(T_{\text{init}})]$$

...c'est à dire une valeur infiniment négative, ce qui n'est pas naturel puisque, sans air comprimé une fusée ne peut produire d'impulsion. Mais il ne faut pas s'attarder à cette curiosité qui découle de notre réécriture de la formule de Bruce Berggren en référence avec les conditions initiales... Dans les faits, l'impulsion nulle, on le verra par la suite, est atteinte pour les forts Quotas d'eau entraînant un reliquat de liquide non éjecté et l'on peut dire que pour des Quotas d'eau encore plus fort la formule de l'impulsion devient caduque. Au demeurant Bruce Berggren lui-même indique que sa formule n'est valable que sur une certaine plage de pression ⁵², plage qui n'accueille pas ce cas très limite.

→ Pour la valeur **0** du Quota d'eau (càd la valeur **1** du Quota d'air) l'impulsion prend la valeur :

$$\text{Imp} = 4,05 V_{\text{fus}} [(P_{\text{init}}+1)(1)^{\gamma} - 1]^{1,24} / [1^{0,2} \text{Racine}(T_{\text{init}})]$$

Soit, pour une pression initiale de **6 b relatifs**, par exemple :

⁵⁰ Ils seraient alors éclairés par leurs enseignants...

⁵¹ C'est pour pouvoir confronter les résultats de cette étude sur l'impulsion de l'air résiduel avec les résultats établis pour la seule éjection de l'eau que nous utilisons la variable du Quota d'eau...

⁵² "a simplified equation that should give excellent accuracy to pressures < 5 atmospheres, and good accuracy up to 10 atmospheres"

$$\text{Imp} = 4,05 V_{\text{fus}} 6^{1,24} / \text{Racine}(T_{\text{init}})$$

càd :

$$\text{Imp} = 37,35 V_{\text{fus}} / \text{Racine}(T_{\text{init}})$$

Soit pour une fusée type de **67 Kg/M³** une impulsion de **2,2 Ns**⁵³ : une force moyenne de **2,2 N** appliquée pendant une seconde, ce n'est pas rien !⁵⁴

RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR DES QUOTAS D'EAU USUELS

Le retour de la Masse Volumique de la fusée

Comme la division de l'Impulsion par la Masse à Sec de l'engin donne le surcroît de vitesse à attendre de cette propulsion gazeuse, il nous est loisible de calculer ce surcroît de vitesse et donc le surcroît *gazeux* à notre coefficient adiabatique **K_{Adiab}** (en référence, bien sûr, au logarithme du rapport de masse calculé classiquement avec le quota d'eau).

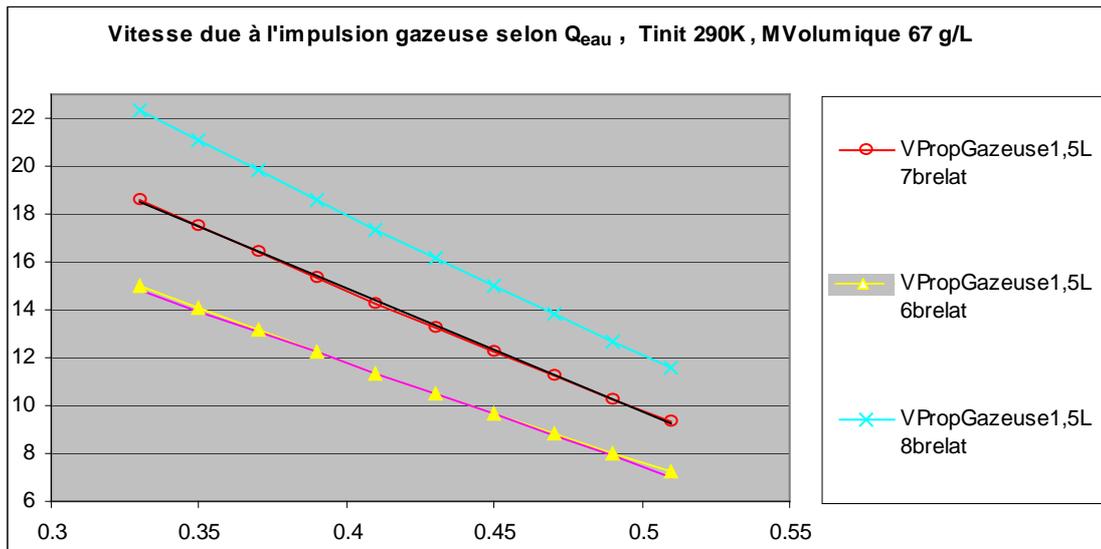
Mais déjà, on peut se féliciter que cette division de l'impulsion par la masse à vide reconstitue le quotient **M/Vf** que nous avons nommé **Masse Volumique** de la fusée. Décidément, cette Masse Volumique est bien encore le critère d'évolution des performances de nos fusées, que ce soit ici pour le surcroît de vitesse dû à l'air résiduel ou pour la vitesse à attendre de la seule propulsion aqueuse : On peut donc envisager avec optimisme l'établissement d'une loi exprimant la vitesse à l'issue de la propulsion aqueuse puis gazeuse, et ceci selon les seuls paramètres initiaux que sont **Pression**, **Quota d'eau** et **Masse Volumique de la fusée...**

Le graphique ci-dessous montre ainsi le surcroît de vitesse, en **m/s**, à attendre de la propulsion gazeuse pour une fusée de **1,5 L**, d'une Masse Volumique de **67 Kg/M³** et pour plusieurs pressions relatives initiales, la température initiale de l'air comprimé (à l'instant du décollage) étant prise pour **290 K**⁵⁵ :

⁵³ Impulsion qui génère une Vitesse de Fin de Propulsion « gazeuse » (et d'ailleurs de Propulsion Complète, puisqu'il n'y a pas d'eau embarquée) de 32,73 m/s. Le passage de l'impulsion à la vitesse est expliqué ci-dessous...

⁵⁴ Sur la masse d'une fusée type de 67g, cela produit en effet une accélération de 0 m/s à 32,8 m/s en une seconde !...

⁵⁵ Cette température initiale de l'air comprimée est en fait une grande inconnue. On peut simplement estimer qu'elle est assez proche de la température ambiante parce qu'une température trop forte se serait signalée au hydrofuséistes par une diminution des caractéristiques physique du PET et parce que l'air comprimé barbotte dans l'eau au moment du remplissage... Bruce Beggren en donne la valeur de 300k



On peut apprécier à quel point la courbe rouge du milieu est proche de la droite noire que nous propose Excel comme courbe de tendance. On ne doit donc avoir aucun scrupule à la linéariser.

La droite noire ayant comme équation :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = -51,459 Q_{\text{Eau}} + 35,463$$

...les droites linéarisant les graphes jaune et bleu (correspondant aux pressions **6 et 8 bars relatifs**) ayant comme équation :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = -43,249 Q_{\text{eau}} + 29,152$$

et :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = -59,904 Q_{\text{eau}} + 41,994$$

...il est alors tout à fait légitime de proposer pour cette fusée type de **1,5 L**, de Masse Volumique **67 Kg/M³**, à la température initiale de **290 K**, la valeur du surcroît de vitesse suivant :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = - [51,46 - 8,32 (7 - P_{\text{init}})] Q_{\text{Eau}} + 35,463 - 6,42(7 - P_{\text{init}})$$

cette formulation transparente pouvant se recombinaer en :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = - (8,32 P_{\text{init}} - 6,78) Q_{\text{eau}} + 6,42 P_{\text{init}} - 9,48$$

La droite violette chevauchant la courbe jaune sur le graphe précédent montre combien cette linéarisation est précise pour **6 b relatifs** (le critère d'appréciation de cette précision étant l'erreur en % de la vitesse)...

Pour le cas général d'une Masse Volumique quelconque, on peut partir de la valeur pour **67 Kg/M³** énoncée à l'instant, puisque , comme on l'a dit au paragraphe [Le](#)

[retour de la Masse Volumique de la fusée](#), page 35, le surcroît gazeux de vitesse est analytiquement proportionnel à la Masse Volumique de la fusée. On écrira donc :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = [- (8,32 P_{\text{init}} - 6,78) Q_{\text{Eau}} + 6,42 P_{\text{init}} - 9,48] (67 / M_{\text{Volumique}})$$

valeur de la vitesse due à l'éjection de l'air résiduel, où :

Q_{Eau} est le Quota d'eau dans le réservoir de la fusée

P_{init} est la pression en **b relatifs** dans le réservoir de la fusée au moment du lancement

$M_{\text{Volumique}}$ est la masse volumique de la fusée, à savoir le quotient de sa Masse à Vide par son Volume.

Valeur du même surcroît de vitesse dans le cas de lancement en milieu scolaire

La pression initiale de **5 b relatifs** étant couramment pratiquée en milieu scolaire pour des raisons de sécurité, il est utile de faire calculer puis linéariser par Excel ce même surcroît de vitesse dû à l'éjection de l'air résiduel.⁵⁶ Notre tableur prône pour ces **5 b relatifs** la valeur du surcroît de vitesse gazeux suivant, selon le Quota d'eau, :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = (- 35,289 Q_{\text{Eau}} + 23,085) (67 / M_{\text{Volumique}})$$

valeur de la vitesse due à l'éjection de l'air résiduel pour une fusée lancée à 5 b relatifs, où :

Q_{Eau} est le Quota d'eau dans le réservoir de la fusée

$M_{\text{Volumique}}$ est la masse volumique de la fusée, à savoir le quotient de sa Masse à Vide par son Volume.

Pour des fusées « sèches » (càd sans eau embarquée), il serait malvenu de faire usage de la formule ci-dessus.⁵⁷ Au demeurant la formule de Bruce Berggren est directement applicable à ces fusées sèches. Elle donne, en effet :

$$\text{Impulsion}_{\text{Air}} = V_f 4050 P_1^{1,24} / \sqrt{T_1}$$

ce qui dans notre cas s'écrit :

$$\text{Impulsion}_{\text{Air}} = V_f 10^{-3} 4050 5^{1,24} / \sqrt{290} = 2.625 \text{ Ns}$$

Cette impulsion, appliquée à une fusée sèche de **0,1 Kg** lancée à une P_{init} de **5 b** donnera donc une vitesse de :

⁵⁶ L'utilisation de la formule précédente, destinée à une plage de pression allant de 6 à 8 b, ne créerait cependant qu'une erreur de moins de 3 %.

⁵⁷ Cette extrapolation serait nettement en dehors de la plage de Quota d'eau pour laquelle la formule est prévue...

$$V_{\text{PropGazeuse}} = 26,25 \text{ m/s}$$

Vitesse en **m/s** procurée, par la seule éjection de l'air, à une fusée sèche de **1,5 L** et de **0,1 Kg** lancée à une **P_{init}** de **5 b** relatifs.

Et la même éjection de l'air produira sur une fusée sèche de Masse Volumique quelconque une Vitesse de Fin de Propulsion de :

$$V_{\text{PropGazeuse}} = 26,25 (67 / M_{\text{Volumique}})$$

Vitesse en **m/s** procurée, par la seule éjection de l'air, à une fusée sèche de Masse Volumique quelconque lancée à une **P_{init}** de **5 b** relatifs.

Note sur l'altitude atteinte par une fusée sèche en milieu scolaire

Dans un travail parallèle ⁵⁸, nous proposons pour le calcul de l'altitude de culmination d'une fusée l'utilisation de la formule :

$$H_{\text{Culm}} = H_{\text{FinProp}} + (D_b/2) \text{Ln}[1 + V_{\text{Finprop}}^2 / V_{\text{Lim}}^2]$$

formule où:

H_{Culm} est l'altitude d'apogée

H_{FinProp} l'altitude de fin de propulsion

D_b est cette *Distance Balistique* dont nous suggérons l'utilisation, Distance balistique dont la valeur n'est autre que **1/b**, **b** valant $\frac{1}{2} \rho S C_x / M$

V_{FinProp} est la Vitesse de Fin de Propulsion, c'est la vitesse initiale de la phase balistique qui nous intéresse.

V_{Lim} est la vitesse limite ou vitesse de chute stabilisée du mobile, dont la valeur est $\sqrt{g/b}$ ou encore $\sqrt{gD_b}$.

Dans le cas de fusées à eau de **1,5 L** construites par des élèves, on ne peut espérer un **C_x** meilleur que **0,45** ⁵⁹. La section frontale de diamètre **83 mm** et une masse typique de **100 g** procure au mobile une distance balistique **1/b** de **67,4 m** et une vitesse limite de chute de **25,7 m/s**. La hauteur de fin de propulsion est ici prise à **1 m**

Ces paramètres proprement balistiques (c'est à dire indépendants des caractéristiques de propulsion de l'engin) conduisent à une hauteur d'apogée de :

$$H_{\text{Culm}} = 1 + (67,4/2) \text{Ln}[(1 + (26,25/25,7)^2) =$$

$$H_{\text{Culm}} = 1 + 33,7 \cdot 0,5915 = 25,08 \text{ m}$$

Pour des fusées mieux profilées dotées d'un **C_x** de **0,3**, la hauteur d'apogée serait de **27,69 m**.

D'une façon générale, un relevé des altitudes atteintes par une fusée sèche lancée à des Pressions Initiales précisément mesurées permettrait de vérifier la

⁵⁸ LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE, chargeable sur notre site au lien : <http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm>

⁵⁹ Ce **C_x** de 0,45, rapporté à la seule section frontale du fuselage, est proposé pour des fusées à fort culot, c'est à dire à jupe longue. Pour des fusées à petit culot, c'est à dire profilées à l'exemple de la fusée lunaire de Tintin, on peut viser un **C_x** de 0.3 ...

formulation de l'Impulsion de Bruce Berggren. Cela pourrait constituer un travail scolaire fort enrichissant pour l'ensemble de la communauté hydrofuséistes...

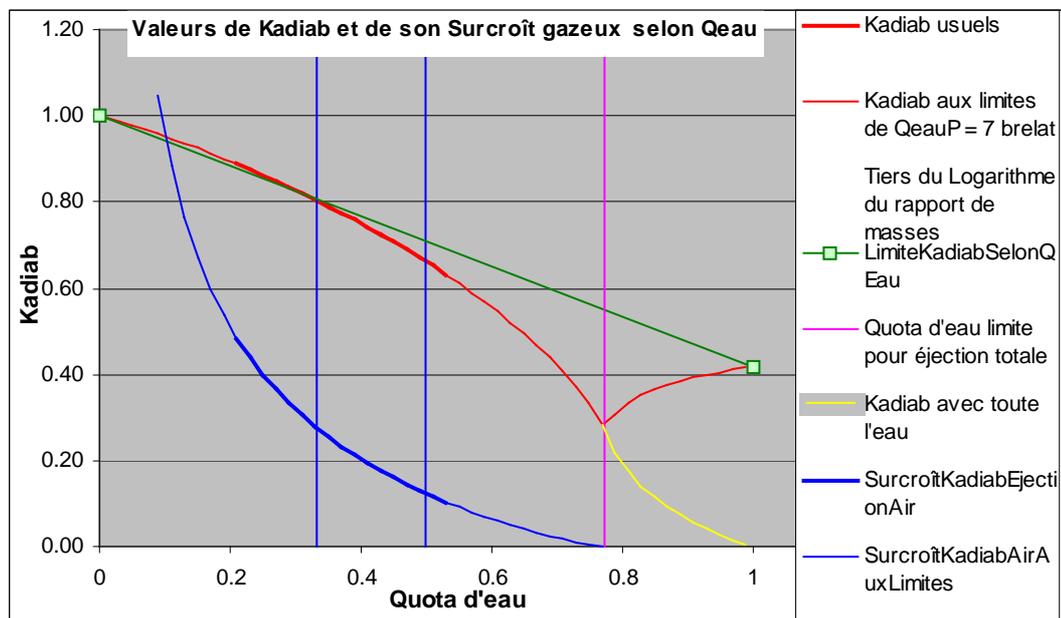
CONCLUSION DE CETTE DEUXIÈME PARTIE TRAITANT DU SURCROÎT DE VITESSE DÛ À L'ÉJECTION DE L'AIR

Le surcroît de vitesse à attendre de l'éjection de l'air comprimé étant ainsi connu, il est alors possible de sommer algébriquement ce surcroît à la Vitesse de Fin de Propulsion aqueuse calculée précédemment avec la valeur de K_{Adiab} dégagée des linéarisations précédentes.

Mais il est plus élégant de proposer directement une valeur de $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ intégrant la propulsion aqueuse et la propulsion gazeuse, ; coefficient retiré d'une seule linéarisation. C'est l'objet du chapitre qui suit...

ÉVOLUTION DU SURCROÎT GAZEUX DE COEFFICIENT ADIABATIQUE

La formule de Bruce Beggren, réécrite par nous en références aux conditions initiales, dessine la courbe bleue ci-dessous pour **7 b relatifs** :



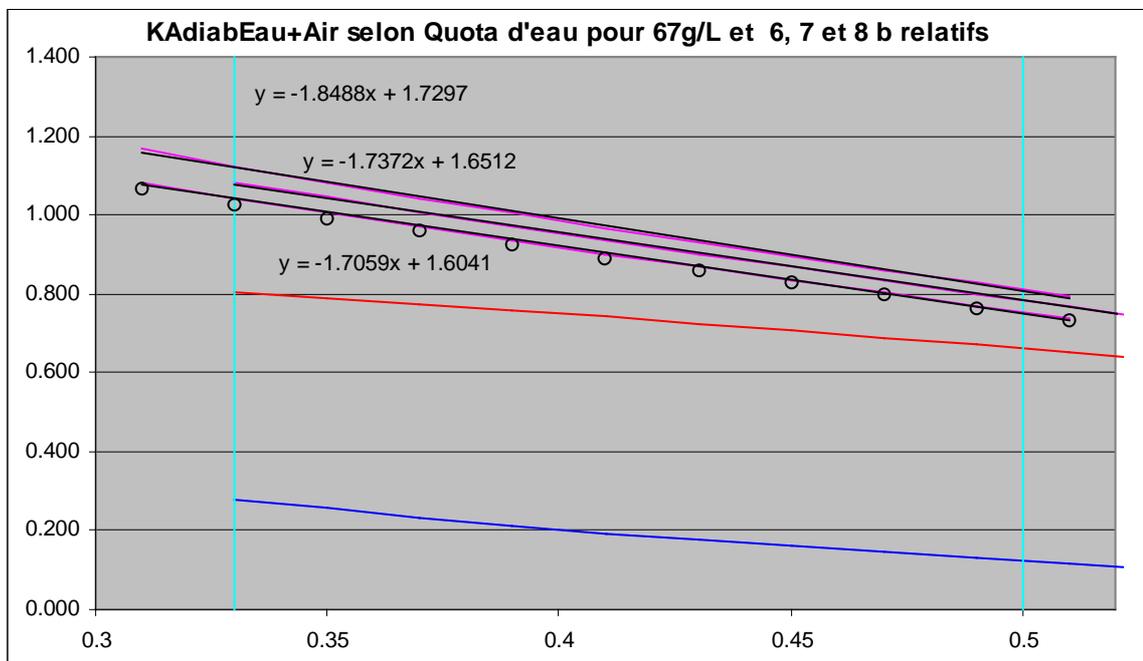
La courbe de ce surcroît gazeux (en référence au logarithme du rapport de masse calculé classiquement avec le quota d'eau) est assez pentue vers la gauche, mais il faut noter qu'elle se doit de l'être puisque pour un quota d'eau tendant vers zéro le logarithme du Rapport de Masses tend également vers zéro : pour que notre formule de Tsiolkovski étendue aux fusées à eau donne un surcroît de vitesse due à l'air (et l'on sait que ce surcroît est non négligeable), il faut donc que pour ce logarithme presque nul, le surcroît gazeux de K_{Adiab} tende vers l'infiniment grand...

On peut remarquer que la concavité de cette courbe bleue est opposée à celle de la courbe rouge du K_{Adiab} aqueux et ceci particulièrement pour les Quotas d'eau usuels. La sommation de ces deux graphes résultera donc en une courbe du K_{Adiab} aqueux et gazeux plus proche encore d'une droite, donc mieux linéarisable...

Comme on le remarque sur la courbe ci-dessous, le surcroît gazeux de K_{Adiab} rejoint l'axe des abscisses à la verticale fuchsia, abscisse à partir de laquelle subsistera un reliquat d'eau non éjectée au terme de la détente de l'air. C'est logique puisque dans la formule de Bruce Berggren l'impulsion est tributaire de la pression relative en fin de propulsion aqueuse⁶⁰ : lorsque cette pression est nulle, l'impulsion l'est aussi. Or la pression dans le réservoir s'annule, par détente de l'air, quand $Q_{\text{Air}} = 1/(P_{\text{init}} + 1)^{1/1,4}$. Dans l'exemple du graphe ci-dessus, cela arrive, pour une pression initiale relative de **7 b** lorsque le Quota d'air atteint **0,23** (donc pour un Quota d'eau de **0,77**). Pour **5 b** ce sera pour un Quota d'eau de **0,72**...

Influence de la Pinit sur le $K_{\text{AdiabEau+Air}}$

Si, dans un premier temps, l'on s'en tient à la Masse Volumique de la fusée usuelle de **67 Kg/M³** on a la bonne surprise de constater que la courbe du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ selon le Quota d'eau est linéarisable avec une bonne précision. L'évolution de la pression initiale de **6 à 8 b relatifs** dessine les trois courbes violettes suivantes :



Au passage, on peut noter que le coefficient $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ que dessinent ces courbes violettes dépasse l'unité sur la gauche du graphe : il faut se souvenir, en effet, que $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ est bénéficiaire du surcroît de propulsion due à l'éjection de l'air

⁶⁰ $\text{Impulsion}_{\text{Air}} = V_f * 4050 P_1^{1,24} / \sqrt{T_1}$

résiduel, alors qu'il n'est référencé qu'au Rapport de Masses destiné, dans nos premiers calculs, à l'étude de la seule Propulsion Aqueuse...

Sur le graphe ci dessus, ont été ajoutées pour mémoire et pour **7 b relatifs**, en bleu dense, le surcroît gazeux au coefficient adiabatique et en rouge ce coefficient adiabatique déjà calculé pour la seule propulsion aqueuse. Les trois droites noires sont les propositions de linéarisation (courbes de tendance) que nous suggère Excel (leurs équations sont affichées sur le graphe). Ceci nous conduit à rédiger le polynôme du premier degré suivant :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = - (1,73-0,07 (7 - P_{\text{init}}))Q_{\text{Eau}} + 1,65 - 0,06 (7 - P_{\text{init}})$$

...dont on voit qu'il reprend, pour $P_{\text{init}} = 7 \text{ b}$, les valeurs proposées par Excel pour la linéarisation de la courbe à cette pression.

Influence de la Masse Volumique de la fusée sur le $K_{\text{AdiabEau+Air}}$

Si l'on remarque à présent , en faisant jouer notre tableau Excel, que **10 Kg/M³** de **Masse Volumique** agissent sur $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ comme **~ 0,5 b relatifs** (la chance, décidément, est avec nous), on peut proposer une équation du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ tenant compte également de l'évolution de cette Masse Volumique. Par essais et erreurs, toujours à l'aide de notre tableau Excel, on en vient assez facilement au polynôme de degré un :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = - \{1,8 - 0,1[7 - (P_{\text{init}} - 0,05(M_{\text{Volumique}} - 67))]\}Q_{\text{Eau}} + 1,68 - 0,075(7 - (P_{\text{init}} - 0,05(M_{\text{Volumique}} - 67)))$$

En effectuant alors les produits internes, nous pouvons alors simplifier l'écriture (mais non la compréhension) de ce polynôme du premier degré :

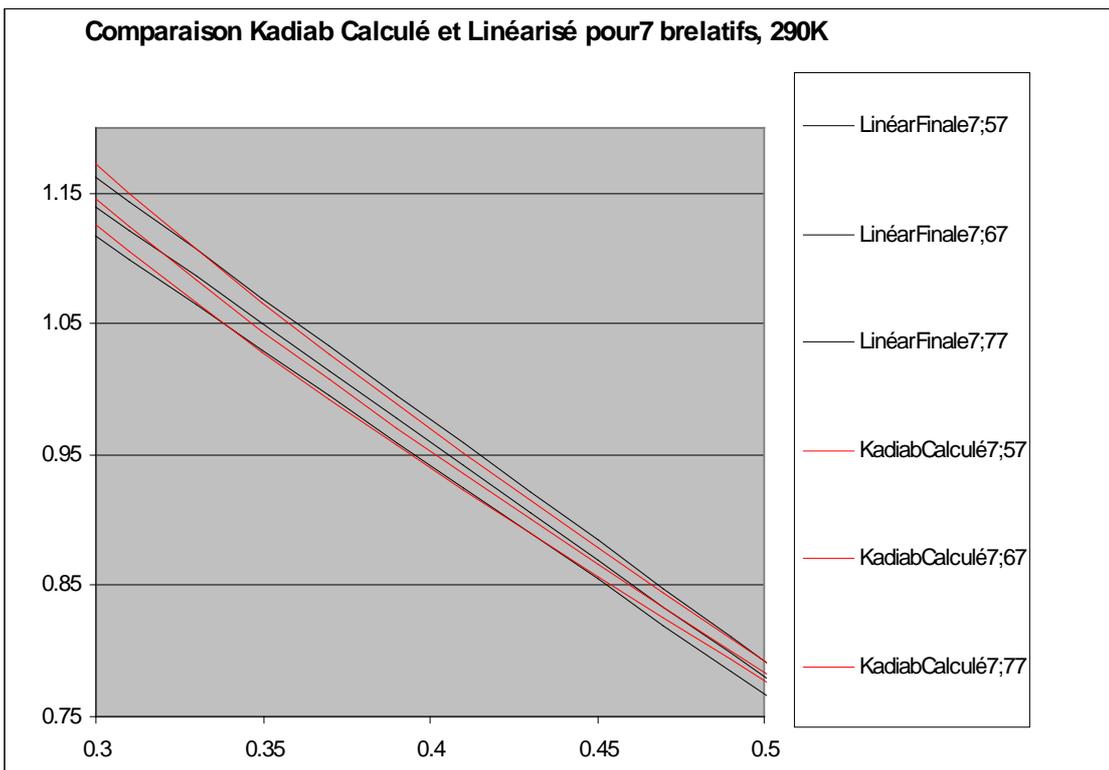
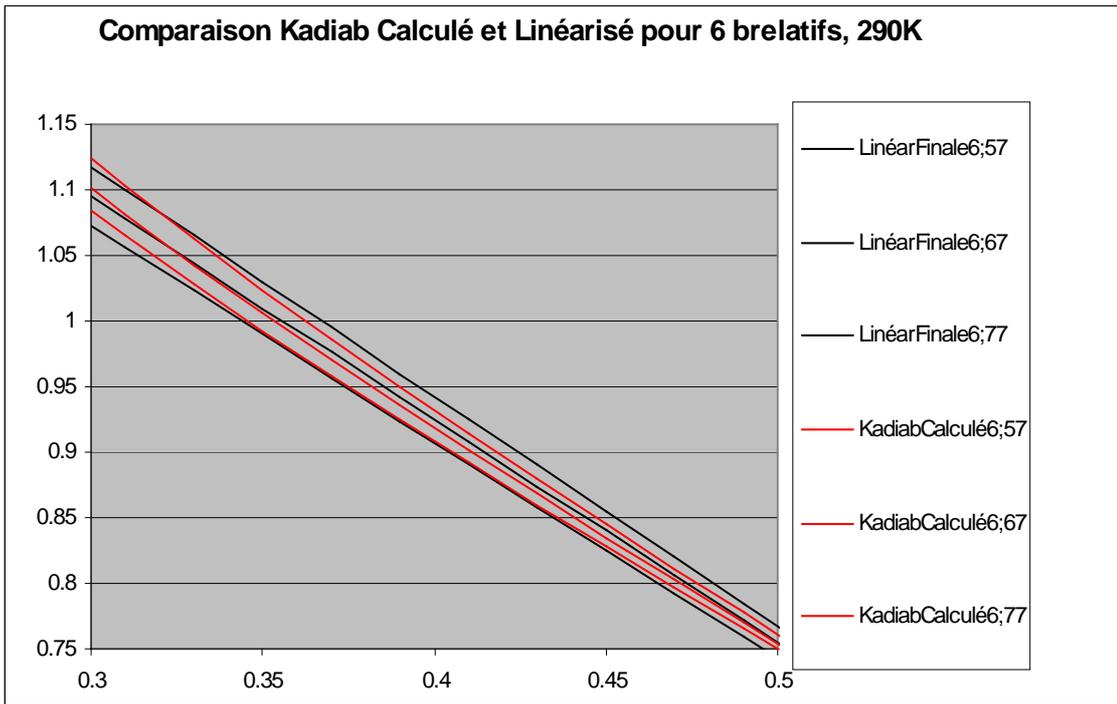
$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = (0,005 M_{\text{Volumique}} - 0,1 P_{\text{init}} - 1,435)Q_{\text{Eau}} + 0,075 P_{\text{init}} - 0,00375 M_{\text{Volumique}} + 1,40625$$

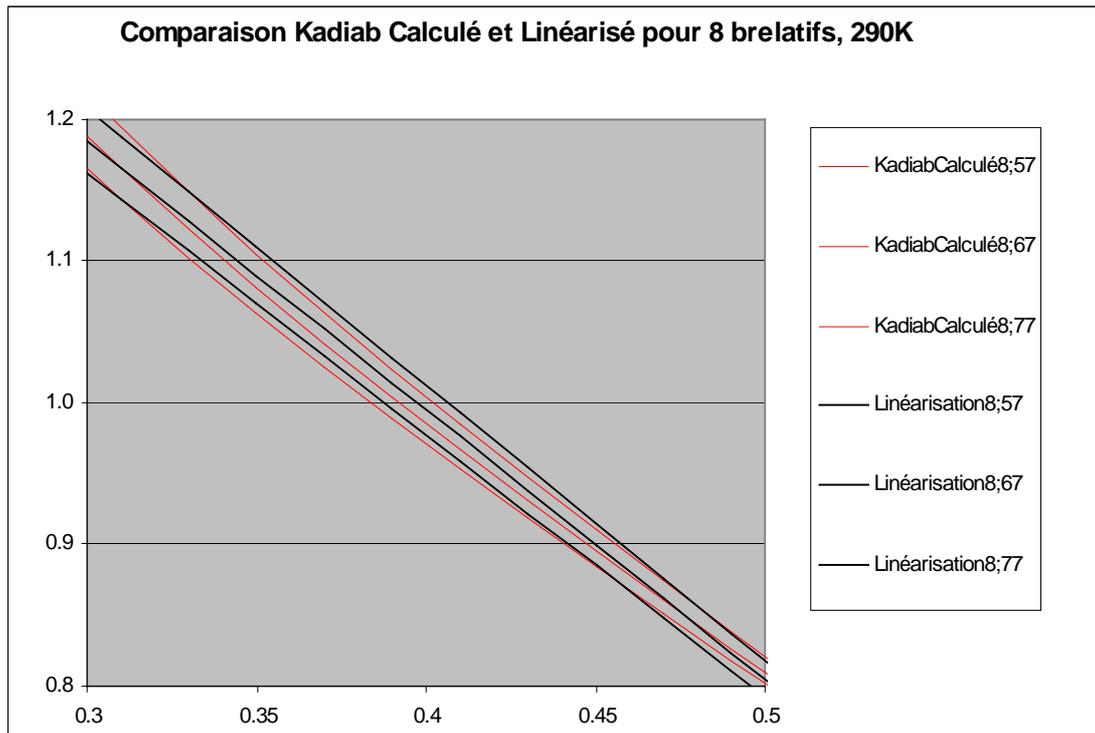
Nous en donnons pour mémoire le libellé en langage Excel :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} =$$

$$(0.005*M_{\text{volumique}} - 0.1*P_{\text{init}} - 1.435)*Q_{\text{eau}} + 0.075*P_{\text{init}} - 0.00375*M_{\text{volumique}} + 1.40625$$

Voici, pour le jeu classique des trois pressions, la comparaison des résultats donnés par ce polynôme (en noir) par rapport aux valeurs calculées par notre tableau Excel (en rouge). Pour chaque pression, les valeurs les plus hautes correspondent évidemment aux plus basses valeurs de la Masse Volumique :





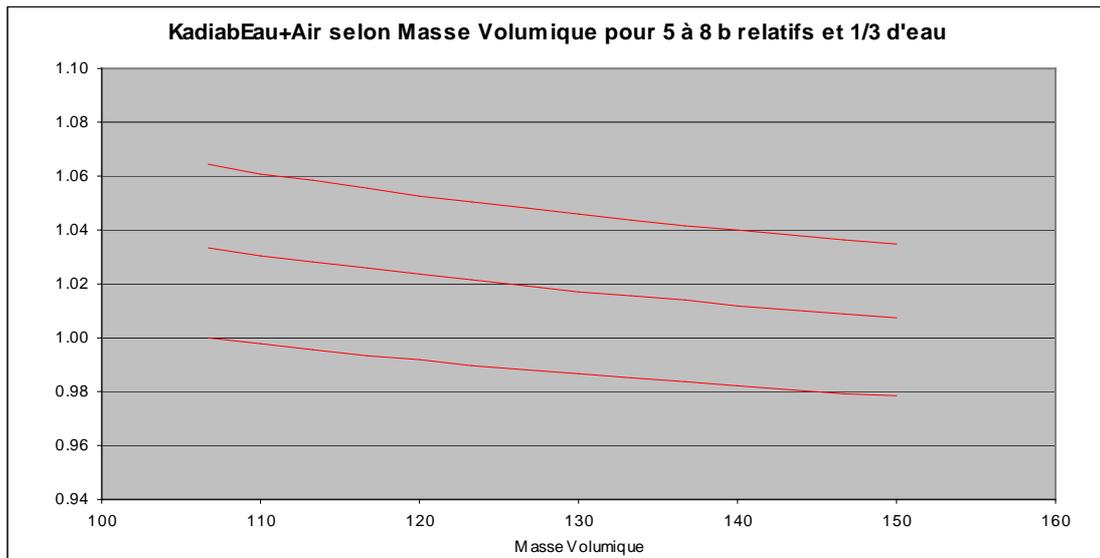
Pour la même raison qu'énoncé plus haut, le coefficient $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ dépasse l'unité sur ces courbes, du fait de l'apport de l'impulsion due à l'éjection de l'air résiduel...

D'ailleurs il peut paraître intéressant, du point de vue didactique, de calculer pour chaque pression initiale et pour un Quota d'eau de 1/3 (remplissage très utilisé), la Masse Volumique pour laquelle notre coefficient adiabatique $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ prend rejoint l'unité. Mais effectuer ce calcul d'après la linéarisation que nous venons de proposer serait une erreur de logique !⁶¹

La méthode consiste donc, soit à déterminer par essais et erreurs les paramètres initiaux qui rendent le $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ unitaire, soit à modifier notre batterie de tableaux Excel de façon qu'ils calculent ce coefficient adiabatique selon non plus le Quota d'eau (qui est fixe ici et choisi comme 1/3) mais selon la Masse Volumique de la fusée...

Dans ces dernières conditions, le graphe suivant est tracé (toujours en tablant sur une température initiale de 290 K) pour les pressions initiales de 6, 7 et 8 b relatifs :

⁶¹ L'erreur réside dans le fait que ces de Masses Volumiques sont tout à fait en dehors de la plage où notre linéarisation est valide.



On peut apprécier que $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ n'évolue pas non plus très fortement selon la Masse Volumique de la fusée (moins de **0,7 %** pour **10 Kg/M³** de Masse Volumique).

À **6 b** relatifs, le $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ unitaire intervient pour une Masse Volumique de **106,3 g**, pour ce Quota d'eau de **1/3**.

Mais aux pressions de **7 et 8 b**, au même Quota d'eau, la Masse Volumique donnant cette valeur unitaire à notre coefficient est par trop éloignée des valeurs usuelles...

Simplification des coefficients :

Un travail de simplification des coefficients, par essais et erreurs, permet cependant de considérer le polynôme suivant comme acceptable dans les limites que nous nous sommes toujours imparties, c'est-à-dire **Masse Volumique de 57 à 77 Kg/M³**
Pression Initiale de 6 à 8 bars relatifs et **Q_{eau} de 0.3 à 0.5** :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = (0,005 M_{\text{Volumique}} - 0,1 P_{\text{init}} - 1,42) Q_{\text{Eau}} + 0,075 P_{\text{init}} - 0,00375 M_{\text{Volumique}} + 1,4$$

qui est la valeur de notre Coefficient Adiabatique pour la propulsion due à l'eau puis à l'air, sans influence de la colonne d'eau et dans les limites :

de **Masse Volumique de 57 à 77 Kg/M³**,
de **Pression Initiale de 6 à 8 bars relatifs**
et de Quotas d'eau de **0,3 à 0,5**.

avec :

Q_{eau} le Quota d'eau dans le réservoir de la fusée

P_{init} la pression en **b relatifs** dans le réservoir de la fusée au moment du lancement

M_{Volumique} la Masse Volumique de la fusée, soit le quotient de sa masse à vide par le volume de son réservoir.

... lequel polynôme ne peut être compris d'Excel que sous la forme :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} =$$

$$(0.005 * M_{\text{volumique}} - 0.1 * P_{\text{init}} - 1.42) * Q_{\text{eau}} + 0.075 * P_{\text{init}} - 0.00375 * M_{\text{volumique}} + 1.4$$

VALEUR DU MÊME $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ DANS LE CAS DE LANCEMENTS EN MILIEU SCOLAIRE À 5 b RELATIFS

Pour des fusées lancées à la pression initiale de **5 b relatifs** en milieu scolaire notre tableau Excel nous permet de déterminer spécialement que ce même $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ est tributaire du polynôme du premier degré suivant, selon le Quota d'eau et la Masse Volumique de la fusée :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = -\{1,6621 + (67 - M_{\text{Volumique}}) 0,00645\} Q_{\text{Eau}} + 1,547 + 0,00354(67 - M_{\text{Volumique}})$$

... ce polynôme étant évidemment simplifiable comme suit :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = -(2,09425 - 0,00645 M_{\text{Volumique}}) Q_{\text{Eau}} + 1,7845 - 0,00354 M_{\text{Volumique}}$$

qui est la valeur de notre Coefficient Adiabatique pour la propulsion due à l'eau puis à l'air, sans influence de la colonne d'eau,

pour une **Pression Initiale de 5 bars relatifs**,

et dans les limites :

de **Masse Volumique** de **57 à 77 Kg/M3** ;

et pour un remplissage en eau allant de **0.3 à 0.5** .

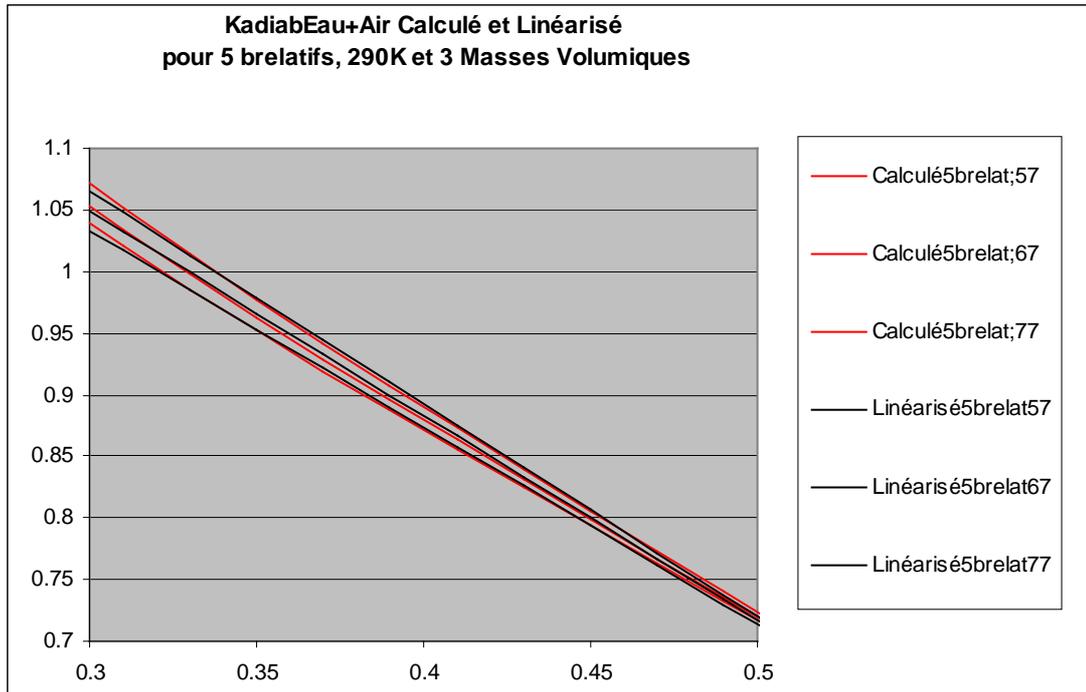
avec :

Q_{eau} le Quota d'eau dans le réservoir de la fusée

P_{init} la pression relative dans le réservoir de la fusée au moment du lancement

$M_{\text{Volumique}}$ la Masse Volumique de la fusée, soit le quotient de sa masse à vide par le volume de son réservoir.

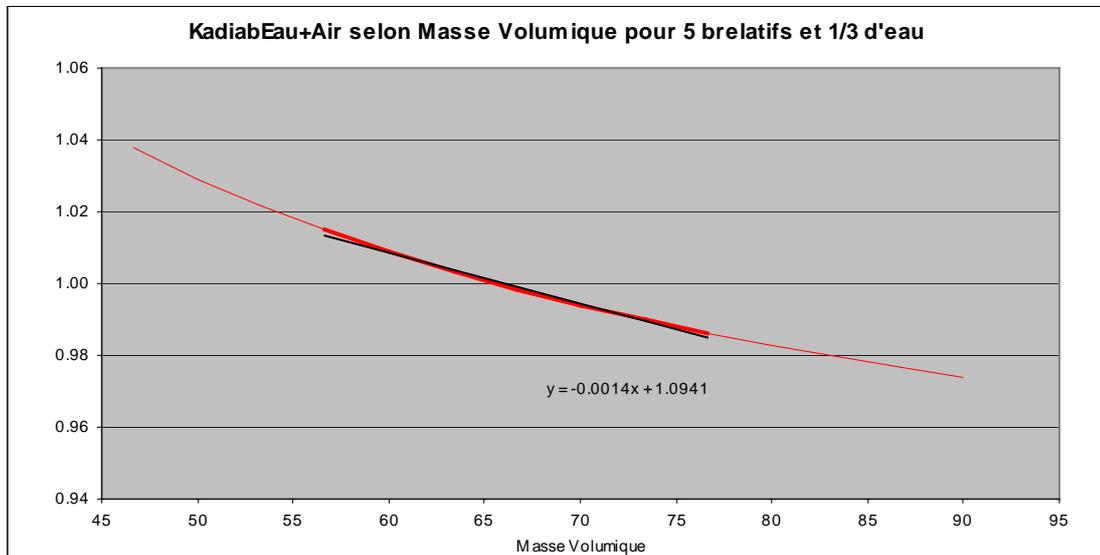
Ce polynôme donne les résultats suivants (les valeurs les plus hautes correspondant toujours aux plus basses valeurs de la Masse Volumique de la fusée) :



Le même polynôme donne au Coefficient adiabatique une valeur **unitaire** (à cette pression de **5 b relatifs**, pour un Quota d'eau de **0,33** et une température initiale de **290 K**) pour une Masse Volumique de **62,17 g/L**, ce qui demeure tout à fait dans la plage où notre linéarisation est valable. Cette Masse à Vide est très usuelle pour des fusées de **1,5L**... ⁶²

⁶²L'intégration d'Excel nous propose directement, quant à lui (sans utilisation d'une quelconque linéarisation, donc) la valeur de **65,5 Kg/M³** pour l'obtention de ce coefficient adiabatique unitaire, ceci pour ces **5 b relatifs**.

D'ailleurs notre batterie de tableaux Excel adaptés au calcul du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ selon la Masse Volumique de la fusée dessine le graphe suivant, pour **5b** de pression initiale et un Quota d'eau standard et fixe de **1/3** (toujours en tablant sur une température initiale de **290 K**) :



La valeur **unitaire** du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ n'est donc pas atteinte pour **62,17 g/L**, ainsi que nous le promettait notre polynôme, mais pour **67 g/L** :

Cette erreur (de **7 g** sur une fusée de **1,5 L**) est, bien sûr, une conséquence des approximations qu'impose toute linéarisation ; mais il faut songer également que la pente du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ est très faible et que si cette pente améliore la précision de détermination de notre $K_{\text{AdiabEau+Air}}$, elle diminue la précision de la démarche réciproque (à savoir la recherche de la Masse Volumique d'après $K_{\text{AdiabEau+Air}}$)...

Néanmoins, la faible variation du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ dans la plage de Masses Volumiques où nous nous sommes toujours tenus (il varie, à peu près, de **1,5 %** de part et d'autre de la Masse Volumique de **67 g/L**) est fort satisfaisante. Elle nous permet d'affirmer que, pour des Masses Volumiques de fusées allant de **57 à 77 g/L**⁶³ :

Pour des lancements en milieu scolaire à **5b relatifs** et au Quota d'eau de **1/3**, le coefficient $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ est très peu différent de l'unité.

Cette affirmation ne tient pas compte de l'effet de la colonne d'eau⁶⁴.

C'est un hasard qui peut avoir des vertus pédagogiques : pour ce type de lancements, la formule de Tsiolkovski est applicable sans coefficient pondérateur, du moins si l'on prend comme vitesse constante d'éjection de l'eau la vitesse hydraulique initiale, à savoir :

$$V_{\text{éjectInit}} = \sqrt{2P_{\text{init}}/\rho} \quad \text{avec } P_{\text{init}} \text{ en } \mathbf{b} \text{ relatifs}$$

⁶³ soit pour des fusées de **1,5 L** d'une masse courant de **85,5 à 115,5 g**

⁶⁴ Nous la prendrons en compte plus loin.

Ceci étant, et ainsi qu'on l'aperçoit sur le graphe, Excel propose pour $K_{\text{AdiabEau+Air}}$, dans ce cadre des lancements à **5 bars relatifs** au Quota d'eau de **1/3**, la régression linéaire suivante :

$$K_{\text{AdiabEau+Air}} = -0,0014 M_{\text{Volumique}} + 1,0941$$

valeur de notre coefficient $K_{\text{AdiabEau+Air}}$, sans l'effet de la colonne d'eau, pour une pression initiale de **5 b relatifs**, un **Quota d'eau** de **1/3** et une température initiale de **290 K**.

Ce polynôme utilise (à **1%** près) les mêmes paramètres que le polynôme tiré de la linéarisation du $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ pour **5 b** et un Quota d'eau variable lorsque l'on fige ce Quota d'eau à la valeur **1/3**.

Note sur l'altitude atteinte par cette fusée de 62,17 Kg/M³ (à $K_{\text{adiabEau+Air}}$ unitaire) lancée au Quota d'eau de 1/3 en milieu scolaire (soit à 5 b relatifs)

Le $K_{\text{AdiabEau+Air}}$ unitaire de notre engin lui confère évidemment une Vitesse de Fin de Propulsion (eau et air) de :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éjectInit}} \text{Ln}\{(M+Q)/M\}$$

Comme la Vitesse d'éjection initiale est de **31,62 m/s** (pour ces **5 b relatifs**), la Vitesse de Fin de Propulsion qui en découle (du fait du logarithme du rapport de Masses) est de **58,511 m/s**.⁶⁵

Reprenons notre expression de l'altitude atteinte selon cette Vitesse de Fin de Propulsion (expression déjà citée⁶⁶) :

$$H_{\text{Culm}} = H_{\text{FinProp}} + (D_b/2) \text{Ln}[(1 + V_{\text{Finprop}}^2 / V_{\text{Lim}}^2)]$$

Un C_x de **0,45**⁶⁷, une section frontale de diamètre **83 mm** et cette Masse Volumique de **67 Kg/M³** (soit **93,25 g** de Masse à Vide) donnent à notre projectile une distance balistique ($1/b$) de **62,53 m** et une Vitesse Limite de chute de **24,77 m/s**⁶⁸ :

Si l'on admet forfaitairement une altitude de fin de propulsion de **2 m**, l'altitude atteinte par la fusée sera :

⁶⁵ La Masse à sec étant de **93,25 g**, le Rapport de Masses est de **6,36** et son logarithme de **1,85...**

⁶⁶ et explicitée dans "LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE".

⁶⁷ C_x de 0,45, rapporté à la seule section frontale du fuselage proposé pour des fusées à fort culot, càd à jupe longue. Pour des fusées à petit culot, càd profilées à l'exemple de la fusée lunaire de Tintin, on peut viser un C_x de 0.3 ...

⁶⁸ La Vitesse Limite vaut également $\sqrt{(g/b)}$ ou encore $\sqrt{(gD_b)}$.

$$H_{\text{Culm}} = 2 + (62,53/2) \text{Ln}[1 + (58,511/24,77)^2] = 60,91 \text{ m}$$

Pour des fusées mieux profilées dotée d'un C_x de **0,3**, la hauteur d'apogée serait de **74,785 m**.

CONCLUSION PROVISoire DE CETTE PARTIE TRAITANT DE LA PROPULSION DUE À L'ÉJECTION DE L'EAU ET À CELLE DE L'AIR (mais sans prise en compte de l'effet de la colonne d'eau)

Nous progressons dans notre généralisation de la formule de Tsiolkovski. Nous pensons en effet avoir quantifié la Vitesse de Fin de Propulsion avec une assez bonne précision ; néanmoins nous pouvons encore accroître cette précision en opérant la prise en compte de l'apport, sur la pression d'éjection, de la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de la tuyère.

C'est de cette tâche que nous allons nous acquitter dans cette dernière partie.

Après mise en équation du phénomène, nous aurons la chance de voir nos calculs se simplifier d'une façon que nous n'espérons même pas...

TROISIÈME PARTIE :

3 : PRISE EN COMPTE DE LA HAUTEUR DE LA COLONNE D'EAU

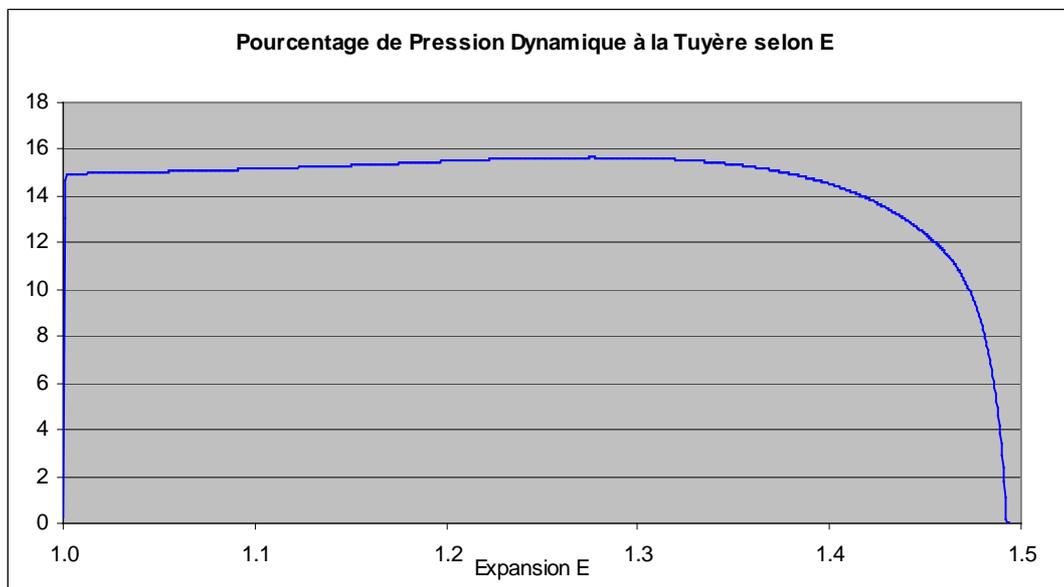
Quelle est l'influence de la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de la tuyère sur la propulsion d'une fusée à eau ?

Dans les calculs de propulsion que nous avons menés jusque là, nous prenions comme Vitesse d'Éjection la vitesse due à la Pression de l'air comprimé au-dessus de la surface libre du liquide.⁶⁹

Or la masse d'eau embarquée dans la fusée est soumise elle-même à l'accélération de la fusée et cette accélération crée évidemment une pression supplémentaire à la tuyère, pression qui vient s'ajouter arithmétiquement à la pression due au seul air comprimé.

Que l'accélération de la fusée puisse produire en retour un surcroît de propulsion peut poser une question logique aux lecteurs les plus intuitifs. Nous évoquons ce problème dans la note de fin de texte [Moralité de l'effet propulsif de la colonne d'eau](#).

Voici, d'après une simulation pas par pas, le pourcentage de la Pression à la Tuyère qui est dû à cette accélération, au cours du vol d'une fusée type de **1,5 L** d'une masse à vide de **0,1 Kg**, embarquant **1/3** d'eau, lancée à la pression de **7 b relatifs** et éjectant son eau à travers une tuyère standard de **21,7 mm** de diamètre :



⁶⁹ Nous admettions pour ce faire que l'aire de la surface libre de l'eau est très supérieure à l'aire de la tuyère, ce qui ne grevait nos calculs d'une erreur de **0,5 %** pendant la plus grande partie de la propulsion...

On voit que si ce surcroît de pression ne constitue qu'un appoint, cet appoint existe sur une bonne partie de la Phase Propulsive et son importance atteint presque **16 %**.⁷⁰

L'effet de la colonne d'eau est cause, au terme de la Propulsion, d'un surcroît de vitesse atteignant presque **6 %**, selon nos simulations⁷¹, ce qui ne peut donc être considéré comme négligeable.

Mais pourquoi, alors que le surcroît de pression à la tuyère se monte à presque **16 %**, le surcroît de vitesse n'atteint-il pas le même pourcentage ?

D'abord, ce surcroît de pression n'atteint pas **16 %** durant toute la propulsion (en particulier, la courbe montre bien qu'il chute vers la fin, instant où la fusée est très légère et où elle fabrique une grande partie de sa vitesse).

Ensuite, il faut penser que le pourcentage de **6 %** compare les calculs effectués avec et sans l'appoint de pression dû à la hauteur de la colonne d'eau. Or lorsque l'on calcule sans tenir compte de cet appoint, la vitesse d'éjection est moindre (puisque la pression d'éjection est moins forte de **~15 %**) et donc la Phase Propulsive dure plus longtemps, ce qui rapproche en partie les deux calculs...⁷²

Les réflexions qui précèdent montrent qu'il est logique de chercher à prendre en compte le surcroît de pression à la tuyère que crée l'accélération de la fusée sur la masse d'eau.

Au cours de notre réflexion, nous serons amenés à appeler *Pression Dynamique* cette composante de la Pression à la Tuyère qui est due à la présence de la colonne d'eau : en effet, cette pression dynamique est due au fait que la fusée n'est pas inerte, mais au contraire accélérée...⁷³

La Pression à la Tuyère sera donc considérée par nous comme la somme de la *Pression Statique* (due à l'air comprimé) et de la *Pression Dynamique* (due à l'effet de la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de la tuyère)...

Puisque nous décidons de tenir compte de la colonne d'eau dans notre calcul de la Vitesse de Fin de Propulsion U_{FinProp} , nous devons reprendre le calcul précédent (pour la seule propulsion aqueuse) à l'équation (35).

⁷⁰ La montée de la courbe, à gauche, n'est pas forcément due à la montée en Vitesse d'Éjection de la fusée, bien que ce phénomène existe (voir notre texte à ce sujet). Ici elle est due à la méthode de calcul choisie par nous...

⁷¹ Pour une tuyère de **21,7mm**, donc, et pour une forme de bouteille assez standard. On verra que ce surcroît de Pression et de Vitesse de Fin de Propulsion dépend légèrement des paramètres initiaux classiques mais beaucoup plus de la section de la tuyère et de la Masse à Vide

⁷² Le temps de propulsion est globalement proportionnel à l'inverse de la racine carrée de la pression à la tuyère. Une augmentation de la pression d'un facteur **1,16** pondère donc le temps de propulsion par un coefficient **0,928**. Comme la vitesse de fin de propulsion est elle-même proportionnelle à la pression à la tuyère (pondérée, elle, par **1,16**), la vitesse de fin de propulsion est pondérée d'un coefficient **0,928 x 1,16**, ce qui donne **1,077**... On voit que, pour notre satisfaction, les deux modes de calcul se rapprochent d'eux-mêmes...

⁷³ Si la fusée était inerte, l'eau se mettrait d'ailleurs en boule dans le réservoir, par disparition des notions de « haut et de bas » et ceci malgré la gravité terrestre. Nous reviendrons plus loin sur ce paradoxe...

Cette équation quantifie U_{FinProp} en fonction des paramètres initiaux (constants durant le vol) et en fonction des variables P_{Tuy} et **Masse Instantanée** de la fusée, laquelle vaut $M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)$ (ces deux variables évoluant selon le taux d'expansion E) :

(Équation 35)

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E = 1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{P_{\text{Tuy}}}}{M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)} dE$$

Rappelons que nous l'avons obtenue en recherchant la valeur de l'accélération de la fusée, laquelle est égale au quotient de la force de propulsion (prise comme $2PS_{\text{Tuy}}$) par la masse instantanée de la fusée (qu'on peut lire ci-dessus au dénominateur).

Un changement de variable s'est imposé à nous, celui de t en E . Nous en avons déterminé les modalités en rapprochant deux valeurs du Débit Massique D_m :

$$\rightarrow \text{d'une part } D_m = \rho V_{\text{éject}} S_{\text{Tuy}}$$

\rightarrow d'autre part la dérivée par rapport au temps de la Masse Instantanée de la fusée exprimée selon la variable E à savoir : $\rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)$, dérivée qui donne :

$$D_m = \rho V_f Q_{\text{Air}} \frac{dE}{dt}$$

Le changement de variable se fait donc selon les modalités :

$$dt = \frac{\rho V_f Q_{\text{Air}}}{S_{\text{Tuy}} \sqrt{2\rho P_{\text{Tuy}}}} dE$$

Nous venons de retracer cette étape de notre travail pour mettre en lumière le fait que nous n'avons, durant l'établissement de l'équation (35), fait aucune hypothèse sur la nature de P_{Tuy} : c'est la Pression de l'eau à la Tuyère, sans autres précisions...

À présent, à fins de faciliter sa manipulation, nous allons présenter cette équation (35) plus symboliquement, en remplaçant la Masse Instantanée de la fusée $M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)$ (variable en fonction de E) par M_{fE} et en adjoignant à P_{Tuy} l'indice E afin de bien indiquer que cette pression à la tuyère est également dépendante de l'expansion E ...

Le nouveau libellé de l'équation (35) est donc :

(Équation 36)

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{dE=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{P_{\text{TuyE}}}}{M_{fE}} dE$$

C'est sur cette équation (36) que nous appuierons dorénavant notre réflexion...

Dans cette équation (36), quelle valeur faut-il donner à P_{TuyE} , la Pression Instantanée à la tuyère ?

Comme nous avons décidé de prendre en compte le surcroît de pression à la tuyère que crée l'accélération de l'engin sur la colonne d'eau au-dessus de la tuyère ⁷⁴, nous devons inscrire pour la Pression d'Éjection à cette Tuyère :

$$P_{\text{TuyE}} = P_E + \rho H_E (g + U'_E)$$

expression où :

P_E représente la Pression (statique) de l'air comprimé au-dessus de l'eau

g l'accélération de notre pesanteur

H_E la hauteur de ladite eau

et U'_E l'accélération instantanée, à l'expansion E (U'_E étant la dérivée de U , la vitesse instantanée, par rapport au temps)

H_E , la hauteur de l'eau au-dessus de la tuyère est, bien sûr, éminemment variable durant la propulsion. C'est pourquoi nous l'avons dotée de cet indice E ...

Le calcul de H_E , à chaque taux d'expansion est facile à effectuer : on ramène le volume du réservoir à un cylindre surmontant deux troncs de cônes ⁷⁵. Le tronc de cône le plus bas, sur une bouteille normale, est raccordé sur la tuyère cylindrique (le goulot) ⁷⁶

À notre avis, on ne doit pas compter dans H_E la hauteur de ce goulot : la vitesse d'éjection de l'eau est en effet acquise dès son entrée dans le goulot cylindrique, et la longueur du goulot est plutôt génératrice de frottements. En tout cas elle n'est pas génératrice d'augmentation de pression dynamique et donc de surcroît de vitesse d'éjection... ⁷⁷

⁷⁴ C'est ainsi que l'on s'exprime souvent, bien qu'en fait l'accélération agisse sur toutes les particules d'eau embarquée...

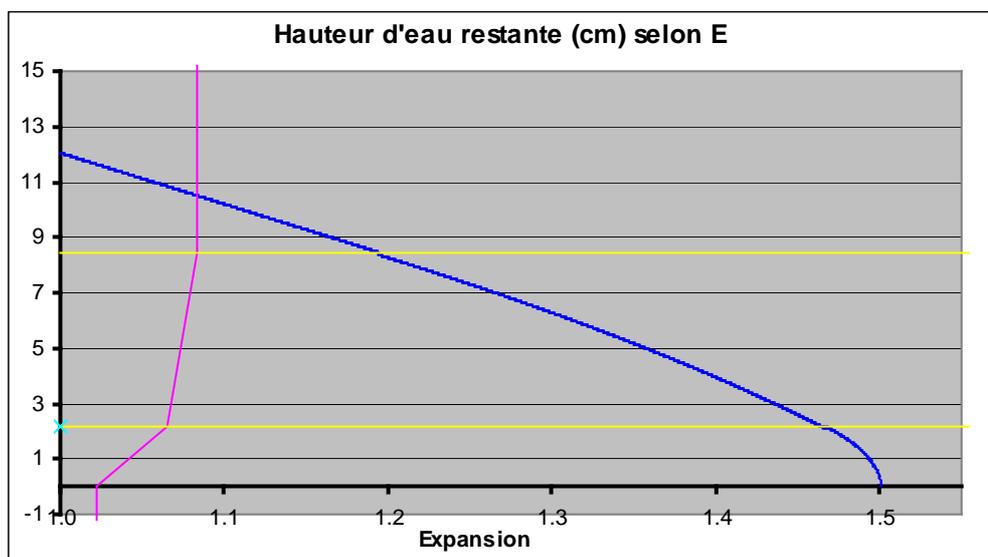
⁷⁵ Cette simplification de la forme de la bouteille est satisfaisante dans la plupart de cas, mais rien n'empêche d'affiner le calcul en ramenant le réservoir à un nombre plus grand de formes élémentaires.

⁷⁶ Nous supposons le goulot parfaitement cylindrique, pour simplifier. Dans la réalité il ne l'est pas tout à fait, mais cela ne fait pas beaucoup de différence pour notre calcul...

⁷⁷ C'est un problème de physique intéressant, qui peut être résolu par l'expérience : un réservoir (à l'air libre) se videra-t-il plus vite ou moins vite sous l'action de la pesanteur s'il évacue son eau à travers un goulot normal ou un goulot prolongé par un tuyau de même diamètre ?

Pour effectuer notre intégration de $U_{FinProp}$, il nous faudra donc déterminer à chaque instant (à chaque taux d'expansion E) la hauteur de l'eau restant dans le réservoir. Dans ce but, nous utiliserons les fonctions logiques d'Excel qui détermineront dans quelle partie du réservoir se trouve la surface libre de l'eau (dans le cylindre supérieur, dans le premier ou le deuxième tronç de cône). Dans chacune de ces sections du réservoir, le calcul de la hauteur de l'eau H_E pourra alors être réalisé de façon analytique.

Voici (en bleu) un exemple de l'évolution de H_E selon la masse d'eau restante, durant la propulsion d'une fusée type de **1,5 L** remplie de **1/3** d'eau et dont le réservoir est ainsi ramené à un cylindre et à deux tronç de cônes, comme l'indique la silhouette violette :



On lit sur ce graphe qu'après s'être maintenue linéaire par rapport à l'expansion et donc à la masse d'eau restante (surface libre dans la partie cylindrique), la hauteur d'eau décrit deux courbes coniques (c'est le cas de le dire) (la surface libre dans l'un ou l'autre des tronç de cône), avant de rejoindre le zéro ...

Au passage, on peut noter qu'il serait intéressant de trouver une fonction analytique qui donnerait une évolution comparable à la courbe bleue...

Ceci étant, et sans donner plus de détails sur la valeur de H_E , nous sommes en droit d'injecter dans l'équation (36) la valeur :

$$P_{TuyE} = P_E + \rho H_E (g + U'_E)$$

Cela donne :

Le cas de figure où le réservoir n'est qu'un simple tuyau est d'ailleurs évocateur : quelle pression d'éjection doit on attendre à la tuyère ?

(Équation 37)

$$\mathbf{U}_{\text{FinProp}} = -\mathbf{g}\mathbf{T} + \mathbf{V}_f \mathbf{Q}_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{\mathbf{E}=1}^{\mathbf{E}=1/\mathbf{Q}_{\text{Air}}} \frac{\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{E}} + \rho \mathbf{H}_{\mathbf{E}} (\mathbf{g} + \mathbf{U}'_{\mathbf{E}})}}{\mathbf{M}_{f\mathbf{E}}} d\mathbf{E}$$

Nous venons de cette façon d'effectuer une première correction à la valeur de la pression à la tuyère et donc à la valeur de $\mathbf{U}_{\text{FinProp}}$. Pourtant, cette correction à $\mathbf{U}_{\text{FinProp}}$ est un peu spéciale puisqu'elle dépend d'une variable ($\mathbf{U}'_{\mathbf{E}}$) que nous ne connaissons pas et qui d'ailleurs est à la source de notre intégration (puisque $\mathbf{U}_{\text{FinProp}} = -\mathbf{g}\mathbf{T} + \int \mathbf{U}'_{\mathbf{E}}$).

Mathématiquement, ce n'est pas gênant : lorsqu'on résout une équation différentielle, on est justement toujours dans ce cas où le résultat dépend (selon une certaine loi) de lui-même... Et nous sommes dans un cas qui relève typiquement d'une équation différentielle...

D'ailleurs, et par chance, nous avons déjà établi, dans l'équation (25) page 8, la valeur de l'accélération instantanée $\mathbf{U}'_{\mathbf{E}}$:

(Équation 25)

$$\mathbf{U}'_t = -\mathbf{g} + \frac{2 \mathbf{S}_{\text{Tuy}} \mathbf{P}_{\text{Tuy}}}{\mathbf{M} + \rho \mathbf{V}_f (1 - \mathbf{Q}_{\text{Air}} \mathbf{E})}$$

équation que nous pouvons réécrire, conformément à notre nouvelle notation symbolique :

(Équation 26)

$$\mathbf{U}'_{\mathbf{E}} = -\mathbf{g} + \frac{2 \mathbf{S}_{\text{Tuy}} \mathbf{P}_{\text{TuyE}}}{\mathbf{M}_{f\mathbf{E}}}$$

Il est tout à fait légitime d'injecter cette valeur de $\mathbf{U}'_{\mathbf{E}}$ dans l'équation (37). Cela nous donne :

(Équation 38)

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho} \int_{E=1}^{E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\sqrt{P_E + \rho H_E (2S_{\text{Tuy}} P_{\text{TuyE}}/M_{fE})}}{M_{fE}} dE$$

Ne manquons pas de constater en passant que sous le signe d'intégration le terme g a disparu. Cela correspond bien à la réalité physique : la pression dynamique ne dépend effectivement pas de la gravité puisque c'est tout l'ensemble de la fusée (réservoir + eau embarquée) qui lui est soumis : comme et le réservoir de la fusée et l'eau qu'elle contient sont "accélérés" par la pesanteur, cette pesanteur ne crée aucun mouvement relatif entre ces deux sous-ensembles et donc aucune pression dynamique...⁷⁸

Ne manquons pas non plus de constater que la valeur de U_{FinProp} est à présent tributaire de S_{Tuy} et de H_E : Jusque là, dans nos calculs qui ne prenaient pas en compte la hauteur de la colonne d'eau, la vitesse de fin de propulsion U_{FinProp} était indépendante de S_{Tuy} . Quant à H_E , rappelons qu'il s'agit d'une variable évoluant tout au long du vol et que cette variable est liée à la silhouette du réservoir de la fusée...

Cette équation (38) est intéressante... Sauf que nous sommes confrontés une nouvelle fois à la question : Quelle valeur faut-il donner à P_{TuyE} , la Pression Instantanée à la tuyère ?

N'empêche, nous sentons confusément que nous avons progressé.

À ce stade de la démarche, on pourrait d'ailleurs faire l'approximation de donner à P_{TuyE} la valeur P_E : En effet, dans l'équation (38) la valeur de P_{TuyE} que nous ne connaissons pas est pondérée par le coefficient $2\rho H_E S_{\text{Tuy}} / M_{fE}$ qui s'avère être largement inférieur à 1 (il fluctue au-dessous de 0,2) : au présent stade, toute approximation sur P_{TuyE} en serait minorée d'autant...

Mais quantifions un peu mieux cette assertion qui veut que plus on avance dans la définition de P_{TuyE} , et moins sa valeur devient importante :

Nous avons prétendu, sur la foi de nos simulations informatiques, que la pression dynamique P_{TuyE} n'était qu'un appoint pour P_E (appoint tournant autour des 16 % pour une fusée type de 1,5 L) : C'est comme cela qu'on peut interpréter le terme additif $\rho H_E (2S_{\text{Tuy}} P_{\text{TuyE}}/M_{fE})$ que nous lisons sous le radical dans l'équation (38), du moins lorsqu'on se persuade que le coefficient (variable selon E) $2\rho H_E S_{\text{Tuy}} / M_{fE}$ garde une valeur très en dessous de l'unité.

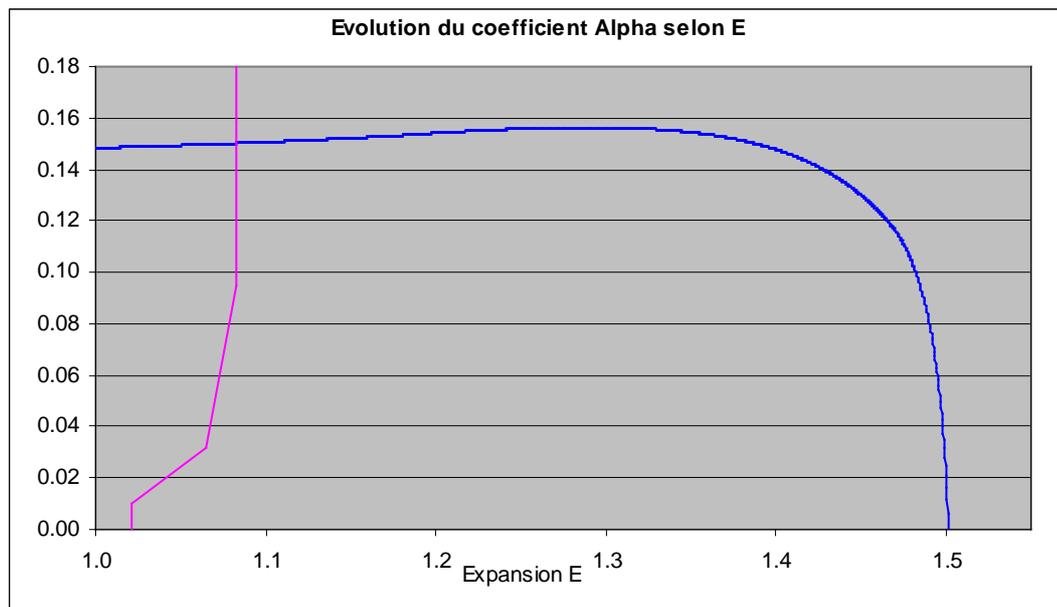
⁷⁸ Il s'agit là de notions en apparence très paradoxales que toute notre intelligence quotidienne refuse d'accepter... Il faut des années de réflexions pour réussir à admettre qu'à l'intérieur d'un mobile abandonné à la seule action de la pesanteur les objets vivent un état d'impesanteur. C'est d'ailleurs ce que vivent également les passagers de l'Airbus Zéro G, et .. les cosmonautes dont ont dit souvent qu'ils vivent une chute sans fin dans un vaisseau spatial qui chute également.

Nommons α ce coefficient $\rho H_E 2S_{Tuy} / M_{fE}$ (variable selon E) : cet α ne dépend, répétons-le que de la géométrie du réservoir, de la section de la tuyère et de la Masse Instantanée de la fusée.

On peut écrire alors, sous le radical présent dans (38) :

$$P_E + \alpha P_{TuyE}$$

Voici la fluctuation de ce coefficient α durant la propulsion (donc selon l'expansion E), sur une fusée type de **1,5 L**, de **83 mm** de diamètre pour une Masse à Vide de **0,1 Kg**, remplie au tiers d'eau et disposant d'une tuyère de **21,7 mm**. La silhouette du réservoir n'est là que pour mémoire.⁷⁹ :



On note que ce graphe a la même physionomie que celui du pourcentage de Pression Dynamique à la Tuyère que nous avons présenté au début de cette “prise en compte de la hauteur de la colonne d’eau”. Nous sommes donc en bonne voie avec cette simple correction *de premier ordre* ...

Remarquons que la partie de gauche n'est pas linéaire : c'est une hyperbole très tendue.

Admettons **0,16** comme valeur maximum pour le coefficient α . On a donc :

$$P_{TuyE} < P_E + 0,16 P_{TuyE}$$

⁷⁹ Nous avons réduit le volume de ce réservoir à une partie cylindrique raccordée à deux troncs de cône (conicité hauteur/diamètre de 3,5 et de 0,5), ce qui est assez représentatif des bouteilles de boissons gazeuses fréquemment utilisées par les hydrofuséistes... Rappelons que nous ne comptons pas la petite hauteur de cylindre que constitue le goulot, car cette hauteur ne nous paraît nullement génératrice de vitesse d'éjection supplémentaire (puisque la section de sortie de ce goulot est la même que la section d'entrée). Au contraire, cette partie cylindrique de la tuyère nous apparaît comme factrice de pertes par frottement.

Dans cette inégalité, donner d'autorité à l'occurrence de droite de la Pression à la Tuyère P_{TuyE} (qui est pondéré par ce **0,16**) la valeur approchée P_E (pression de l'air enclos, soit **16 %** d'erreur) ne fera que minorer le résultat de **0,16 x 0,16** soit **2,5 %**.

Comme la valeur de P_{tuyE} ainsi fixée reste sous l'égide de la racine carrée, l'erreur qui résulte de notre approximation ne sera plus que de **1,26 %**...

L'approximation $P_{TuyE} = P_E + \alpha P_E$ est donc recevable pour une correction de premier ordre de la Pression à la Tuyère P_{TuyE} .

On peut donc accepter l'équation (38b) suivante :

(Équation 38 b)

$$U_{FinProp} = -gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{à E = 1/Q_{Air}} \frac{\sqrt{P_E (1 + \alpha)}}{M_{fE}} dE$$

avec $\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$, variable dépendant de la géométrie du réservoir, de la Masse à Vide et de l'aire de la tuyère.

Quelle est la signification physique de $\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$?

α représente (à chaque instant ou à chaque Taux d'Expansion) le double du quotient de la Masse de la Colonne d'Eau au-dessus de la tuyère par la Masse Totale Instantanée de la fusée.

Remarquons au passage que α est un coefficient sans dimension ce qui, pour des amateurs de Physique, apparaît toujours comme un gage d'universalité...

Donnons quelques valeurs types (et instantanées) de α :

→ Quelques instants après le décollage de la fusée, la Masse à Vide peut être considéré comme faible devant la masse d'eau restante : Le coefficient α est assez proche du quotient de la section de la tuyère (par ex. **21,7 mm**) sur la section de la fusée (par ex. **83 mm**). Ce quotient vaut, toujours par exemple, **0,136**.⁸⁰

→ Vers la toute fin de la phase propulsive, la Masse à Vide de la fusée devient prépondérante dans sa Masse Totale M_{fE} (cette Masse Totale tend donc vers la Masse à Vide), alors que la hauteur de la colonne continue à décroître vers zéro : le quotient $\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$ tend vers la nullité...

⁸⁰ Ce calcul est exact pour une fusée à Masse à Vide nulle et à réservoir totalement cylindrique (sans partie conique, donc). Mais le hasard veut que lorsqu'on dote cette fusée purement idéale d'une part d'un réservoir dont la silhouette s'amenuise vers le bas et d'autre part d'une masse à vide réaliste, la hauteur d'eau s'en trouve relevée un peu plus que la Masse Totale de l'engin, ce qui hisse notre coefficient α vers les **0,16**...

Mais poursuivons notre démarche :

Nous ne sommes pas contraints de nous arrêter en si bon chemin dans notre tentative de prise en compte de la hauteur de la colonne d'eau. Il nous est en effet possible de continuer à affiner la valeur de \mathbf{P}_{TuyE} présente sous la racine carrée dans l'équation (38). Reprenons cette équation (38) :

(Équation 38)

$$U_{FinProp} = -gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E = 1/ Q_{Air}} \frac{\sqrt{\mathbf{P}_E + \rho \mathbf{H}_E (2S_{Tuy} \mathbf{P}_{TuyE}/M_{fE})}}{M_{fE}} dE$$

On peut de nouveau y donner à \mathbf{P}_{Tuy} la valeur déjà évoquée :

$$\mathbf{P}_{Tuy} = \mathbf{P}_E + \rho \mathbf{H}_E (2S_{Tuy} \mathbf{P}_{TuyE}/M_{fE})$$

...qu'on avait rédigée :

$$\mathbf{P}_{Tuy} = \mathbf{P}_E + \alpha \mathbf{P}_{TuyE}$$

Ceci donne à l'équation (38) la formulation :

$$U_{FinProp} = -gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E = 1/ Q_{Air}} \frac{\sqrt{\mathbf{P}_E + \alpha (\mathbf{P}_E + \alpha \mathbf{P}_{TuyE})}}{M_{fE}} dE$$

Dans cette nouvelle formulation, \mathbf{P}_{Tuy} peut encore être exprimé sous la forme :
 $\mathbf{P}_E + \alpha \mathbf{P}_{TuyE}$

La racine carrée dans l'intégrale peut alors s'écrire :

$$\sqrt{\mathbf{P}_E + \alpha (\mathbf{P}_E + \alpha (\mathbf{P}_E + \alpha \mathbf{P}_{TuyE}))}$$

Il nous vient alors l'idée, puisque \mathbf{P}_E semble toujours pouvoir être mis en facteur à mesure qu'il apparaît, que nous sommes en train de rédiger sous la racine une suite.

Cette suite est :

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \dots + \alpha^n + \dots$$

Et, visiblement, elle opère la correction de P_E en P_{tuyE} par une sorte d'itération continue.

Étude de cette suite correctrice $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n + \dots$

Nous ne connaissons pas le nom de cette suite. Mais, en revanche, les manuels en donnent la somme selon la valeur de n . Cette somme est :

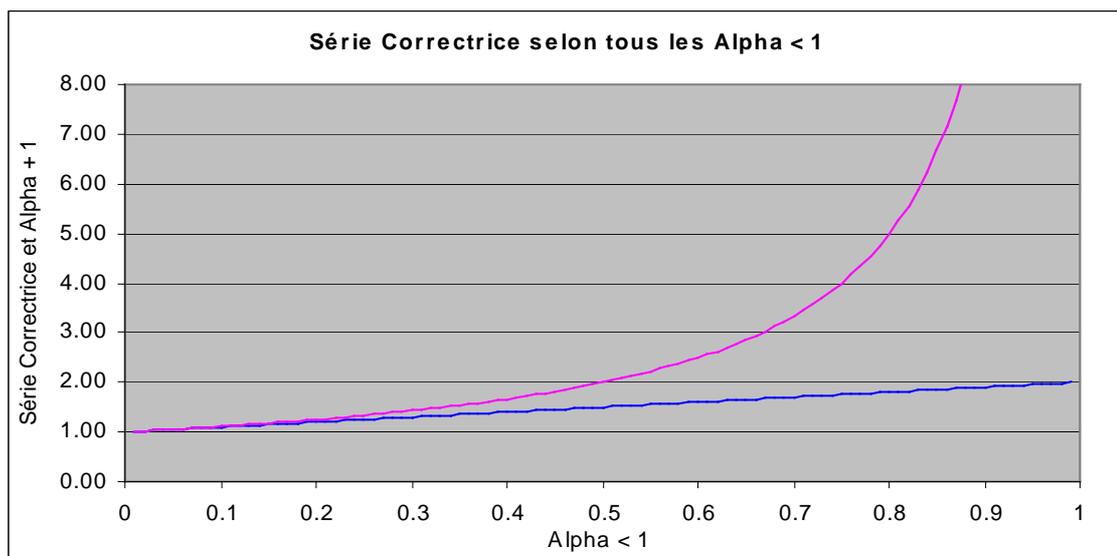
$$\Sigma = (\alpha^{n+1} - 1) / (\alpha - 1)$$

...et en particulier, pour n tendant vers l'infini et α inférieur à 1 :

$$\Sigma = -1 / (\alpha - 1), \text{ c-à-d :}$$

$$\Sigma = 1 / (1 - \alpha)$$

Voici la courbe (en violet) montrant cette somme pour les α inférieurs à 1 et pour n proche de l'infini :

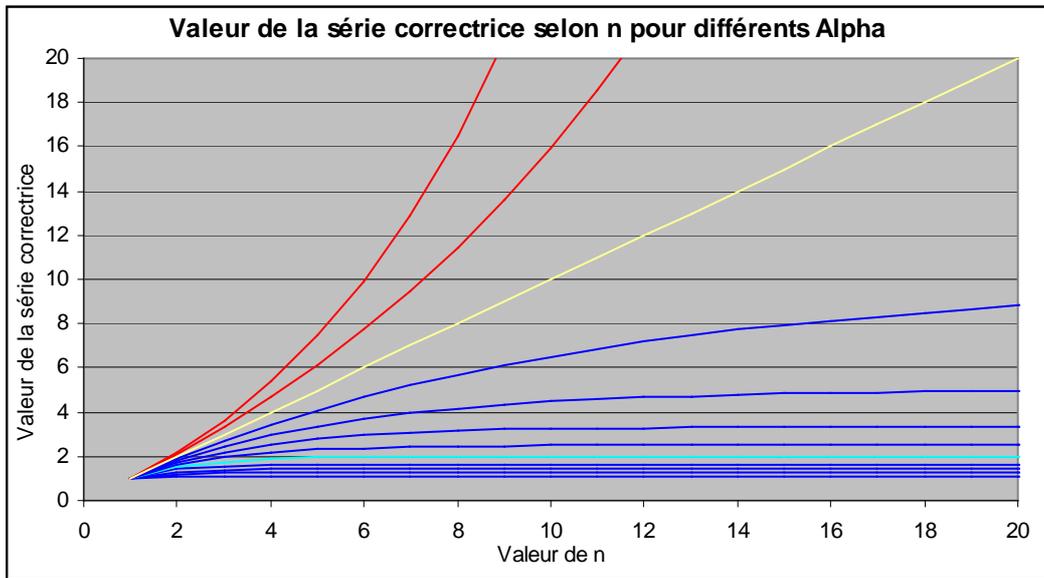


La droite bleue représente la somme de la suite de degré $n = 1$ (suite minimale $1 + \alpha$, composée donc de 2 termes). On voit que, pour les valeurs de α inférieures à $0,2$, cette suite minimale est très proche de la suite de degré $n = \infty$. Or on peut admettre que la valeur $0,2$ correspond au maximum des α que nos fusées se créent par la géométrie de leur réservoir, leur Masse à Sec et la section de leur tuyère.

Cette proximité des deux courbes justifie a posteriori la correction de premier ordre que nous proposons dans l'équation (38b)...

Ci dessous on observe que les suites correctrices pour des α inférieurs à 1 sont convergentes (en bleu) et que les suites pour des α supérieurs à 1 sont divergentes (en

rouge) ; la courbe jaune correspond à $\alpha = 1$ et la courbe bleu clair à $\alpha = 0,5$, valeur qui semble bien au-delà de ce que nos fusées peuvent atteindre)⁸¹



Ces dernières remarques sont cependant d'ordre général et théorique, dans la pratique, en effet, il n'y a rien de plus simple que de donner directement à la somme de notre suite la valeur citée plus haut :

$$\Sigma = 1/(1 - \alpha)$$

Ceci nous autorise donc à prendre comme vitesse de fin de propulsion $U_{FinProp}$ la valeur :

(Équation 38d)

$$U_{FinProp} = -gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{à E = 1/Q_{Air}} \frac{\sqrt{P_E / (1 - \alpha)}}{M_{fE}} dE$$

avec $\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$ variable selon E et dépendant de la géométrie du réservoir, de la Masse à Vide et de la section de la tuyère.

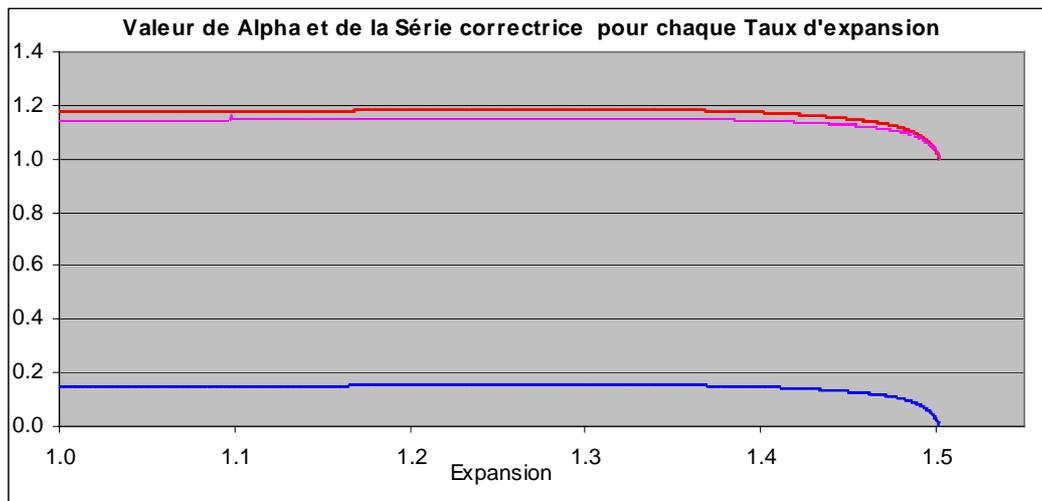
Attention : α est une variable dépendant de E qui ne peut être sortie de l'intégrale !

Mais son introduction dans notre calcul nous permet de *surpondérer* la Pression Statique P_E pour obtenir le montant exact de la Pression à la Tuyère présente sous le radical, ceci pour chaque valeur de E , car α doit bien être calculé pour chaque valeur de E ...

⁸¹ Une correction d'un facteur 2 (qui est la somme de la suite) apparaîtrait d'ailleurs comme beaucoup plus qu'une simple correction. La légitimité d'une telle correction n'est pourtant pas exclue...

Voilà d'ailleurs ci-dessous (en rouge) un exemple de la *surpondération* effectué par la valeur exacte de notre suite (à savoir : $\Sigma = 1/(1-\alpha)$) sur la pression instantanée P_E durant la propulsion d'une fusée type de **1,5 L**, tuyère de **21,7 mm**, Masse à Vide de **0,1 Kg**.⁸²

On note que cette surpondération (on pourrait dire également correction) ne dépasse pas **1,2** (pour cette forme de réservoir), nombre dont la racine vaut presque **1,1**... Il nous est évidemment impossible d'intégrer $U_{FinProp}$ pour le moment, mais on peut penser que l'influence du surcroît de pression dû à la hauteur de la colonne d'eau se situera dans cet ordre de grandeur, ce qui n'est d'ailleurs pas tout à fait négligeable (**10 %**) :

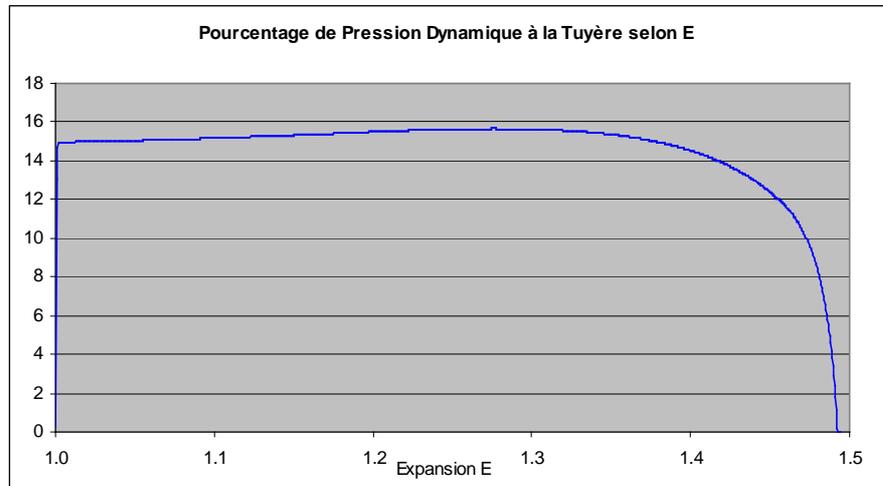


Sur le graphe ci-dessus nous avons fait figurer la courbe bleue donnant les valeurs de α et la violette donnant les valeurs de $1 + \alpha$ qui est la suite d'ordre **1** (une correction qui s'en tiendrait à cet ordre ne serait donc pas déshonorante)⁸³ ...

⁸²Ces courbes sont toujours établies pour la même silhouette de réservoir.

⁸³ $1/(1-\alpha)$ est donc assez peu différent de $1 + \alpha$. Il le serait encore moins de $1 + \alpha + \alpha^2$.

L'allure de la courbe rouge est évidemment la même que celle retirée de la simulation Pas à Pas de la propulsion (déjà présentée au début de cette partie consacrée à la *Colonne d'eau*) :



Analyse de cette expression de $U_{FinProp}$

(Équation 38d)

$$U_{FinProp} = -gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E = 1/Q_{Air}} \frac{\sqrt{P_E / (1 - \alpha)}}{M_{fE}} dE$$

avec :

$\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$ variable selon E et dépendant de la géométrie du réservoir, de la Masse à Vide et de la section de la tuyère.

Il est important de noter que cette nouvelle expression de $U_{FinProp}$ n'est plus fonction de la Masse Volumique de la fusée... Non pas du fait de la présence de M_{fE} au dénominateur (sa valeur $M + \rho V_f (1 - Q_{air} E)$ divisée par le V_f présent devant le signe de l'intégration ferait apparaître à nouveau ce que nous avons appelé la Masse Volumique de la Fusée) mais parce que α est fonction d'une Masse Totale variable de la fusée M_{fE} dont on ne peut extraire la Masse à Sec (rappelons que $\alpha = \rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$)...

Remarque sur l'application de cette série correctrice en α à une intégration selon t
(càd sans que soit pratiqué notre changement de variable de t en E)

Il ne faut pas croire que l'utilisation de la série correctrice $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots$ soit liée à notre décision de changement de variable de t en E . Si l'on s'interroge en effet sur la valeur de P_{Tuy} dans l'équation (30) (qui présente une intégration selon t) :

(Équation 30)

$$U_{FinProp} = -gT + \int_{de\ t=0}^{à\ t=T} \frac{2\ S_{Tuy}\ P_{Tuy(t)}}{M + \rho\ V_f\ (1-Q_{Air}\ E(t))} dt$$

...on est naturellement amené à poser pareillement :

$$P_{Tuy(t)} = P(t) + \rho\ H(t)\ (g + U'(t))$$

...et la série correctrice apparaît alors de même, tout naturellement...

Extension à d'autres fusées que la fusée type de 1,5 L

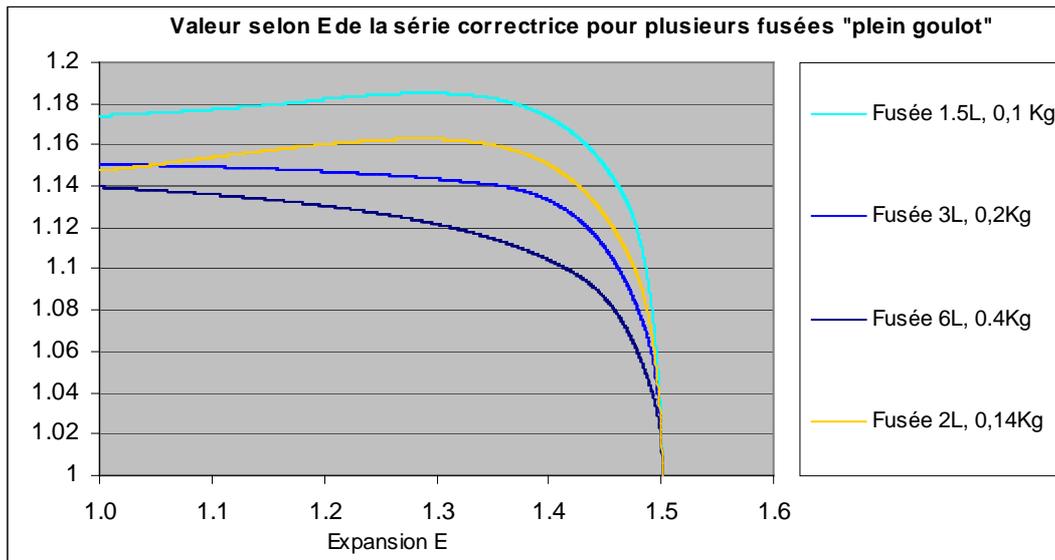
Étendons à présent notre réflexion à un jeu plus large de fusées. Voici les courbes de la valeur instantanée de notre série correctrice pour plusieurs type de fusées :

→ la fusée standard de 1,5 L, 0,1 Kg, et 8,3 cm de diamètre (cette courbe a déjà été présentée ci-dessus)

→ la fusée allongée de 3 L, 0,2 Kg, telle qu'en montre par ex. LaBulle sur le Portail Techno-Challenge.org . Nous l'imaginons construite à partir de tronçons de bouteilles standard de 8,3 cm de diamètre, en particulier le tronçon du bas qui comporte la tuyère. Nous lui imaginons de même cette masse proportionnelle à sa hauteur (et donc à son volume)

→ la fusée allongée de 6 L, 0,4 Kg , telle que le même LaBulle en a sans doute réalisé, également construite à partir de tronçons de 8,3 cm de diamètre (avec une masse également proportionnelle à son volume)

→ Une fusée de 2 L, 0,14 Kg , réalisée à partir d'une bouteille standard de 2 L et de 9,6 cm de diamètre :



Contrairement, à ce que l'on aurait pu penser du fait du fort allongement des fusées de **3 ou 6 L** type LaBulle, la valeur de notre série correctrice diminue à mesure que la hauteur de la fusée augmente. Ceci est dû à la baisse de l'accélération, qui demeure tributaire, dans tous les cas, du goulot limonade de **21,7 mm** de diamètre (la tuyère garde cette section alors que la masse est doublée ou quadruplée ; si ces fusées acquièrent la même vitesse au terme de leur phase propulsive, c'est parce que cette phase propulsive dure **2 ou 3** fois plus longtemps)... En d'autres termes, et en se référant à la valeur de α (soit $\rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$), on doit penser que si à l'instant du décollage la Masse Instantanée de la fusée allongée est multipliée par deux, par ex., (parce que la Masse d'eau est doublée et que la Masse à Vide l'est aussi) la hauteur d'eau ne l'est pas tout à fait (en effet, dans une fusée allongée par tronçons de cylindre, le cône qui précède la tuyère reste inchangé alors que, pour respecter une stricte homothétie sur la hauteur, il devrait être rendu plus 'pointu').

En revanche, si, dans notre tableau Excel, on modifie également la conicité du bas de la fusée (afin que soit respectée l'homothétie générale) la courbe d'évolution de la série correctrice selon **E** reste inchangée pour la fusée homothétique (la masse étant bien sûr également 'homothétique ment' multipliée, càd proportionnelle à la hauteur)...

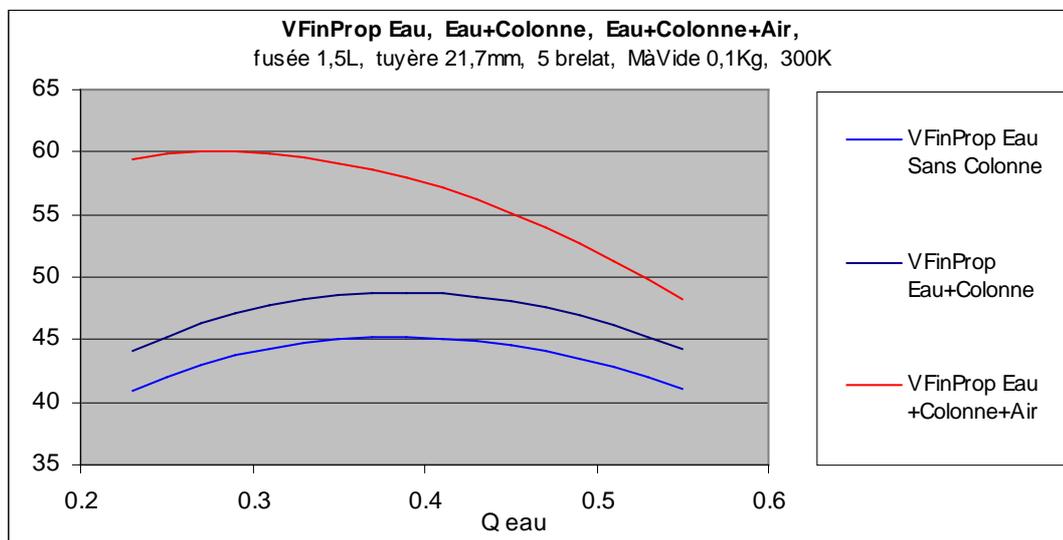
Sur le graphe ci-dessus, la fusée de **2 L**, un peu plus 'massique' relativement à l'aire de la tuyère, voit également sa série correctrice baisser.

PREMIERS RÉSULTATS PRENANT EN COMPTE LA HAUTEUR DE LA COLONNE D'EAU

Nous allons nous limiter ci-dessous à des fusées de **1,5 L** . Nous leur imaginerons différentes Masses à Vide et nous les lancerons à différentes Pressions Initiales.

Dans les premiers calculs, ces fusées seront propulsées par une tuyère standard de **21,7 mm** de diamètre, mais nous proposerons une méthode permettant d'étendre ces résultats à des fusées à tuyère réduite.

Voici les vitesses de fin de propulsion d'une fusée type de **0,1 Kg** de Masse à Vide lancée en milieu scolaire, c'èd à **5 b relatifs** de pression, selon le Quota de remplissage en eau. On peut apprécier l'apport de la hauteur de la colonne d'eau (qui fait passer la vitesse de la courbe bleu dense à la courbe bleu sombre) et l'apport de l'Impulsion due à l'air :

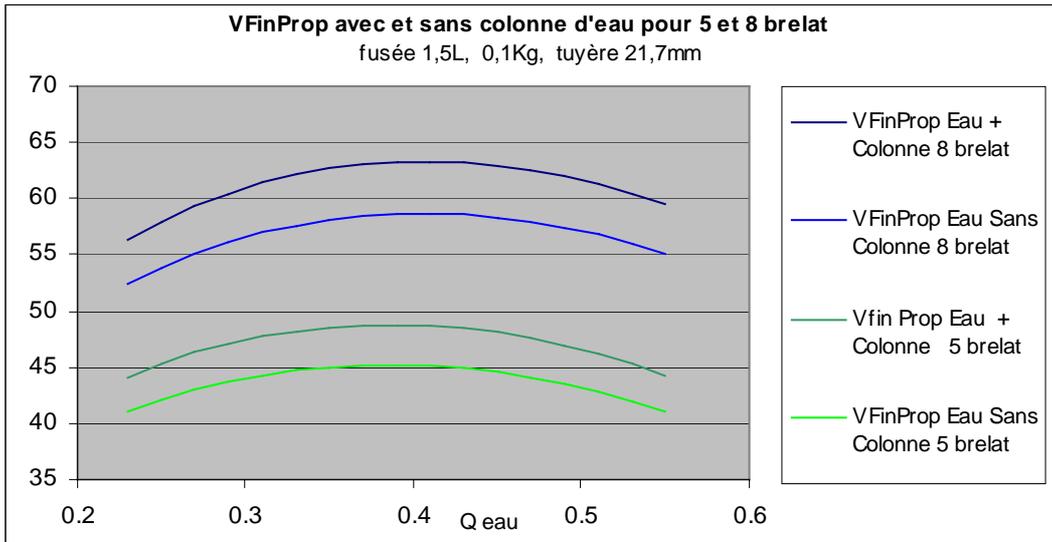


Nous avons ici choisi une température initiale de l'air comprimé de **300 K**.

Remarquons que l'apport de la colonne d'eau se maintient à peu près constant sur l'ensemble des Quotas d'eau initiaux.

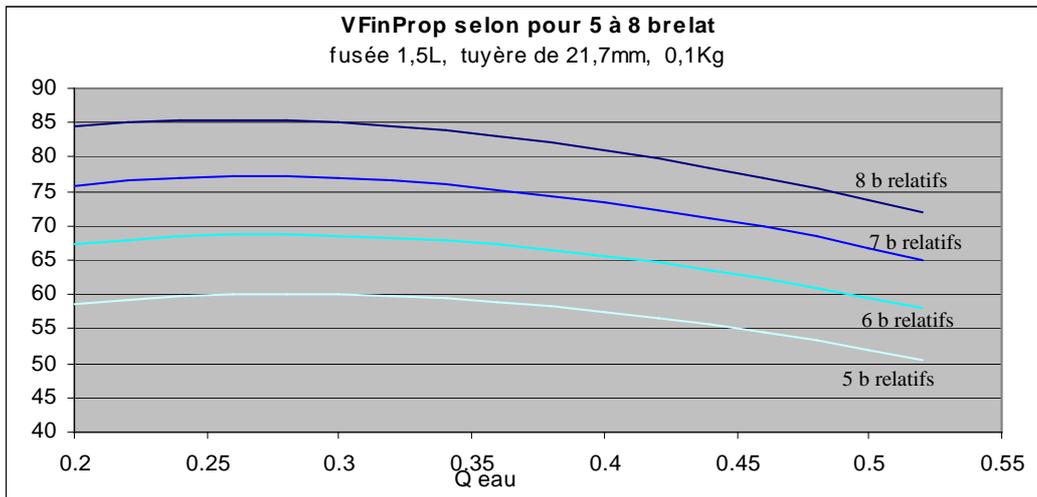
La question peut alors se poser de savoir si cet apport évolue beaucoup en fonction de la pression de lancement. Voilà l'apport de la hauteur de la colonne d'eau, compte non tenu, ici, de l'impulsion due à l'air⁸⁴, pour les deux pressions extrêmes de **5** et **8 b** :

⁸⁴ Mais la prise en compte de l'Impulsion due à l'air ne fait que s'ajouter aux courbes de propulsion aqueuse (avec ou sans colonne)

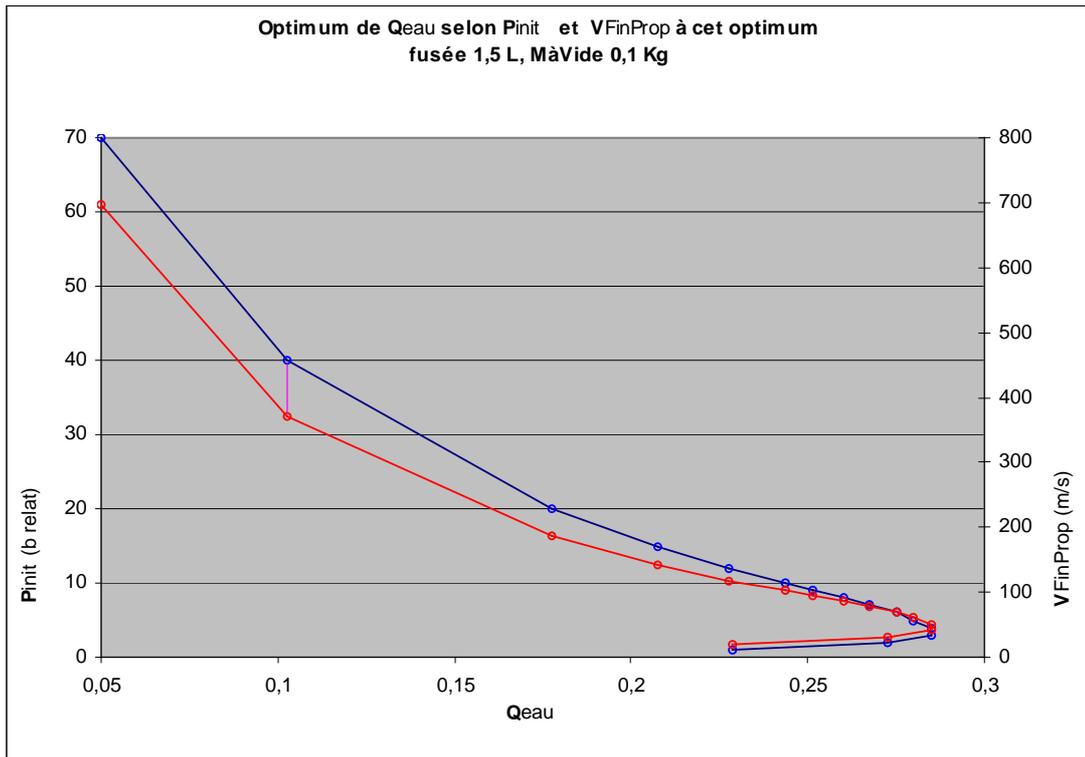


Il y a peu de différence entre les apports relatifs de la colonne d'eau à ces deux pressions. Pour un remplissage en eau de **0,4**, par exemple, cet apport est de **7,3 %** aux deux pressions et pour un remplissage de **0,3**, il est de **7,2 %**...

D'autre part, on a peut-être noté sur le graphe précédent (donnant la Vitesse de Fin Propulsion Eau + Colonne + Air, à la pression de **5 b**) que le Quota d'eau optimum pour cette pression semble être légèrement en dessous de **0,3**. Ce meilleur gain en vitesse des fusées peu remplies en eau est-il vérifié pour les plus fortes pressions ? Le graphe ci-dessous, établi cette fois en tenant compte de l'Impulsion due à l'air, semble l'attester :



L'idée vient naturellement de demander à notre tableur de calculer l'optimum de remplissage en eau pour chaque pression initiale :



Cette recherche de l'optimum de Q_{eau} a été effectuée en s'en tenant à des pas de Q_{eau} de **0,0025**. Elle donne la courbe bleu dense, qui ne vaut, bien sûr, que pour cette fusée de **1,5 L** de **0,1 Kg** de Masse à Vide.

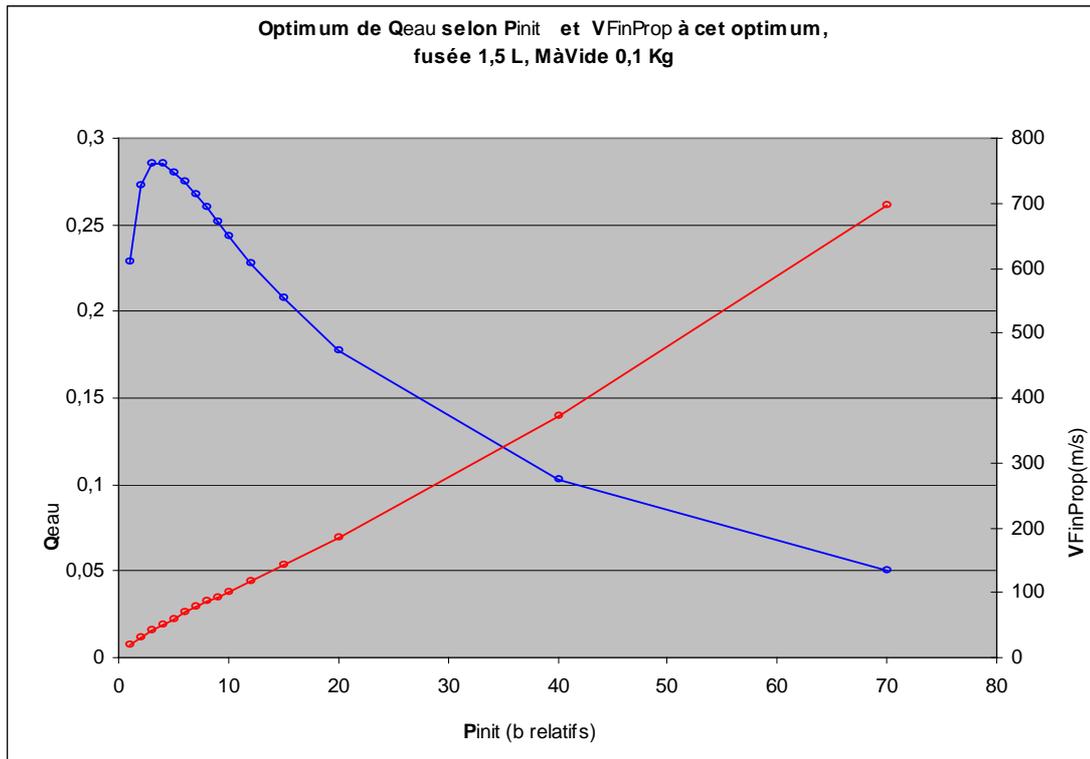
On peut noter la curieuse régression vers la gauche pour les faibles pressions initiales. Il faut dire qu'à ces faibles pressions, la masse de l'eau devient un frein véritable à l'élévation de la fusée...⁸⁵

La Vitesse de Fin Propulsion atteinte pour chaque Quota d'eau optimum a été également reportée sur le graphe. C'est donc la Vitesse de Fin de Propulsion maximum que peut atteindre une fusée pour chaque Pression initiale. On constate qu'elle dessine une courbe similaire à la courbe bleue. Attention, cependant : comme indiqué par le segment fuchsia, à la pression 40 b relatifs le Quota d'eau optimum est 0,1, ces deux paramètres produisant ensemble la vitesse de fin de propulsion de 370 m/s (sur le graphe, c'est le Quota d'eau qui détermine la Vitesse sur la courbe bleue).

La conclusion que l'on peut tirer de cette similarité des courbes est que, au Quota d'eau optimum pour une Pression Initiale donnée, la Vitesse de Fin de Propulsion est presque proportionnelle à la Pression Initiale.

⁸⁵ Si l'on se souvient que la force de propulsion initiale est 2 Stuy P_{init} , on peut calculer que pour 1 b de pression la force de propulsion est de 7,4 N, alors que la masse totale à l'instant $t = 0$, au quota d'eau de 0,225, est de 0,437 Kg ; ce quotient de ces deux chiffres ne donne qu'une accélération de 16,9 m/s², dont 9,81 sont d'ores et déjà brûlés pour compenser la pesanteur. Si le Quota d'eau était de 1/3, l'accélération totale serait réduite à 12,3 m/s², dont 9,81 à retirer pour vaincre la pesanteur...

C'est ce que montre cette nouvelle présentation des mêmes calculs, qui prend comme abscisse la Pression Initiale quand les deux autres paramètres sont en ordonnée :



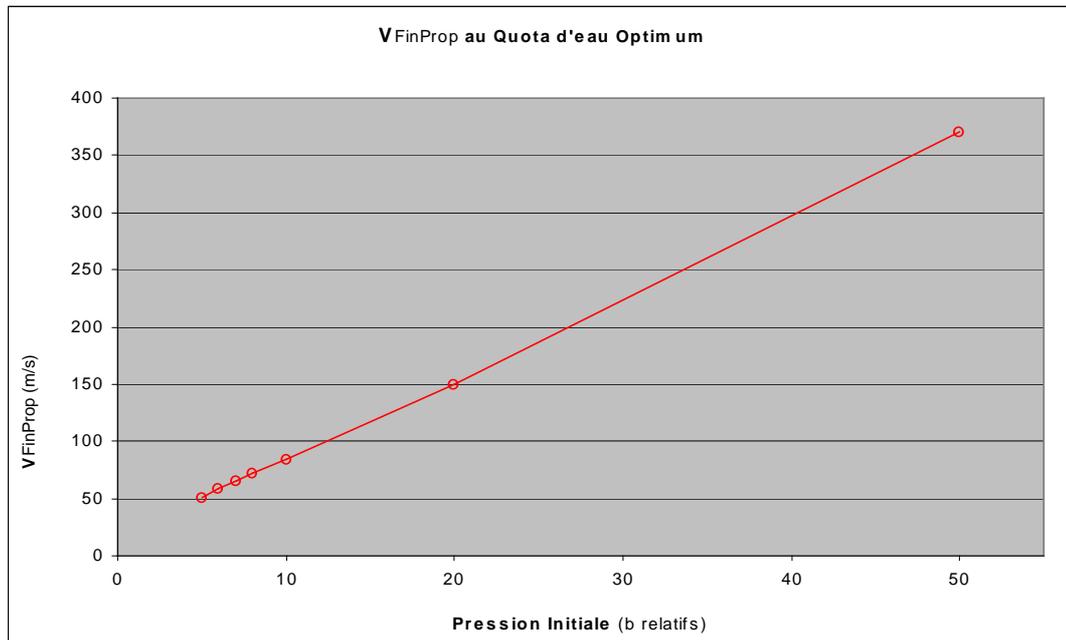
La courbe rouge est bien proche d'une droite. Du point de vue de la Physique, on peut le comprendre en évoquant l'idée qu'au cours de la phase propulsive aqueuse, la force de propulsion instantanée est proportionnelle à chaque instant à la Pression d'Éjection ($2P_{Tuy} S_{Tuy}$) et que cette Pression d'Éjection, pour variable qu'elle est durant la propulsion reste quand-même strictement proportionnelle à la Pression Initiale du fait de la loi adiabatique :

$$P_{(t)} = P_0 \left(\frac{V_0}{V_{(t)}} \right)^\gamma$$

C'est donc la variation du Quota d'eau à la recherche d'un optimum propulsif qui dérègle cette stricte proportionnalité (en modifiant le rapport instantané $V_0/V_{(t)}$ qui tend à devenir plus fort lorsque l'optimisation du Quota d'eau diminue celui-ci).

Quant à la phase gazeuse, nous savons que l'Impulsion qu'elle produit n'est pas si loin de la proportionnalité avec la Pression Initiale (celle-ci doit y être élevée à la puissance **1,24**)...

Pour la Masse à Vide de **0,130 Kg**, des relevés rapides montrent la même quasi-proportionnalité :



Notons donc ce résultat totalement indépendant de notre démarche de généralisation de la formule de Tsiolkovski :

Au Quota d'eau optimum, la Vitesse de Fin de Propulsion est globalement proportionnelle à la Pression Initiale.

observation effectuée pour des fusées de **1,5 L** et de **0,1** et **0,130 Kg** de Masse à Vide.

Ceci étant, il faut préciser que, pour les pressions non usuelles, le calcul à l'origine de cette courbe est quelque peu théorique :

- d'une part parce que l'impulsion due à l'expulsion de l'air est tirée d'une formule que Bruce Berggren donne comme bonne en dessous de **10 bars**⁸⁶,
- d'autre part parce que la vitesse de fin de propulsion atteinte pour **20 bars** de pression initiale est déjà au-delà de **500 Km/h**, vitesse à laquelle on ne peut sans doute guère négliger le freinage aérodynamique dû à l'air⁸⁷.

Néanmoins, la lecture de ce graphe peut nous persuader que pour les pressions usuelles de **5 à 8 b**, le Quota optimum de remplissage d'eau est compris entre **0,25** et **0,28**. C'est pourquoi nous allons à présent nous intéresser essentiellement à la plage de **Quota d'eau** s'étendant de **0,24** à **0,34**.

Nous nommerons $K_{\text{AdiabComp}}$ les Coefficients Adiabatiques intégrant :

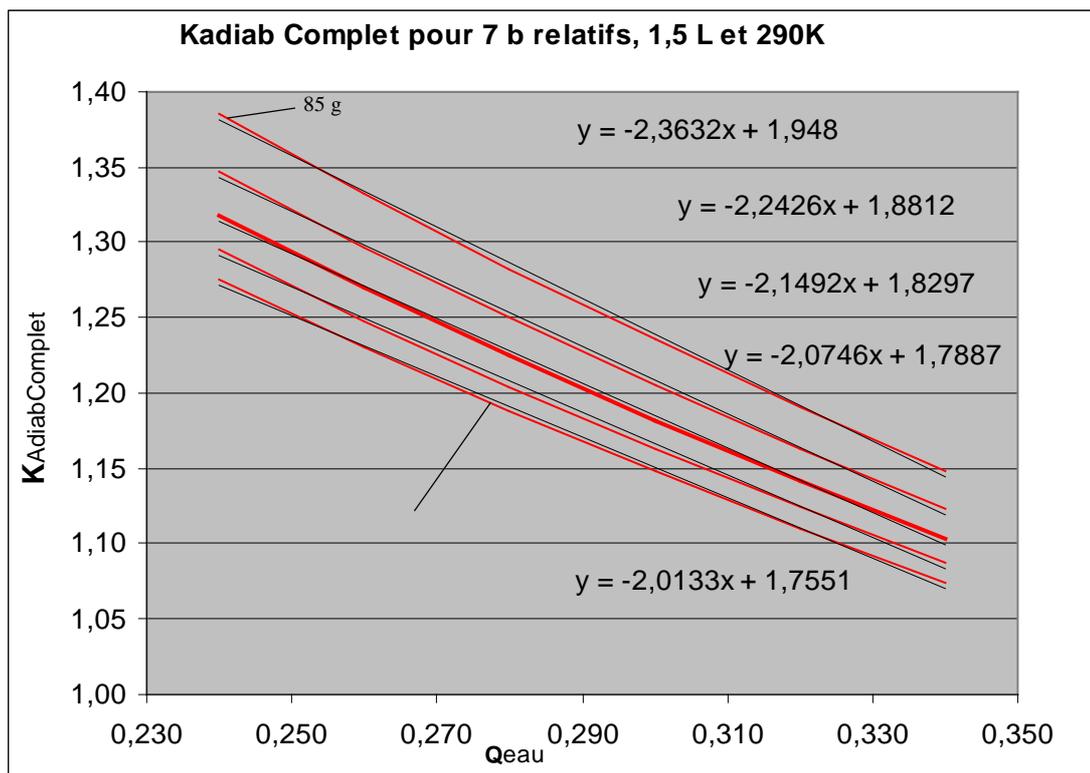
⁸⁶ Il précise : a simplified equation that should give excellent accuracy to pressures < 5 atmospheres, and good accuracy up to 10 atmospheres

⁸⁷ À 40 b, la vitesse ainsi calculée de la fusée dépasse celle du son...

→ l'action de la pression de l'air
 → le surcroît de pression à la tuyère dû à la hauteur de la colonne d'eau
 → et l'impulsion globale due à l'éjection de l'air (calculée selon Bruce Berggren).

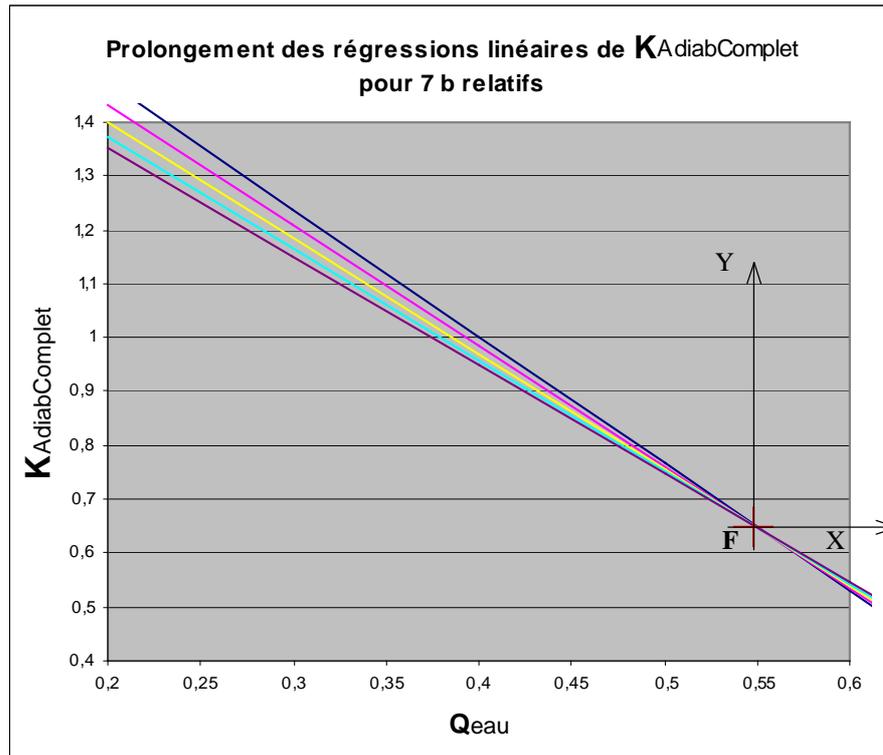
Ces coefficients sont bien sûr établis en référence à la Vitesse d'Éjection Initiale (due à la seule pression initiale de l'air comprimé) et en référence au logarithme du rapport de masse (au Quota d'eau choisi).

Les courbes du Coefficient Adiabatique Complet pour les différentes Masses à Vide, dessine les courbes suivantes :



La courbe médiane, correspondant à la Masse à Vide **115 g**, a été épaissie. Les régressions linéaires proposées par Excel sont affichées.

Nous avons l'idée de prolonger ces droites vers la droite, pour voir comment elles se coupent. Et là, par chance ineffable, nous constatons que ces droites se coupent en un même point unique :



Sur le graphe, nous avons dessiné ce point de concours général que nous décidons de nommer *Foyer*.

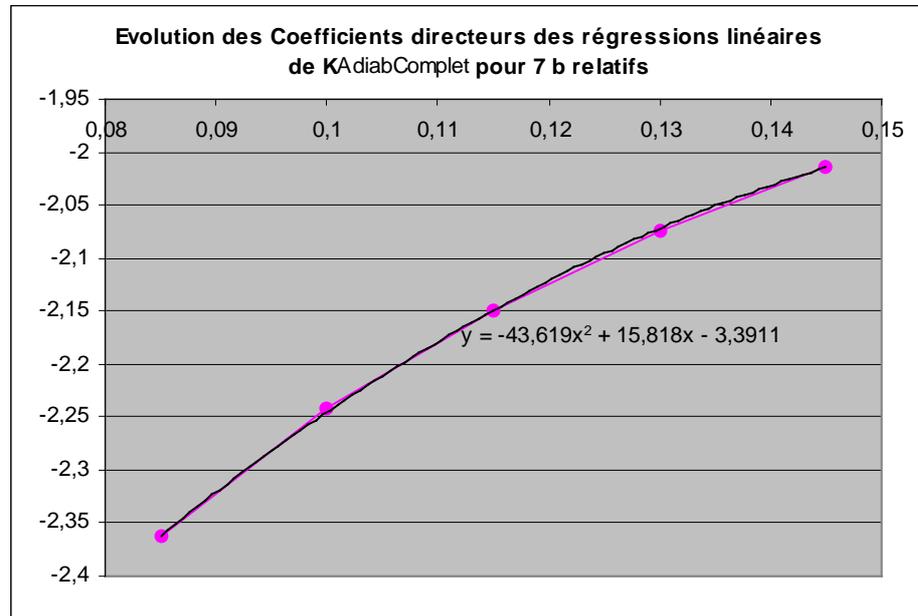
Il se place au $Q_{\text{Eau}} = 0,55$ et au $K_{\text{AdiabComp}} = 0,647$.

L'existence de ce foyer est inespérée et promet des simplifications appréciables ! En effet, la création d'un nouveau repère centré sur ce point simplifiera les calculs...

Nous ignorons si un tel point possède une signification physique, mais nous en profitons pour aller de l'avant !⁸⁸

⁸⁸ Nous verrons que chaque Pression Initiale a son propre foyer et que ces foyers sont très proches les uns des autres...

Dans le nouveau repère **XFY** nous décidons de dessiner la courbe d'évolution des coefficients directeurs de nos droites de régression (selon la Masse à Vide). Cette évolution (en fuchsia) est assez courbée :



Notre divin tableur nous en propose une régression polynomiale (en noir).

Nous allons utiliser cette régression dans les calculs qui suivent, mais une simple régression linéaire n'aurait pas été révoltante tout en promettant des résultats beaucoup plus simples. Nous devons donc également explorer cette voie de la régression linéaire...

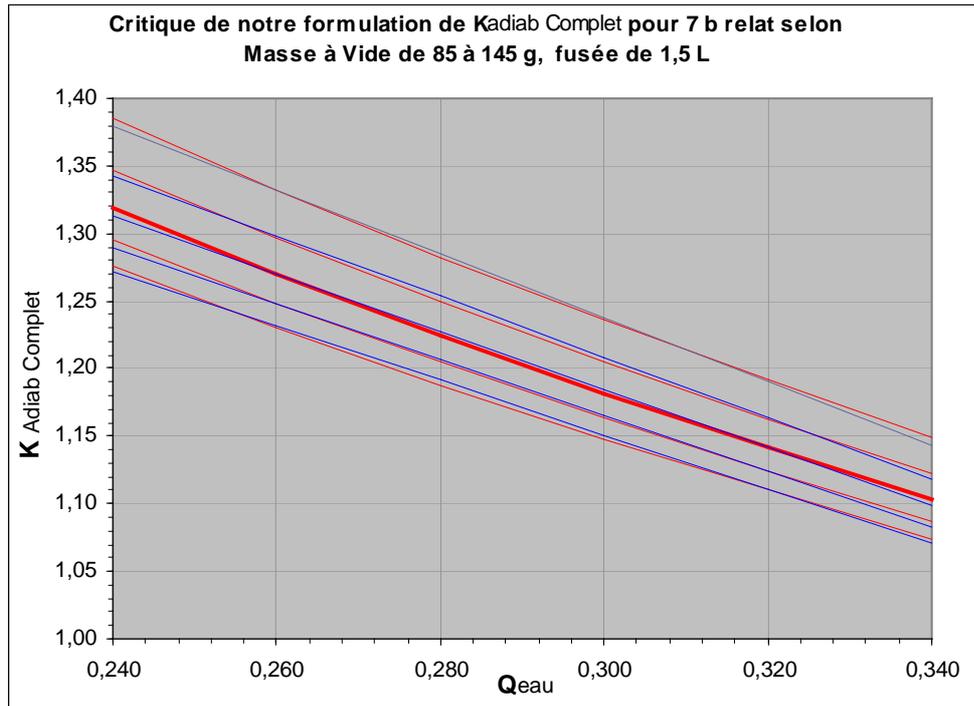
(ce travail reste à faire)

Nous connaissons donc le coefficient directeur de la régression linéaire adaptée à chacune des Masses à Vide et prenant acte du fait que toutes ces droites passent par le foyer ; il ne nous est donc pas difficile de bâtir une formule prédisant la valeur du Coefficient Adiabatique pour toute fusée de **1,5 L** lancée à la Pression Initiale de **7 b relatifs**.

Cette formule est :

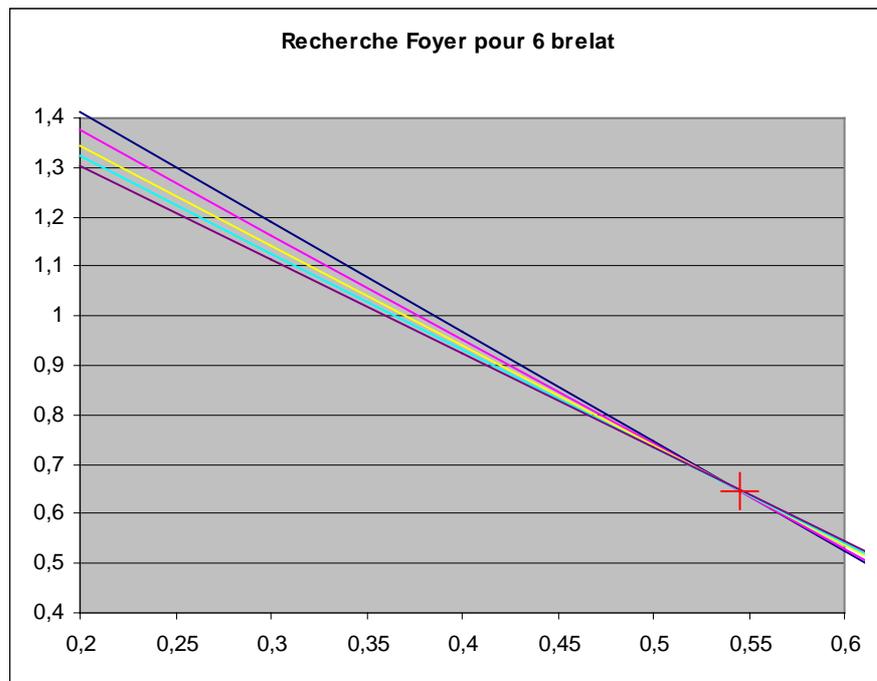
$$K_{\text{AdiabComp}} = 0,647 + \{ -43,619 M_{\text{àV}}^2 + 15,818 M_{\text{àV}} - 3,3911 \} (Q_{\text{eau}} - 0,55)$$

En voici la représentation (en bleu) pour les différentes Masses à Vide en comparaison avec les courbes nées de nos calculs Pas à Pas (en rouge) :



Ce résultat, dont chacun peut juger qu'il est précis à mieux que **1 %** près, profite de toutes les chances que nous avons rencontrées sur notre route.

Le même travail de recherche de foyer pour la pression de **6 b relatifs** est également couronné de succès :

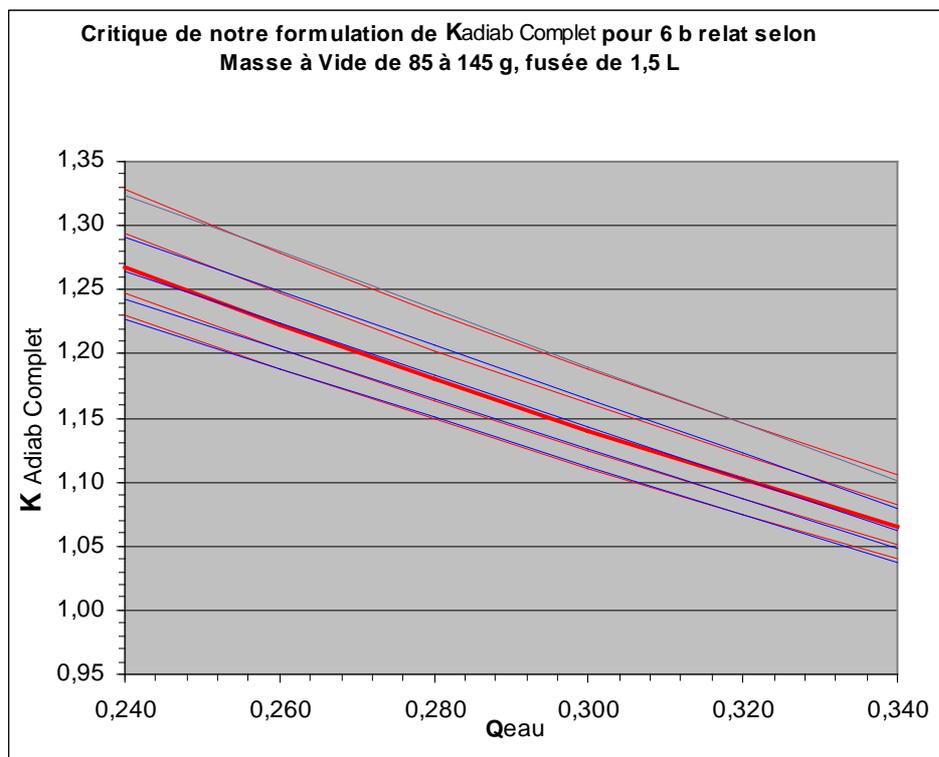


Ce foyer est très légèrement décalé par rapport à celui des 7 b de pression ;
Nous le localisons à $Q_{Eau} = 0,539$ et $K_{AdiabComp} = 0,658$.

Comme précédemment pour la Pression de 7 b, dans le repère centré sur ce dernier foyer, nous constatons que les coefficients directeurs de nos droites de régressions évoluent paraboliquement. Finalement, nous dégageons l'équation prédisant la valeur du Coefficient Adiabatique Complet pour cette pression Initiale de 6 b relatifs :

$$K_{AdiabComp} = 0,658 + \{-39,937 M_{aV}^2 + 14,523 M_{aV} - 3,1654\} (Q_{Eau} - 0,539)$$

Cette équation produit les résultats suivants :



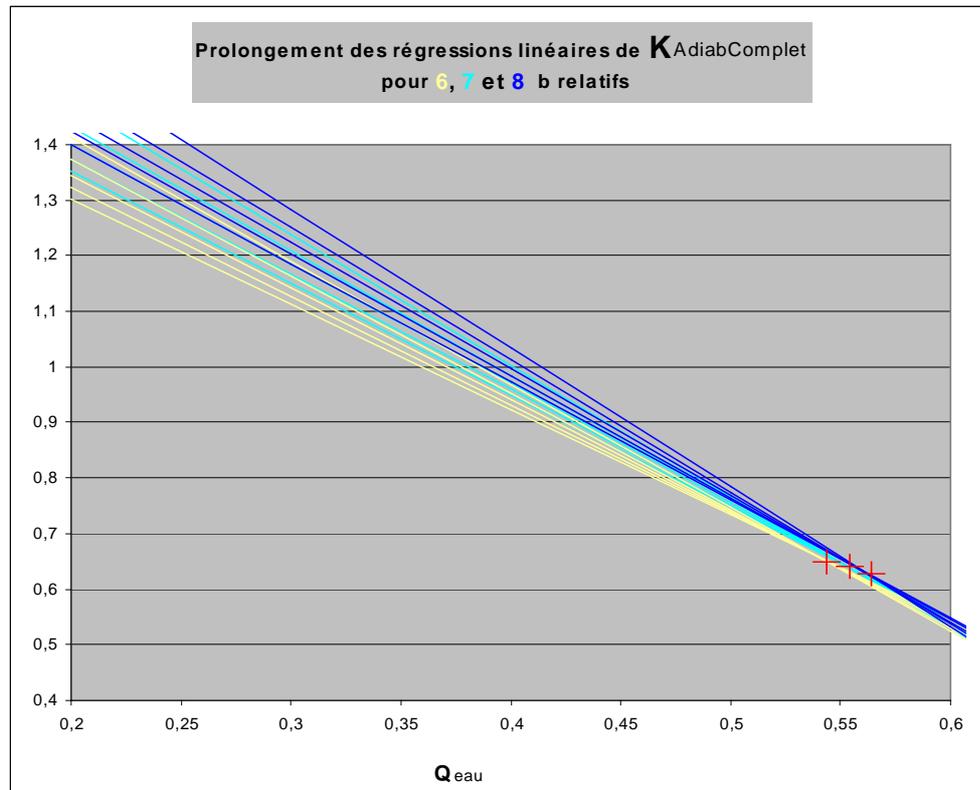
Ainsi qu'on peut l'observer, le défaut de précision de ces droites bleues est inférieur à 1 %...

Pour la Pression Initiale de 8 b relatifs, le même travail systématique conduit à la formulation suivante :

$$K_{AdiabComp} = 0,635 + \{-47,206 M_{aV}^2 + 17,081 * M_{aV} - 3,6144\} (Q_{Eau} - 0,560)$$

Ce travail systématique est également facilité par l'existence d'un foyer aux régressions linéaires du coefficient Adiabatique Complet pour cette pression.

Voici d'ailleurs les trois jeux de régressions linéaires pour les trois pressions de **6, 7 et 8 bars relatifs** :



On note que si les foyers se tiennent dans une zone assez resserrée ils ne peuvent quand-même pas être assimilés...

Une confrontation générale des formules trouvées pour chaque Pression Initiale s'impose alors. Voici cette confrontation :

Pour 6 b relatifs :

$$K_{\text{AdiabComp}} = 0,658 + \{-39,937 M_{\text{àV}}^2 + 14,523 M_{\text{àV}} - 3,1654\} (Q_{\text{Eau}} - 0,539)$$

Pour 7 b relatifs :

$$K_{\text{AdiabComp}} = 0,647 + \{-43,619 M_{\text{àV}}^2 + 15,818 M_{\text{àV}} - 3,3911\} (Q_{\text{Eau}} - 0,55)$$

Et pour 8 b relatifs :

$$K_{\text{AdiabComp}} = 0,635 + \{-47,206 M_{\text{àV}}^2 + 17,081 M_{\text{àV}} - 3,6144\} (Q_{\text{Eau}} - 0,560)$$

À part les coefficients provenant directement de l'abscisse et de l'ordonnée des foyers (chaque fois un peu différents), on remarque que certains coefficients varient en fonction de la pression ; c'est normal : si les courbes dégagées par le calcul Pas à pas

s'articulent bien autour du même foyer, elles n'ont quand même pas le même coefficient directeur.

Une formulation générale découle de cette confrontation :

$$K_{\text{AdiabComp}} = [0,647 + 0,011 (7-P_{\text{init}})] + \{ [-43,619 + 3,63 (7-P_{\text{init}})] M_{\text{àV}}^2 + [15,818 - 1,279 (7-P_{\text{init}})] M_{\text{àV}} + [-3,3911 + 0,2245 (7-P_{\text{init}})] \} (Q_{\text{eau}} + [-0,55 + 0,01 (7-P_{\text{init}})])$$

C'est du moins la présentation *synoptique* de cette formulation, car quelques manipulations d'usage la simplifient légèrement en :

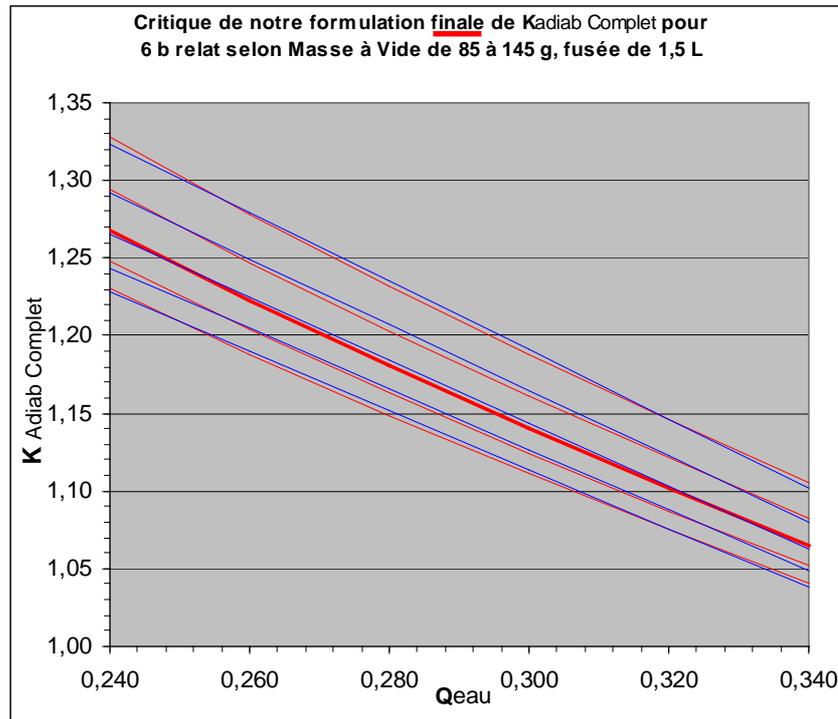
$$K_{\text{AdiabComp}} = [0,724 - 0,011 P_{\text{init}}] + \{ [-18,209 - 3,63 P_{\text{init}}] M_{\text{àV}}^2 + [6,865 + 1,279 P_{\text{init}}] M_{\text{àV}} + [-1,8196 - 0,2245 P_{\text{init}}] \} (Q_{\text{eau}} - 0,48 - 0,01 P_{\text{init}})$$

...expression du Coefficient Adiabatique Complet où P_{init} est exprimé en **b relatifs**

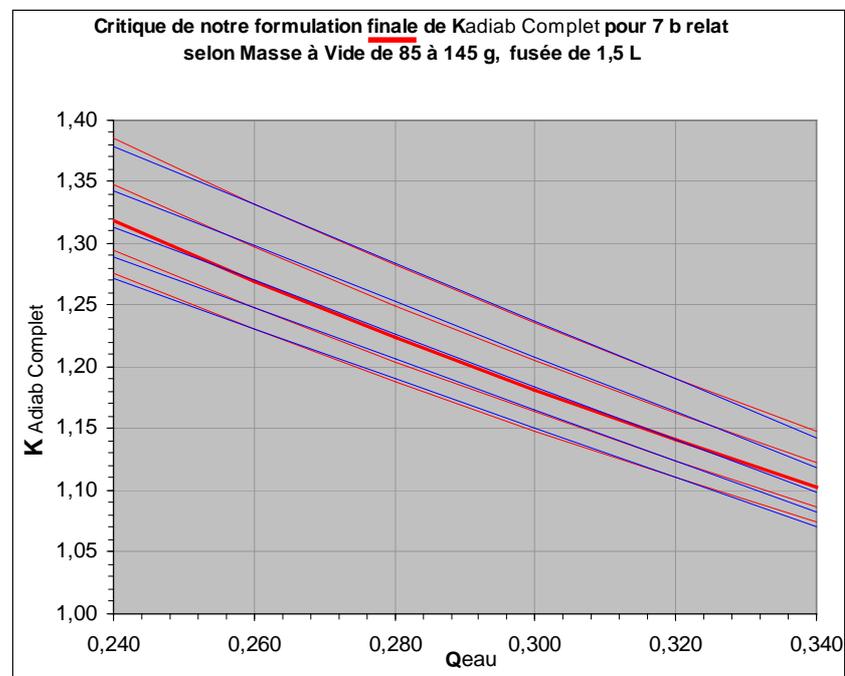
Dans la langue d'Excel, cela donne :

$$(0,724 - 0,011*P_{\text{init}}) + ((-18,209 - 3,63*P_{\text{init}})*M_{\text{àV}}^2 + (6,865 + 1,279*P_{\text{init}})*M_{\text{àV}} + (-1,8196 - 0,2245*P_{\text{init}})) * (Q_{\text{eau}} - 0,48 - 0,01*P_{\text{init}})$$

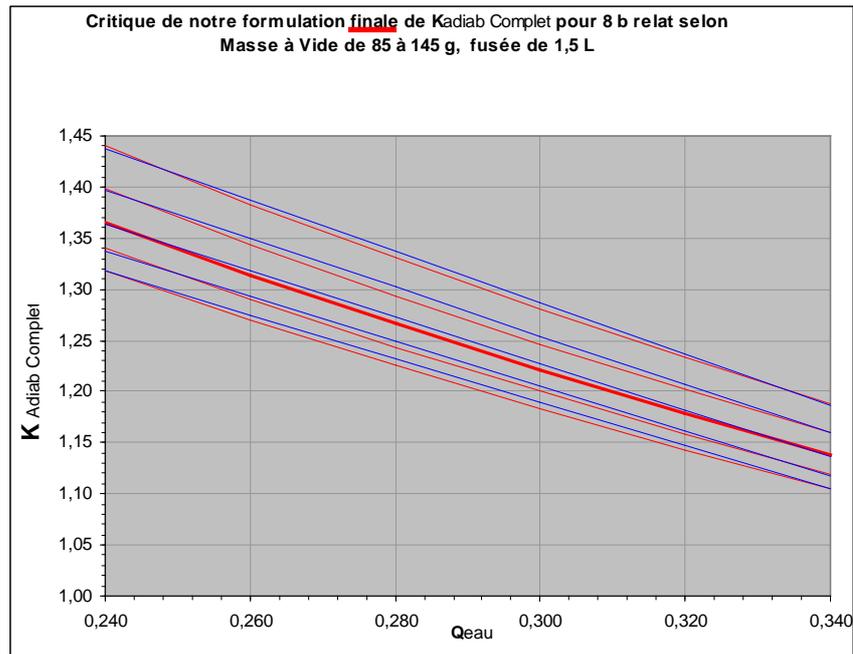
Voici le résultat de cette formulation générale (qui est notre formulation finale) lorsqu'on l'applique à la Pression Initiale de **6 b relatifs** :



Voici l'application de la même formule finale à la Pression Initiale de **7 b relatifs** :



...et à **8 b relatifs** de Pression Initiale :



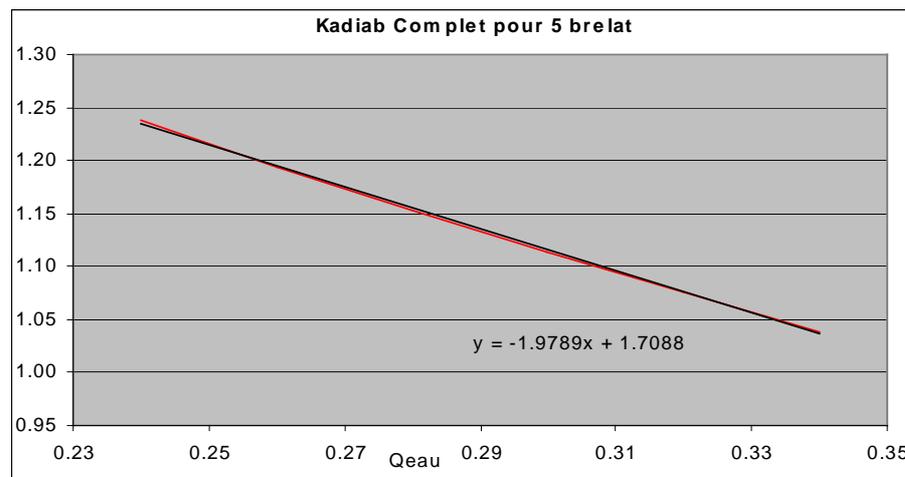
Toutes ces applications sont précises à moins de **1 %** près. On peut donc estimer que le Coefficient Adiabatique Complet peut être facilement tiré de la formule générale encadrée ci-dessus...

LANCEMENTS À 5 b RELATIFS EN MILIEU SCOLAIRE

1 Formulation simplifiée :

Dans les cas où l'on s'en tient, comme souvent en milieu scolaire, à des lancements à la Pression Initiale de **5 b relatifs**, l'application de la formule générale du Coefficient Adiabatique Complet ci-dessus ne donne pas des résultats si mauvais (ils ne dérivent guère que de **1,5 %**). Mais il est quand-même tentant de simplifier cette formule pour ce cas particulier de cette pression initiale.

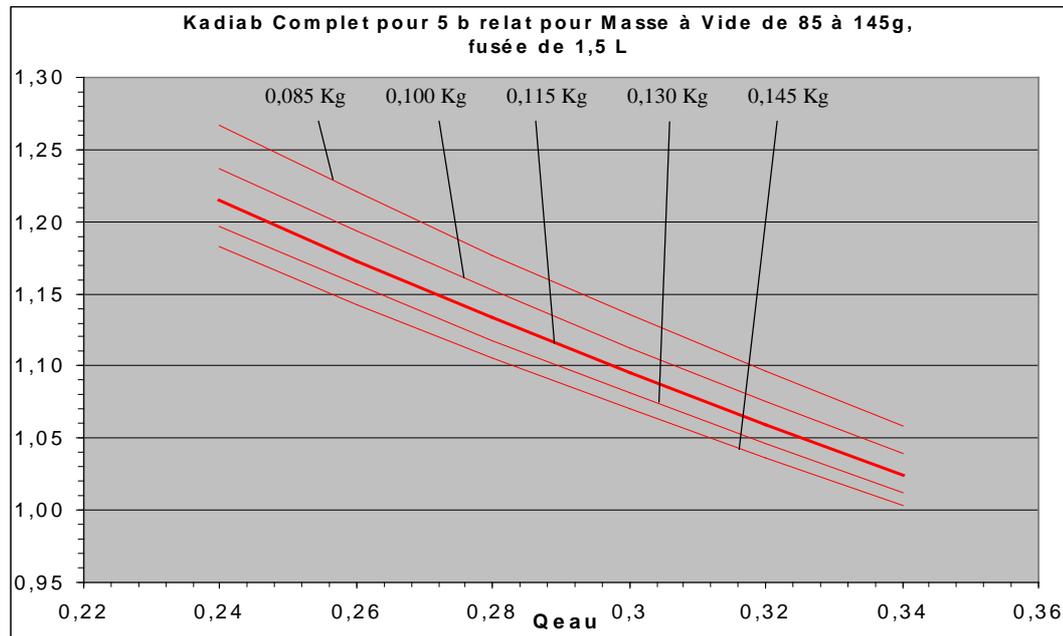
Voici la courbe du coefficient Adiabatique Complet pour une fusée de **100g** lancée à cette pression de **5 b relatifs** :



Excel propose une courbe de tendance qui nous conduit, pour cette masse de **0,1 Kg** et les **5 b relatifs** à la linéarisation :

$$K_{\text{adiab Complet}} = -1,979 Q_{\text{eau}} + 1,709$$

Voici le Coefficient Adiabatique Complet pour la même pression scolaire mais pour des Masses à Sec étagées de **85 g à 145 g** :



Après lecture des courbes de tendance proposées par Excel, nous construisons une formule prédisant la valeur de $K_{\text{Adiab Complet}}$:

$K_{\text{Adiab Complet}} =$

$$1,678 - \{ 1,92 + 5,09 (0,115 - M_{\text{àV}}) \} Q_{\text{Eau}} + 2,57 (0,115 - M_{\text{àV}})$$

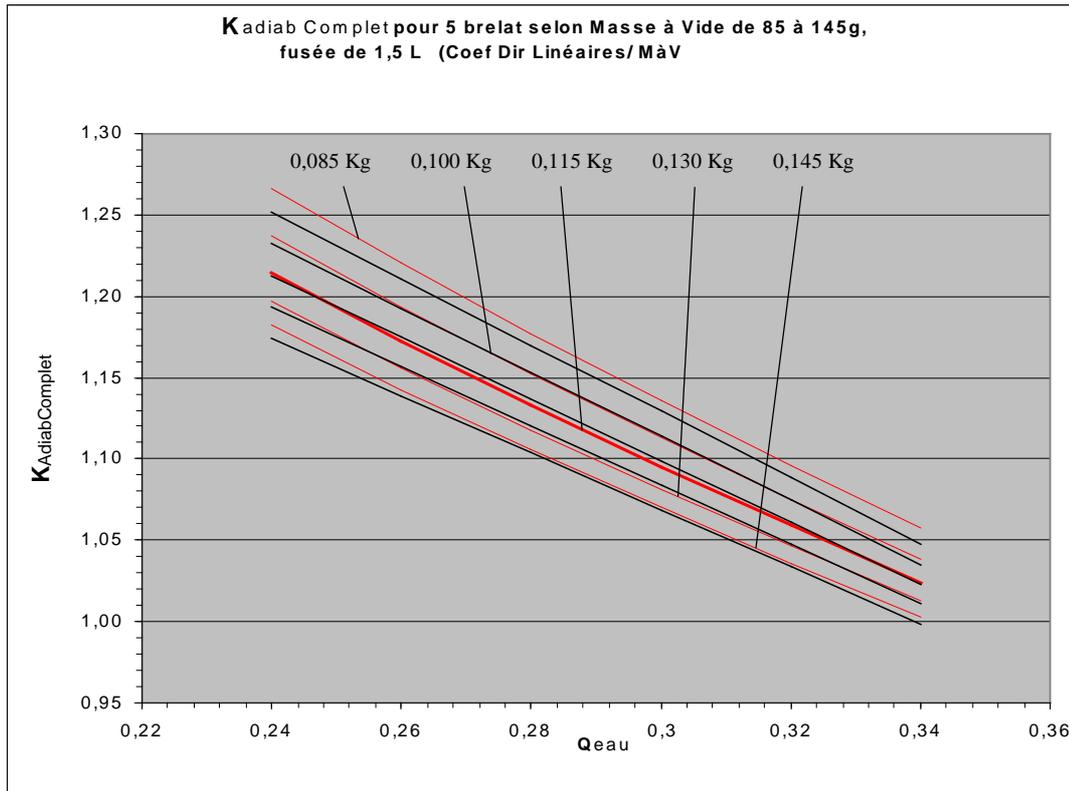
...libellé synoptique qui se simplifie de lui-même en :

$$1,97355 - \{ 2,50535 - 5,09 M_{\text{àV}} \} Q_{\text{Eau}} - 2,57 * M_{\text{àV}}$$

Une simplification à vue⁸⁹ des coefficients numériques la transforme en :

$$1,95 - \{ 2,45 - 4,8 M_{\text{àV}} \} Q_{\text{Eau}} - 2,45 M_{\text{àV}}$$

⁸⁹ Nous la réalisons avec des curseurs qui agissent sur les coefficients numériques et donc directement sur les droites noires qui sont nos résultats.



Cette formule abandonne la Masse à Vide **0,085 Kg**, mais elle a le mérite d'être assez simple...

Le coefficient Adiabatique d'une fusée de **1,5 L**⁹⁰ lancée à la Pression de **5 bars relatifs** peut donc être connu par la formule :

$$1,95 - \{2,45 - 4,8 M_{\text{àV}}\} Q_{\text{Eau}} - 2,45 M_{\text{àV}}$$

...avec une précision inférieure à **1 %** pour des fusées d'une Masse à Vide de **0,1 à 0,145 Kg**

Dans cet encadré :

M_{àV} est la Masse à Vide en **Kg**

Q_{Eau} est le quotient du volume d'eau initial sur le volume total du réservoir (souvent pris autour de **1/3**).

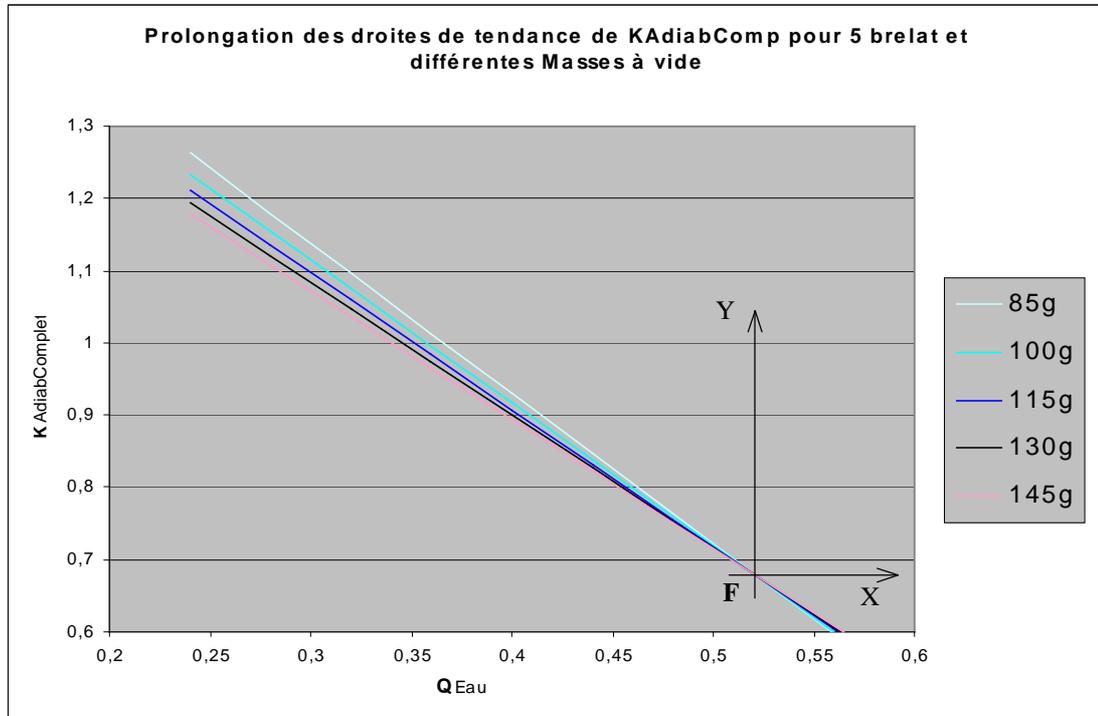
Rappelons que la fusée de **0,145 Kg** emportant un Quota d'eau de **1/3** possède un Coefficient Adiabatique Complet très proche de l'**unité**.

Quant aux fusées plus légères lancées au même Quota d'eau, leur Coefficient Adiabatique Complet ne s'écarte guère de cette valeur unitaire.

⁹⁰ arborant des formes classiques, proches de celles de la bouteille de Pepsi de 1,5 L

2 Formulation quadratique :

Afin de gagner en précision dans la même quête du Coefficient Adiabatique, nous reprenons la méthode de la recherche du foyer utilisée plus haut dans ce texte. Les droites de tendance annoncée par Excel se rejoignent toujours en un seul point :

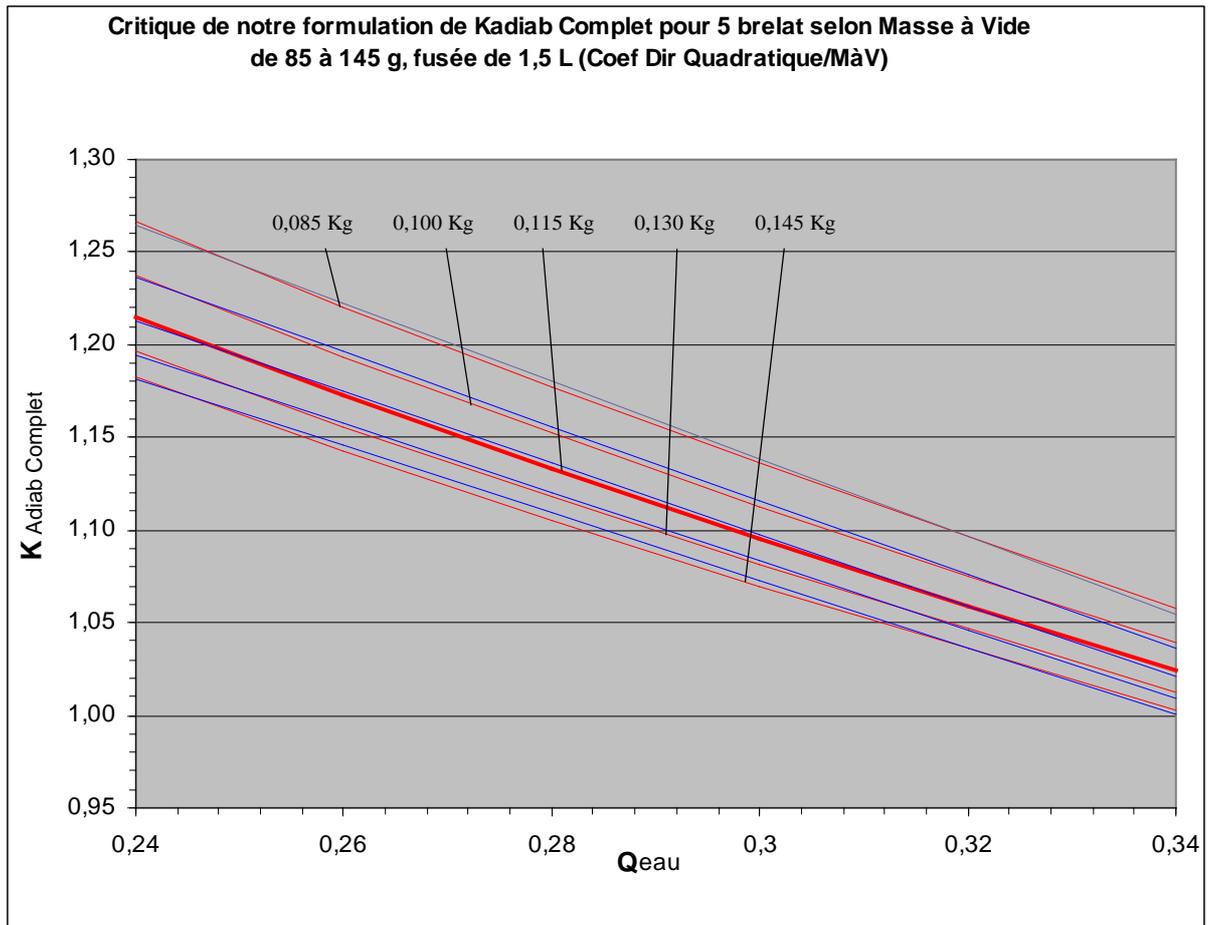


Les coordonnées de ce *foyer* **F** sont **0,52** et **0,675...**

Finalement, nous dégageons notre nouvelle formulation. Elle est :

$$K_{\text{Adiab Complet}} = 0,655 + (-37,9 * M_{\text{àV}}^2 + 13,45 M_{\text{àV}} - 2,97) * (Q_{\text{eau}} - 0,53)$$

Voici les résultats qu'elle produit :



Ces résultats sont satisfaisants, compte tenu du fait que nous avons cherché à limiter le nombre de chiffres significatifs des coefficients numériques.

La formule donnant la valeur du Coefficient Adiabatique Complet (propulsion due à l'eau, à l'air, et à la colonne d'air) pour une fusée de **1,5 L**⁹¹ lancée à **5 b relatifs** peut donc être :

$$K_{\text{Adiab Complet}} = 0,655 + (-37,9 M_{\text{àV}}^2 + 13,45 M_{\text{àV}} - 2,97)(Q_{\text{eau}} - 0,53)$$

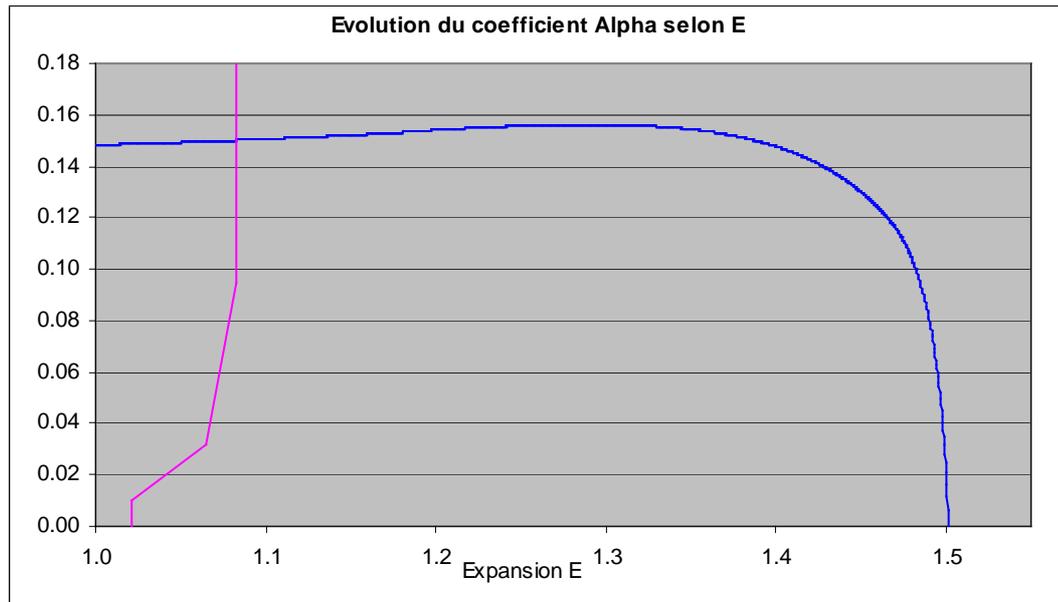
...la Masse à Vide y étant exprimée en **Kg** et le Quota d'eau représentant le quotient du volume d'eau initial sur le volume total du réservoir.

⁹¹ arborant des formes classiques, proches de celles de la bouteille de Pepsi de 1,5 L

INFLUENCE DE LA RÉDUCTION DE TUYÈRE

Nous avons été amenés, lors de l'analyse de la propulsion de la fusée à eau, à faire appel à un certain coefficient $\alpha = \rho H_E 2S_{Tuy} / M_{fE}$, coefficient évidemment variable selon E , le taux d'expansion de l'air comprimé.

Remémorons-nous l'évolution de ce coefficient α au long de la propulsion d'une fusée de **1,5 L** plein goulot :



Dans ce cas de fusée standard, la valeur de α reste donc assez faible et inférieure à **0,16**.

Imaginons à présent que nous dotions notre fusée d'une tuyère d'aire réduite à la moitié de la section standard⁹². Son diamètre est donc **~15 mm**. Appelons cette tuyère de **15 mm** tuyère *substandard*.

L'expression $\alpha = \rho H_E 2S_{Tuy} / M_{fE}$ nous indique alors que pour cette tuyère substandard $\alpha = \mathbf{0,08}$ constitue un maximum.

Reprenons l'équation (38 d). Elle donne la vitesse de Fin de Propulsion compte tenu de la hauteur de la colonne d'eau (par utilisation de la somme de la série correctrice en α) :

⁹² soit **21,7 mm...**

(Équation 38d)

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\sqrt{P_E/(1-\alpha)}}{M_{fE}} dE$$

La présentation ci-dessous est plus intéressante :

$$U_{\text{FinProp}} = -gT + V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\sqrt{P_E}}{\sqrt{1-\alpha} M_{fE}} dE$$

Elle permet en effet de dégager l'influence instantanée de la série correctrice.

Cette influence est une pondération, à chaque instant, par $1/\sqrt{1-\alpha}$

Il est alors avantageux de constater que pour ces valeurs de α faibles $\sqrt{1+\alpha}$ est assimilable à $1 + \alpha/2$!

Donnons de cette assimilation quelques exemples numériques en prenant par exemple **0,1** comme hypothèse de base pour la valeur maximum de α ⁹³) :

$$\text{Pour } \alpha = 0,1, \quad \sqrt{1+\alpha} = 1,048$$

$$\text{Pour } \alpha = 0,08, \quad \sqrt{1+\alpha} = 1,039$$

$$\text{Pour } \alpha = 0,05, \quad \sqrt{1+\alpha} = 1,0247$$

$$\text{Pour } \alpha = 0,025, \quad \sqrt{1+\alpha} = 1,0124$$

Au niveau de précision que nous recherchons, on peut donc bien écrire pour les tuyères de section moitié de celle de la tuyère standard de **21,7 mm** de diamètre soit de diamètre inférieur à **15 mm** :

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2 \quad ^{94}$$

Cette transformation n'est, au demeurant, rien de plus qu'une linéarisation de la fonction racine, puisque, aux alentours de l'unité, cette fonction possède une pente **1/2** ...

⁹³ Nous ne considérons que la valeur maximum de α , étant acquis que lorsque cette variable évolue vers des valeurs plus faibles durant la phase propulsive de la fusée, nos constatations sont encore plus légitimes...

⁹⁴ Pour les tuyères de section moitié de celle de la tuyère standard de 21,7 mm de diamètre soit de diamètre inférieur à 15mm.

Reportée dans l'équation de la propulsion, cette assimilation de $1/\sqrt{1-\alpha}$ à $1 + \alpha/2$ compose :

$$U_{\text{FinProp}} \approx -gT + V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{(1 + \alpha/2) \sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

Elle est très profitable car elle va nous permettre de scinder l'intégrale de la formule (38 d) en deux parties :

→ Une première intégrale qui ne dépendra pas de α , et qui n'est autre que l'intégrale résultant de nos travaux ne prenant pas en compte l'influence de la colonne d'eau :

$$V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

→ et une deuxième intégrale, complétant la première, qui résume à elle seule l'influence de la hauteur de la colonne d'eau :

$$V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\alpha/2 \sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

La vitesse de Fin de Propulsion est donc la somme de $-gT$ et de ces deux intégrales :

$$U_{\text{FinProp}} \approx -gT + [V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho}] \int_{\text{Sans Colonne}} + \frac{1}{2} [V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho}] \int_{\text{Influence Colonne}}$$

(nous avons ici sorti le $1/2$ de l'intégrale, on verra pourquoi tout à l'heure)

Critique de cette assimilation :

Analysons d'abord les erreurs relatives que produit cette linéarisation "autour de $\alpha = 0$ " pour des α plus petits que **0,08** (nous considérons donc ici que la réduction de tuyère commence à la tuyère de **15 mm**, que nous nommons tuyère *substandard*⁹⁵) :

pour $\alpha = 0,08$: erreur de **- 0,25 %**
 Pour $\alpha = 0,06$: erreur de **- 0,14 %**
 Pour $\alpha = 0,04$: erreur de **- 0,06 %**

On voit que ces erreurs sont assez faibles (d'autant plus que leur sommation sera pondérée par le coefficient **0,5**).

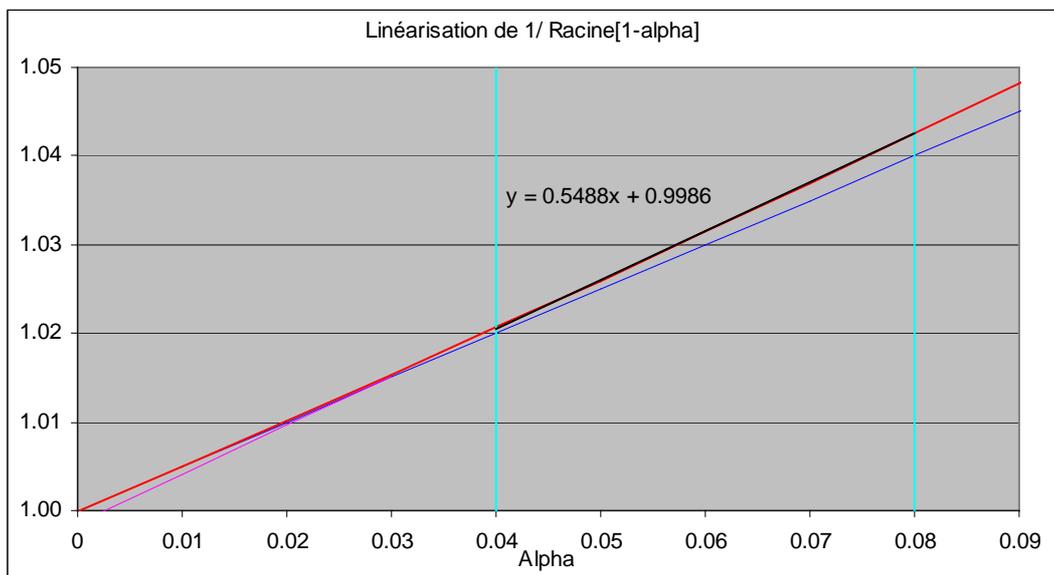
Autre linéarisation de $1/\sqrt{1-\alpha}$

Mais on peut songer à une meilleure linéarisation de cette fonction $1/\sqrt{1-\alpha}$. En effet l'évolution de α se produit principalement autour de **0,06** (et non de zéro) pour les fusées à tuyère réduites (allant de la tuyère *substandard* à la tuyère de 11mm).

Une linéarisation "autour de **0,06**" peut donc apparaître comme préférable.

Le graphe ci-dessous image mieux les choses :

En rouge y apparaît la courbe de $1/\sqrt{1-\alpha}$ et en bleu la linéarisation "autour de $\alpha = 0$ " de cette courbe (soit $1 + \alpha/2$).



La plage de α maximum que nous visons (réduction de tuyère de moitié jusqu'au quart) est limitée par les deux verticales bleues claires).

⁹⁵ Rappelons qu'une tuyère *substandard* est une tuyère de section réduite à la moitié de la section standard de 21,7mm.

Le segment noir montre la linéarisation sur cette plage (soit ‘‘autour de $\alpha = 0,06$ ’’) proposée par Excel qui en affiche également l’équation :

L’erreur commise du fait de cette linéarisation de $1/\sqrt{1-\alpha}$ ‘‘autour de $\alpha = 0,06$ ’’ est minimale. Elle est :

pour $\alpha = 0,08$, de - 0,007 % (soit **7 cent millièmes** en moins)

Pour $\alpha = 0,06$, de + 0,010 % (soit **1 dix millième** en plus)

Pour $\alpha = 0,04$, de - 0,007 %

De plus ces erreurs, tantôt positives, tantôt négatives, peuvent s’annuler en partie dans leur intégration.

Tout ceci est très facilement admissible, mais ne concerne que les valeurs maximums de la variable α durant la phase propulsive (pendant la majeure partie de la phase propulsive). Pour les valeurs plus faibles de la variable α , en toute fin de propulsion, la prorogation de cette linéarisation ‘‘autour de $\alpha = 0,06$ ’’ entraîne des erreurs plus grandes, puisque α se situe alors en dehors de la plage pour laquelle Excel a conçu cette linéarisation $y = 0,5488 + 0,9986 \alpha$: Cela produit une erreur maximum de - 0,14 % (pour $\alpha = 0$) : on aperçoit la droite correspondant à cette prorogation en violet sur le graphe ci-dessus.

Les erreurs de calcul qui découlerait de cette prorogation lors de l’intégration pourraient être jugées acceptables du fait qu’elles ne touchent l’intégration que sur une plage finale très courte de l’Expansion (disons de 1,45 à 1,50 dans le cas d’un Quota d’eau d’un tiers et pour notre réservoir de 1,5 L à la silhouette déjà évoquée).

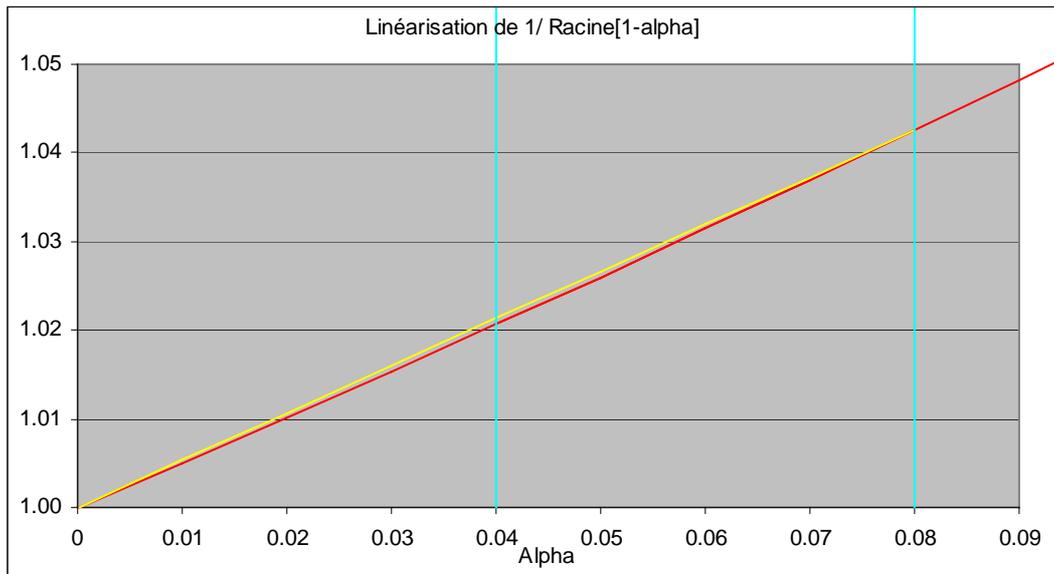
Cependant un scrupule d’ingénieur nous pousse à penser qu’il vaut mieux un résultat moins précis mais dont on peut connaître le taux de précision.

De ce point de vue de l’ingénieur, il est donc préférable d’envisager, comme ci-dessous en jaune, une linéarisation passant par les points :

(0 ;1) et (0,08 ; $1/\sqrt{1-0,08}$).

La courbe illustrant $1/\sqrt{1-\alpha}$ est toujours en rouge.

La droite jaune d’équation $y = 1 + 0,53215 \alpha$ est donc notre nouvelle proposition de linéarisation :



L'erreur maximum qu'on commet en s'appuyant sur cette droite plutôt que sur la fonction exacte $1/\sqrt{1-\alpha}$ se produit aux alentours de $\alpha = 0.04$: Elle est de **0,065 %**.

Plus important, toutes les erreurs commises à ce titre sont de même signe (aucune erreur ne corrige donc une autre) ; le calcul est certes moins précis, mais en revanche on est certain que l'erreur que cette linéarisation entraîne sur l'intégrale est inférieure à **0,065 %** (puisque dans la sommation de l'intégrale, chaque pas de calcul est entaché d'une erreur maximum de **0,065 %**).

Nous allons donc adopter cette assimilation de $1/\sqrt{1-\alpha}$ à $y = 1 + 0,53215 \alpha$, assimilation qui ne produit qu'une erreur maximum de **0,065 %** sur la Vitesse de Fin de Propulsion.

Nous pouvons donc écrire :

$$U_{\text{FinProp}} \approx -gT + V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{(1+0,53215 \alpha) \sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

Cette assimilation va nous permettre de réaliser avec suffisamment de précision la scission de l'intégrale de l'équation (38 d) de U_{FinProp} en deux partitions :

→ la première partition, rappelons-le, est une intégrale qui ne dépend pas de α , et n'est autre que l'intégrale résultant de nos travaux ne prenant pas en compte l'influence de la colonne d'eau :

$$V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{\sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

→ la deuxième partition est l'intégrale qui résume à elle seule l'influence de la hauteur de la colonne d'eau :

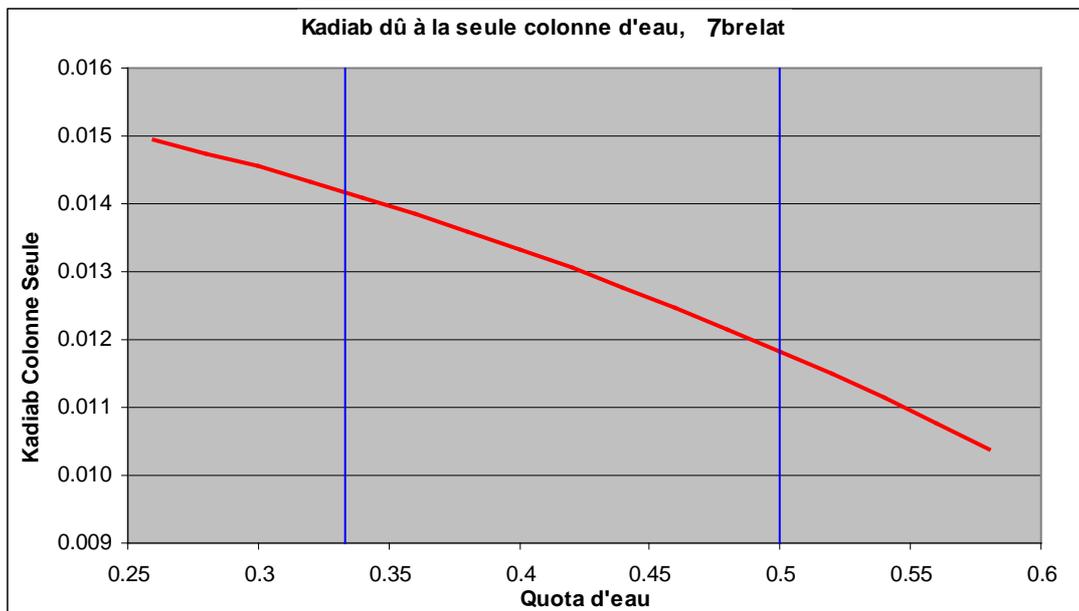
$$V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{\text{à } E=1/Q_{\text{air}}} \frac{0,53215 \alpha \sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

La somme de ces deux partitions et de $-gT$ donnant bien sûr U_{FinProp} :

$U_{\text{FinProp}} \approx$

$$-gT + [V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho}] \int_{\text{Sans Colonne}} + 0,53215 [V_f Q_{\text{air}} \sqrt{2\rho}] \int_{\text{Influence Colonne}}$$

Voici la partie de notre K_{adiab} qui est due à la seule colonne d'eau (et donc à la deuxième partition de l'intégrale), ceci pour une fusée de **0,1 Kg**, dotée d'une tuyère *substandard* de **15mm** et lancée à la pression initiale de **7 b relatifs** :



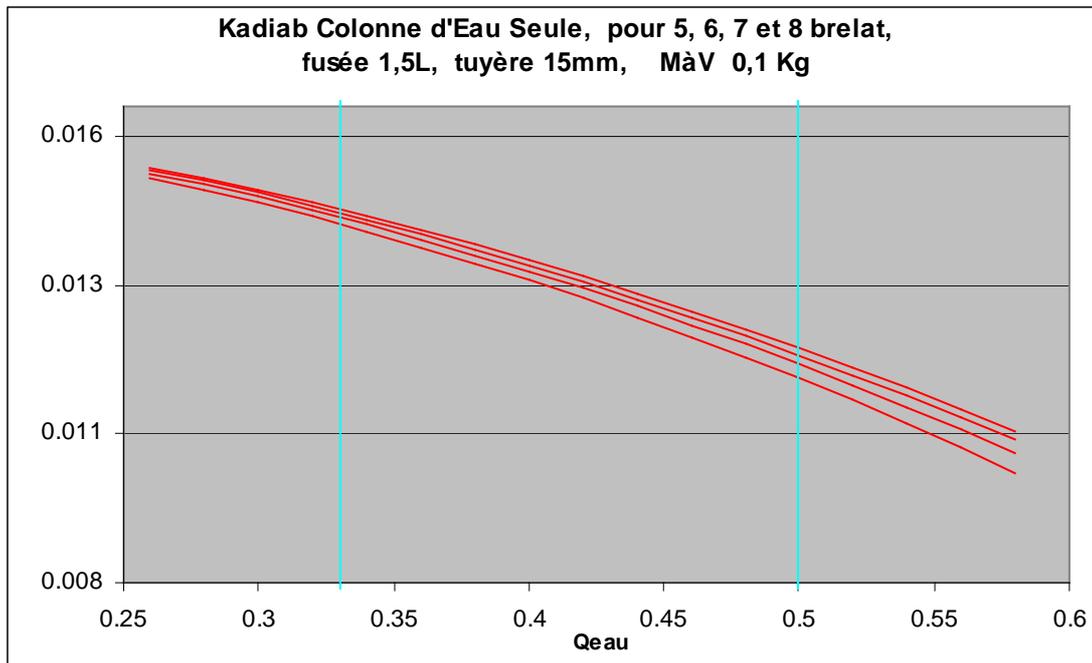
On voit que l'apport de la colonne d'eau sur le Coefficient Adiabatique est assez faible : de l'ordre de **1,3 %** (si l'on considère pour simplifier que le K_{adiab} tourne toujours autour de l'unité) : Ceci est dû au fait que notre fusée possède une tuyère *substandard* de **15 mm** de diamètre (rappelons que le coefficient instantané α est égal à

$\rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$) (une fusée à tuyère standard aurait donc un coefficient instantané α double).

D'autre part, on remarque sur la courbe que plus le Quota d'eau est grand et plus l'apport de la colonne d'eau sur le K_{adiab} (et donc sur la Vitesse de Fin de Propulsion) est faible. Sans doute parce que si une plus grande quantité d'eau augmente la hauteur de la colonne, elle augmente encore plus la masse d'eau emportée, ce qui nuit à l'accélération et donc à la pression *dynamique* qu'elle génère à la tuyère ...

Cet apport de la colonne d'eau varie-t-il beaucoup selon la pression de lancement ?

Le graphique suivant montre que non :



Imaginons à présent que nous dotions une fusée d'une tuyère d'aire réduite d'un facteur R_t par rapport à cette tuyère standard de **15mm**.

La rédaction $\rho H_E 2S_{tuy} / M_{fE}$ de α nous indique que, tout au long de la plage d'intégration α sera pondéré par ce coefficient R_t . Cette constance dans l'action de R_t nous autorise donc à le sortir de l'intégrale :

(Équation 38 e) (pour les tuyères de diamètre inférieur à **15 mm**)

$$U_{FinProp} \approx$$

$$-gT + V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{à E = 1/ Q_{Air}} \frac{\sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE + R_t V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho} \int_{de E=1}^{à E = 1/ Q_{Air}} \frac{\alpha_{sub}/2 \sqrt{P_E}}{M_{fE}} dE$$

avec :

R_t coefficient de réduction de l'aire de la tuyère (à partir de celle de la tuyère *substandard* de **15 mm**)

$\alpha_{\text{sub}} = \rho H_E 2S_{\text{Tuy}} / M_{fE}$ dépendant de la géométrie du réservoir et de la Masse à Vide et calculé avec le diamètre **15 mm** de la tuyère dite substandard

Ceci nous prouve qu'avec une précision assez grande, l'influence de la réduction de tuyère pourra être linéarisée à partir des calculs effectués avec la tuyère standard...

Il nous semble donc avoir suffisamment dégagé la voie de la prise en compte de la réduction de tuyère sur la propulsion de la fusée.

Bernard de *Go Mars !*

Le 01/05/08

NOTES DIVERSES :

NOTE SUR LA VALEUR DE NOTRE COEFFICIENT ADIABATIQUE POUR LES QUOTAS D'EAU QUASI UNITAIRE (volume d'air comprimé presque nul)

Dans ces cas très particuliers (et nullement usuels) où presque tout le volume de la fusée est occupé par l'eau, certaines simplifications apparaissent :

La masse instantanée $M + \rho V_f (1 - Q_{\text{Air}} E)$ de la fusée pouvant être considérée comme constante et très proche de $M + \rho V_f$ pendant la très courte Phase Propulsive, l'intégration de U_{FinProp} se ramène, si l'on se réfère à l'équation de la page 11 qui précède juste l'équation (39) dans notre texte, à :

$$\frac{V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho}}{M + \rho V_f} \int_{\text{de } E=1}^{\text{à } E_{\text{AdiabMax}}} \sqrt{(P_{\text{init}} + 10^5)/E^\gamma - 10^5} \, dE$$

P_{init} étant ici exprimé sous la racine en **Pascals relatifs !**

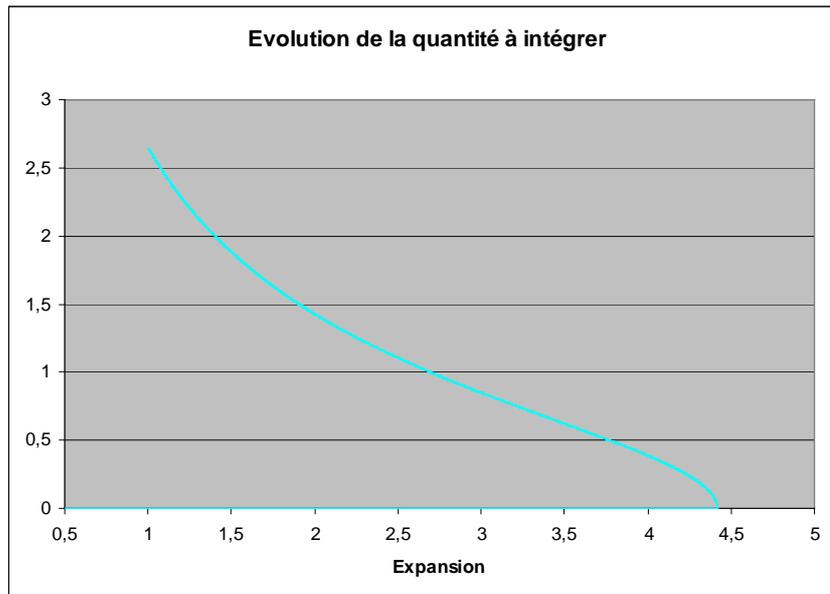
La borne supérieure E_{AdiabMax} vaut $\left(\frac{P_{\text{init}}+1}{1_{\text{relat}}}\right)^{(1/\gamma)}$, P_{init} devant y être exprimé en **b relatifs**.

Cette borne supérieure n'ayant d'ailleurs pas une forme très simple, on peut même se demander si dans ce cas non usuel très particulier on ne devrait pas tenter l'intégration en utilisant tout simplement la variable de la Pression Instantanée. Nous ignorons si cette voie est utilisable...

L'intégration libellée ci-dessus est assez complexe. À notre niveau, elle semble être justiciable d'un développement en tant que binôme de Newton généralisé, développement permettant son intégration sous forme d'une série...⁹⁶

Mais une intégration *graphique* est aisée.

Voici ce que notre divin tableur indique pour l'évolution de la quantité sous le signe de l'intégrale :



De fait, lorsque l'expansion vaut **1** (au début de la propulsion) cette même quantité vaut la racine de la Pression initiale (en **bars relatifs**), soit pour les **7 bars** que nous considérons ici **2,64**...

À mesure que l'Expansion progresse, cette racine se fait de plus en plus faible jusqu'à zéro.

L'intégration de la surface décrite par la courbe bleue claire ci-dessus a donc, l'œil nu, comme ordre de grandeur : **1,1*3,5** soit **~ 3,9**. Effectivement, Excel donne pour l'intégrale la valeur de **3,768**.

Mais elle est pondérée par $\frac{V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho}}{M + \rho V_f}$, quantité fixe qui tend vers la nullité (sous l'influence de Q_{Air}).

La Vitesse de Fin de Propulsion $U_{FinProp}$ en ressort comme valant :

$$U_{FinProp} \approx 3,768 \frac{V_f Q_{Air} \sqrt{2\rho}}{M + \rho V_f}$$

⁹⁶ Voir à ce sujet notre texte : *Quelques intégrations mathématiques spéciales à propos de la masse volumique équivalente*, au lien : http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/integ_faib_db.pdf

Ce résultat est à comparer à la vitesse de Tsiolkovski pondérée comme il se doit par notre Coefficient Adiabatique :

$$U_{\text{FinProp}} = K_{\text{Adiab}} V_{\text{éjectInit}} \text{Ln} \left[1 + \frac{M_{\text{EauÉject}}}{(M + \rho V_f)} \right]$$

$M_{\text{EauÉject}}$ étant la masse d'eau éjecté durant la Phase Propulsive et M , comme toujours, la Masse à Vide de la fusée et $(M + \rho V_f)$ étant la Masse à Vide de la fusée (nous en parlons à l'instant).

Notons en effet que nous avons assimilé ici immédiatement la Quantité d'eau qui reste dans la fusée en Fin de Propulsion à ρV_f puisque la masse d'eau éjecté reste toujours très faible devant la somme de la Masse à Sec et de l'eau résiduelle)

On peut donner à la Vitesse d'éjection initiale sa valeur $\sqrt{2P_{\text{init}}/\rho}$, (expression où P_{init} doit être exprimé en **Pascals** !)

... et à la masse d'eau éjectée la sienne : $\rho V_f Q_{\text{Air}} \left[\left(\frac{P_{\text{init}} + 1}{1_{\text{brelet}}} \right)^{(1/\gamma)} - 1 \right]$ (expression où P_{init} doit être exprimé en **Bars relatifs** !) ⁹⁷

Cela confère à la Vitesse de Fin de Propulsion l'écriture :

$$U_{\text{FinProp}} = K_{\text{Adiab}} \sqrt{2P_{\text{init}}/\rho} \text{Ln} \left[1 + \frac{\rho V_f Q_{\text{Air}} \left[\left(\frac{P_{\text{init}} + 1}{1_{\text{brelet}}} \right)^{(1/\gamma)} - 1 \right]}{(M + \rho V_f)} \right]$$

Pour les **7 bars relatifs** que nous accordons ici à la Pression Initiale, cette égalité devient :

$$U_{\text{FinProp}} = K_{\text{Adiab}} \sqrt{14 \cdot 10^5 / \rho} \text{Ln} \left[1 + \frac{\rho V_f Q_{\text{Air}} [(8)^{1/\gamma} - 1]}{(M + \rho V_f)} \right]$$

Ce libellé est à rapprocher de celui que nous avons obtenu par l'autre voie :

$$U_{\text{FinProp}} \approx 3,768 \frac{V_f Q_{\text{Air}} \sqrt{2\rho}}{M + \rho V_f}$$

Ce qui conduit après quelques simplifications fort appréciables à cette valeur de **~ 0,42** du Coefficient Adiabatique pour ces Quotas d'eau quasi unitaires (ici pour la Pression Initiale de **7 b relatifs**). Cette valeur de K_{Adiab} est d'ailleurs indépendante de la Masse Volumique du fluide éjecté et bien sûr du Quota d'eau choisi, pourvu qu'il reste proche de **1**...

⁹⁷ La quantité sans dimension élevée à la puissance $1/\gamma$ représente l'Expansion de l'air comprimé jusqu'à la Pression Atmosphérique, et il faut lui retirer **1** pour avoir le gain de volume de cet air.

On peut trouver cette valeur de **0,42** très proche de l'unité. L'explication de cette proximité est donnée [plus haut](#), à la page 25.

NOTE SUR LA PRISE EN COMPTE DE LA TRAÎNÉE DANS LE CALCUL DE LA VITESSE DE FIN DE PROPULSION

On a coutume de négliger le freinage atmosphérique dans le calcul de la Vitesse de Fin de Propulsion ; cette option est motivée par le fait que, la phase propulsive étant extrêmement brève, le freinage atmosphérique n'a guère le temps de s'exprimer. C-à-d que si la Traînée existe bien, elle n'a pas le temps de provoquer une significative perte de vitesse.

Pour se convaincre de la validité de ce raisonnement, on peut réaliser le calcul par excès d'un freinage occasionné par la Traînée maximale agissant sur la totalité de la Phase Propulsive :

Ce freinage par excès produirait, sur une fusée supposée légère comme sa seule Masse à Vide, une accélération de :

$$\left[\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \text{SCxV}_{\text{FinProp}}^2 \right] / M_{\text{àVide}}$$

Cette accélération agissant au long de la Phase Propulsive de **T** secondes occasionnerait une perte de vitesse de :

$$\left[\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \text{SCxV}_{\text{FinProp}}^2 \right] T / M_{\text{àVide}}$$

Sur les bases d'une Vitesse de Fin de Propulsion de **50 m/s**, d'une Masse à Vide de **0,1 Kg**, d'un **Cx** de **0,4**, une telle perte de vitesse par Traînée s'élèverait pour une fusée de **1,5 L**⁹⁸ à seulement **3,3 m/s**, soit, en pertes relatives **6,6 %**...

Dans la réalité des choses, la Traînée s'exprime évidemment surtout sur la fin de la Phase Propulsive (aux plus grandes vitesses et donc sur une durée nettement moins longue) et sur une masse significativement plus forte que la Masse à Vide, ce qui minimise grandement ce chiffre de **6,6 %**. Notre tableau donne ainsi pour ces paramètres de vol seulement **0,37 à 0,57 %** de pertes relatives par Traînée⁹⁹, soit seulement **5 à 10 %** des **6,6 %** avancés ci-dessus (ces pertes de **0,37 à 0,57 %** sont calculées selon la méthode s'arrêtant *au premier ordre* que nous énonçons à présent).

Pertes de Vitesses par Traînée en phase aqueuse :

Un travail analytique s'en tenant au *premier ordre* des pertes de vitesse de Fin de Propulsion par Traînée est réalisable ; il consiste à utiliser, pour la détermination de la Traînée par la formule classique $\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \text{SCxV}_{(t)}^2$, la vitesse instantanée $V_{(t)}$ calculée sans prise en compte de la Traînée (sur le modèle de notre étude [Amendement Atmosphérique à la vitesse de Tsiolkovski](#) pour les fusées à feu). C-à-d que l'on évalue la Traînée d'après une vitesse qui ne tient pas compte de cette Traînée.

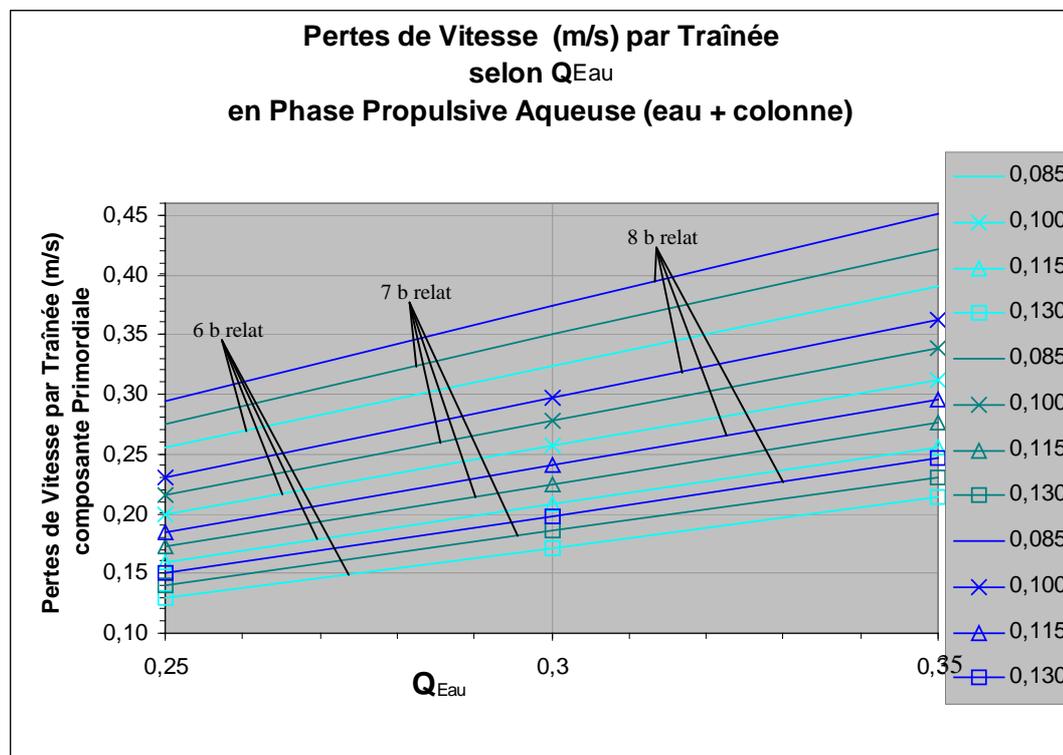
⁹⁸ d'un diamètre de **8,3 cm**.

⁹⁹ en référence à la seule vitesse de propulsion aqueuse (effet de la colonne d'eau compris), selon la Masse à Vide, la Pression Initiale étant réglée pour produire cette vitesse aqueuse de **50 m/s**..

Au demeurant, cette façon de s'en tenir au premier ordre est une méthode classique chez les ingénieurs dès lors qu'ils sont amenés à juger que l'objet de leur recherche (ici la Perte de Vitesse par Traînée) a peu d'effet sur le phénomène principal (la Vitesse de Fin de Propulsion, qu'elle diminue simplement de quelques % par *rétro-action*). Dans notre cas la justification de cette méthode serait celle-ci :

Certes la Vitesse Instantanée prise alors comme base pour le calcul de la Traînée n'est pas exacte, certes également elle est à chaque instant portée au carré dans le calcul de la Traînée (une erreur de **1 %** sur cette vitesse se traduisant donc par une erreur de $\sim (1\%)^2$, soit $\sim 2\%$ sur la Traînée) mais cette erreur de **2 %** ne concerne qu'un phénomène intervenant pour moins de **1 %** sur la Vitesse de Fin de Propulsion : cette dernière n'en est alors touchée que pour $1\% * 2\%$, soit **0,02 %**, ce qui est tout à fait acceptable !

Nous avons collecté les valeurs de ces Pertes de Vitesse par Traînée pour une fusée type de **1,5L** de **Cx 0,45** lancée à trois quotas d'eau, pour des Pressions Initiales de **6, 7 et 8 bars relatifs** :



On remarque que les fusées de plus faibles Masse à Vide se placent en haut sur le graphe. À la réflexion, elles ont bien deux raisons d'afficher de plus fortes pertes par Traînée :

→ possédant un meilleur Rapport de Masses, elles atteignent une Vitesse de Fin de Propulsion plus importante et sont donc soumise à une Traînée plus forte

→ leur Traînée instantanée $T_{(t)}$ agissant sur une masse $M_{(t)}$ moindre, la décélération $T_{(t)}/M_{(t)}$ en est plus sensible à chaque instant...

Une mise en équation simplifiée des courbes ci-dessus ne paraît pas trop difficile ; ce pourrait être l'objet d'un autre travail.

Remarquons d'autre part que dans cette première approche *primordiale*, le **SCx** intervient à chaque instant comme un facteur commun : ce produit **SCx** pourra donc être extrait et présider à l'équation dégagée.

Toujours à propos du graphe ci-dessus, on peut répéter que ces Pertes de Vitesse par Traînée ne représentent qu'un pourcentage toujours nettement inférieur à **1 %** de la Vitesse de Propulsion Aqueuse (eau + colonne). Cela signifie que leur prise en compte (par soustraction à la Vitesse Aqueuse) n'introduira qu'une erreur inférieure à **0,02 %** ¹⁰⁰ ...

Un autre renseignement de poids est que, sur ce graphe, ces Pertes de Vitesses pèchent par excès ¹⁰¹ ...

Pertes de Vitesse par Traînée en phase gazeuse :

Reste que l'on n'a pas encore tenu compte des pertes de vitesse par Traînée qui interviennent durant la Phase Propulsive gazeuse (soit l'éjection de l'air résiduel).

Comment estimer les pertes par Traînée durant cette Propulsion Gazeuse ?, sachant que cette ultime phase propulsive n'est connue de nous que, *forfaitairement*, par son Impulsion totale...

Ce que l'on sait en effet c'est simplement que durant cette phase gazeuse la Vitesse Instantanée de la fusée va passer de V_{FinProp} Aqueuse à une valeur augmentée du quotient de l'Impulsion sur la Masse à Vide...

Malheureusement, entre ces deux valeurs, on ne sait pas quelle est l'évolution de la Vitesse Instantanée de la fusée, Vitesse Instantanée dont la connaissance nous est nécessaire pour intégrer la Traînée...

Mais l'on peut néanmoins se proposer un calcul par excès qui calculerait l'impact de la Traînée sur une fusée ayant fendu l'air :

→ avec sa vitesse maximum (soit la Vitesse de Fin de Propulsion Aqueuse +Gazeuse)

→ pendant toute la durée de cette propulsion Gazeuse (donnée pour **0,05''** par Dean Wheeler dans le cas des fusées *plein goulot* de **1,5 L**) :

Considérons ainsi une fusée à eau de **1,5 L**, **0,1 Kg** de **Masse à Vide**, lancée à **7 b** relatifs avec un **Quota d'eau** de **0,33** et ayant acquis de ce fait une vitesse de **~ 58 m/s** au terme de sa propulsion aqueuse (en comptant l'influence de la hauteur de la colonne d'eau) ; à ce moment elle reçoit l'Impulsion due à la décharge de l'air qui accroît sa vitesse de **~ 18 m/s**, cet accroissement de vitesse s'étendant sur une période très brève de **0,05'**.

¹⁰⁰ ...ainsi que nous l'avons déjà dit. En fait la prise en compte des Pertes par Traînée fait passer l'erreur de moins d'**1 %** à **0,02 %**.

¹⁰¹ ce qui veut dire qu'en réalité les Pertes de Vitesse par Traînée sont très légèrement plus faibles.

Si l'on considère que la Traînée atmosphérique a freiné la fusée sur la base de cette vitesse maxi de $58 + 18 = 76 \text{ m/s}$ et ceci pendant toute la durée de la propulsion gazeuse ($0,05''$), le calcul donne comme perte de vitesse durant cette seule durée **4,3 m/s**.

Ce chiffre représente donc la borne supérieure des Pertes par Traînée en Phase Gazeuse. C'est **24 %** de l'apport due à la Propulsion Gazeuse.

La borne inférieure des mêmes Pertes peut d'ailleurs également être déterminée en prenant cette fois-ci comme vitesse celle du début de la Propulsion Gazeuse (à savoir ici **58 m/s**). Les pertes de vitesses descendent alors à **2,5 m/s**, soit **14 %** du gain créé par l'éjection de l'air résiduel...

Ces chiffres de **2,5** et **4,3 m/s** sont donc les limites des Pertes de Vitesse par Traînée à attendre durant la phase gazeuse ! Celles-ci sont donc assez importantes et en tout cas plus que les Pertes par Traînée durant la Phase Aqueuse (en comptant dans celle-ci l'effet de la colonne d'air). Ceci est dû au fait que durant la propulsion gazeuse la fusée est très légère : l'accélération γ produite par la Traînée T , tirée de la loi $T = M_{av} \gamma$, est alors très forte...

Ce freinage atmosphérique rapide d'une fusée réduite à sa masse minimum promet d'ailleurs d'écourter pareillement la phase de montée balistique de la fusée puisque, durant cette phase, c'est bien sur la Masse à Vide que s'appliquera la Traînée...

NOTE SUR LA MORALITÉ DE L'EFFET PROPULSIF DE LA COLONNE D'EAU

Il peut apparaître curieux à nos lecteurs les plus intuitifs que l'accélération de la fusée puisse produire en retour un complément d'accélération. Il y a là une sorte de génération spontanée de force propulsive, une multiplication indéfinie de celle-ci.

Réfutons en premier le raisonnement qui consisterait à penser que *l'accélération produit de l'accélération et ainsi de suite* (ce qui laisserait entendre que la fusée va ainsi par auto-accélération augmenter indéfiniment sa vitesse) : nous avons assez prouvé dans ce texte que l'appoint de propulsion dû à la mise en pression de la colonne d'eau par l'accélération n'est qu'une fraction de la propulsion par pression hydraulique et que, si cet appoint produit lui-même un appoint de propulsion, l'importance de ces appoints diminue à chaque pas de la réflexion (la série infinie des appoints formant une suite rapidement convergente).

Mais il n'en reste pas moins qu'on peut ressentir comme gênant que l'inertie du liquide embarqué (cette inertie qui est une force résistante) produise d'elle-même un effet moteur (sans consommation d'énergie, donc) : nous avons tous gravé en nous un certain sentiment *moral* qui veut que toute accélération ne peut se produire qu'au prix d'une dépense d'énergie...

Considérons une fusée animée d'une accélération γ . La colonne d'eau de hauteur h existant au-dessus de la tuyère subit, si on la considère entraînée par la fusée, un surcroît de pression à la tuyère de γph , du fait de l'accélération γ .

Ce surcroît de pression génère un surcroît de force propulsive qu'on peut quantifier classiquement comme $2PS_{Tuy}^{102}$, c-à-d ici :

$$\text{Surcroît Force Propulsive} = 2 \gamma ph S_{Tuy} .$$

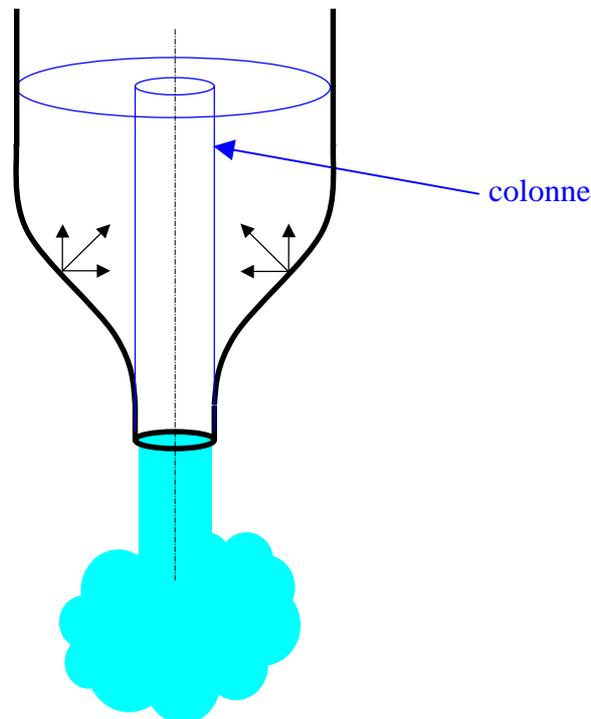
C'est ainsi que nous avons raisonné jusque là (c-à-d en considérant que la colonne d'eau fait partie de la Masse d'eau entraînée par la fusée).

Or, si l'on reconnaît dans phS_{Tuy} la Masse de ladite colonne d'eau, on peut aussi également lire dans le produit $2\gamma phS_{Tuy}$ le double de l'effort opposé à l'accélération γ par l'inertie de la colonne d'eau !

Et retirer cet effort résistant $2\gamma phS_{Tuy}$ équivaut à ajouter un effort moteur $2\gamma phS_{Tuy}$. comme nous l'avons fait jusque là...

Cela revient à dire que la moitié de l'effet propulsif apporté par la colonne d'eau peut être considérée comme une compensation de la prise en compte de celle-ci dans la masse d'inertie de la fusée...

En effet, si le fond du réservoir reçoit bien de l'eau embarquée une poussée due à son inertie (c'est ce fond qui entraîne l'eau et l'accélère)(voir la symbolisation de deux triangles de forces élémentaires ci-dessous), on ne peut prétendre que l'eau de la colonne surmontant la tuyère exerce une quelconque action sur ce fond (la tuyère étant par définition une absence de fond) :



¹⁰² Nous avons vu que cette formulation considère que l'aire de la surface libre de l'eau est beaucoup plus grande que celle de la tuyère...

La quantité $\gamma \rho h S_{Tuy}$, moitié du surcroît de force propulsive dû à la colonne d'eau est donc une correction d'une mauvaise imputation de la masse d'inertie de cette colonne d'eau (imputation de la colonne d'eau dans la Masse d'Inertie Instantanée de la fusée alors qu'elle s'en différencie par le fait qu'elle n'est pas accélérée par le fond de l'engin et peut donc rester sur place).

Mais cette différence d'imputation n'explique que la moitié du surcroît de propulsion dû à l'inertie de la colonne d'eau : d'où vient l'autre moitié, autrement dit cette autre moitié a-t-elle une signification logique ?

Hé bien nous le pensons. Mais cette signification est plus difficile à illustrer. Disons simplement qu'en régime hydraulique (nous effectuons nos calculs en utilisant l'équation de Bernoulli pour les écoulements stationnaires) tout débit d'éjection à la tuyère crée une aspiration du fond vers le haut (vers l'avant de la fusée). Cela fait l'objet de notre texte [La Partie cachée de la Force](http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/part_cach_f.pdf) :

En effet, quoique l'eau de la fameuse colonne ne soit pas entraînée par le fond, elle n'assure sa sortie de la bouteille que prise dans le mouvement du reste de l'eau et ce mouvement crée de fait (ceci est expliqué dans notre texte cité à l'instant) une deuxième partie de la force (égale à la première), un doublement de la force propulsive, donc...

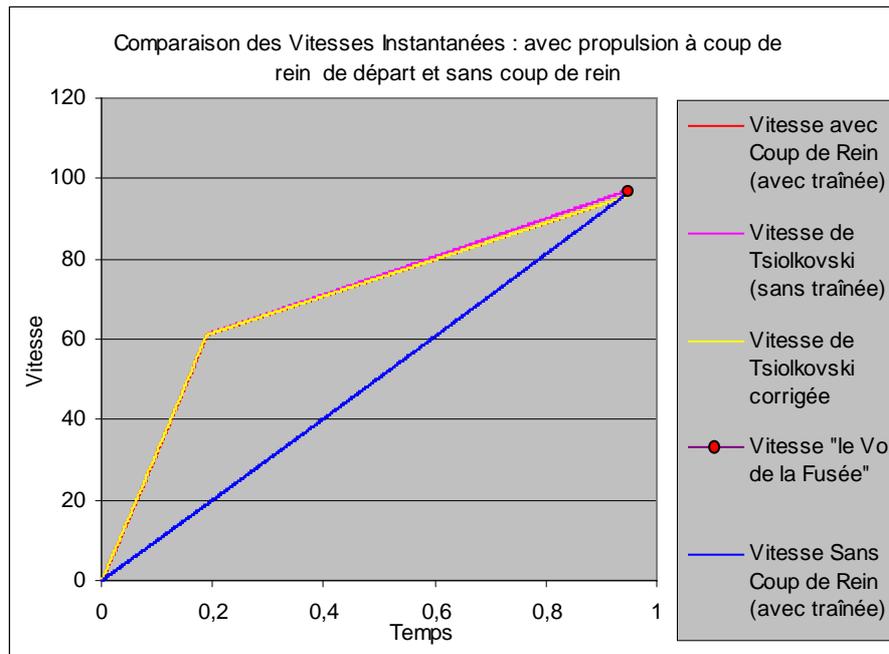
NOTE SUR L'APPLICATION DE LA FORMULE DE TSIOLKOVSKI AUX FUSÉES À DÉBIT MASSIQUE VARIABLE

Nous avons fait mention, dans le courant de la présente étude, du fait que, contrairement à ce qu'il est fréquemment avancé, la formule de Tsiolkovski peut très bien être appliquée à des fusées dont le débit est variable.

Dans notre autre texte ([Amendement atmosphérique à la fameuse formule de Tsiolkovski](#)) nous démontrons par l'image que deux fusées à vitesse d'éjection égale et constante atteignent la même vitesse à l'issue de leur phase propulsive, même si leur débit est différent ou même variable durant la propulsion¹⁰³.

Témoin ce graphe tiré dudit texte et illustrant la phase propulsive de deux fusées de même durée de propulsion mais dont l'une fait montre d'un *coup de rein* dans le début de sa propulsion (par augmentation du débit, mais toujours à Vitesse d'Éjection donnée) quand l'autre s'en tient à un débit d'éjection constant (à la même Vitesse d'Éjection donnée) :

¹⁰³ Dans le champ de gravité terrestre, il faut cependant que la durée de leur Phase Propulsive soit égale, mais on peut s'affranchir de cette condition si l'on ne s'intéresse qu'au gain de vitesse dû à la propulsion...



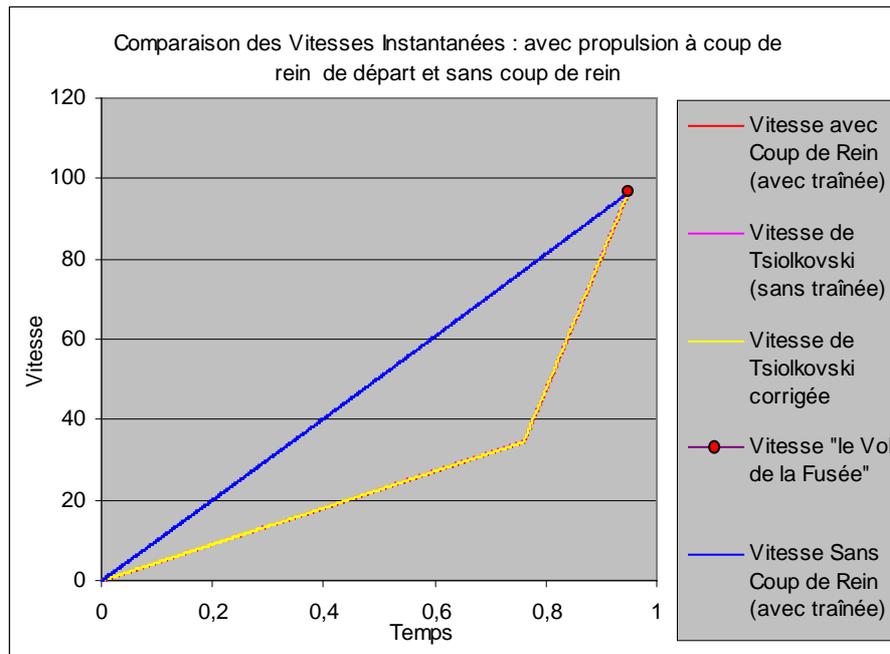
Ci-dessus la vitesse nommée *Vitesse de Tsiolkovski (sans traînée)* est la vitesse calculée selon la fameuse formule du grand homme (donc sans prise en compte de la Traînée atmosphérique) ; les autres vitesses intègrent la Traînée.

La vitesse rouge (vitesse réelle ou du moins calculée au mieux) est cachée par la vitesse jaune. Cette vitesse jaune, ou *Vitesse de Tsiolkovski corrigée*, est une proposition de prise en compte de la Traînée que nous argumentons dans le même texte.

Le débit correspondant à ce que nous avons appelé un *coup de rein de départ* est de **3** fois le débit moyen (calculé par Q/T) et ce coup de rein dure **0,2** fois **T** le temps total de propulsion, c-à-d que le coup de rein utilise les **6/10^{èmes}** de la Masse d'appui pendant les **2/10^{èmes}** de la durée totale de propulsion ¹⁰⁴.

À titre de contre-expérience, on peut alors s'intéresser l'historique de propulsion suivant, où un coup de rein est donné en fin de propulsion :

¹⁰⁴ Ce qui permet de trouver le débit hors coup de rein : c'est la moitié du débit moyen ; ce deuxième régime dure **0,8T**...



Les vitesses de Fin de Propulsion se rejoignent encore à l'instant **T** (les vitesses rouge et fuchsia sont cachées par la vitesse jaune).

D'ailleurs, il est possible de démontrer sans grand déploiement mathématique cette propriété de la formule de Tsiolkovski :

La première démonstration est que, dans la formule de Tsiolkovski :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \ln\left[\frac{M_{\text{init}}}{M_{\text{àVide}}}\right] - gT$$

...le Débit Massique de la fusée n'apparaît pas :

Tout au plus le débit est-il implicite dans sa sommation au long du vol sous la forme du temps de propulsion **T**.

Mais, comme nous le disions en note de bas de page, si l'on ne s'intéresse qu'au gain de vitesse dû à la propulsion, à savoir :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \ln\left[\frac{M_{\text{init}}}{M_{\text{àVide}}}\right]$$

...on peut s'affranchir de cette limitation.

À titre d'exercice mental, on peut faire remarquer que la couleur de la fusée n'apparaît pas non plus dans cette équation : elle n'a donc pas d'effet sur la Vitesse de Fin de Propulsion. Il en est de même pour le débit : changer de débit ne change pas la Vitesse de Fin de Propulsion. D'ailleurs un ingénieur qui vient de modifier le débit d'un moteur de fusée (sans en changer la Vitesse d'Éjection) utilisera exactement les mêmes chiffres pour déterminer la Vitesse de Fin de Propulsion du nouveau moteur.

Voici à présent une deuxième démonstration simple de cette généralisation de la Formule de Tsiolkovski aux fusées à Débit Massique variable :

Prenons par exemple une fusée qui va produire durant sa propulsion deux Débits Massique d'Éjection .

Nommons le premier débit D_{m1} . Il durera T_1
 Nommons D_{m2} le deuxième débit, qui durera T_2 .

La totalité de Masse d'Appui embarquée peut donc être scindée mentalement en :

$$D_{M1}T_1 + D_{M2}T_2$$

Pendant le premier régime de propulsion la Masse de la fusée passera de :

$$M_{\text{àVide}} + D_{M1}T_1 + D_{M2}T_2 \quad \text{à} \quad M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2$$

Pendant le deuxième régime de propulsion, la Masse de la fusée passera de :

$$M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2 \quad \text{à} \quad M_{\text{àVide}}$$

Au total, la phase propulsive aura donc produite un gain de vitesse (dû à la seule propulsion) de :

$$V_{\text{éject}} \text{Ln}[(M_{\text{àVide}} + D_{M1}T_1 + D_{M2}T_2)/(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2)] + V_{\text{éject}} \text{Ln}[(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2)/M_{\text{àVide}}]$$

On peut reconnaître dans $M + D_{M1}T_1 + D_{M2}T_2$ la Masse de la Fusée sur le Pas de Tir ; nommons là M_{init} . Notre gain de vitesse dû à la seule propulsion sera donc :

$$V_{\text{éject}} \text{Ln}[M_{\text{init}}/(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2)] + V_{\text{éject}} \text{Ln}[(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2)/M_{\text{àVide}}]$$

Les propriétés de la fonction Logarithme font que l'on peut écrire :

$$V_{\text{éject}} [\text{Ln}(M_{\text{init}}) - \text{Ln}(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2) + \text{Ln}(M_{\text{àVide}} + D_{M2}T_2) - \text{Ln}(M_{\text{àVide}})]$$

Les deux logarithmes intermédiaires s'annulant mutuellement, notre équation se simplifie en :

$$V_{\text{éject}} [\text{Ln}(M_{\text{init}}) - \text{Ln}(M_{\text{àVide}})]$$

...soit le classique :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \text{Ln}[M_{\text{init}}/M_{\text{àVide}}]$$

... auquel il convient cependant d'ajouter le classique freinage gravitaire gT qui vaut ici $g(T_1 + T_2)$

Le gain de vitesse d'une fusée connaissant durant sa phase de propulsion de durée totale T deux régimes de propulsion, chacun d'un Débit Massique différent, est donc :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \ln[M_{\text{init}} / M_{\text{àVide}}] + gT$$

T étant la durée totale de la propulsion (somme de la durée des deux régimes).

On peut ainsi étendre la démonstration à une fusée dotée d'un nombre infini de régime propulsif, chaque régime éjectant toujours sa fraction de la Masse d'Appui à la même Vitesse d'Éjection mais selon un Débit Massique différent...

La conclusion qui s'impose alors est que la formule de Tsiolkovski :

$$U_{\text{FinProp}} = V_{\text{éject}} \ln[M_{\text{init}} / M_{\text{àVide}}] + gT$$

...vaut tout à fait pour une fusée de Débit Massique **variable** (la Vitesse d'Éjection se devant cependant de demeurer constante).

NOTE SUR LA FUSÉE À EAU À TUYÈRE HOMOCINÉTIQUE

Imaginons de scinder la phase propulsive d'une fusée à eau (qui se produit à Vitesse d'Éjection et à Débit Massique tous deux variables) en éléments successifs de phases propulsives où Vitesse d'Éjection et Débit Massique puissent être tous deux considérés comme constant.

On peut alors se piquer de transformer chacune de ces phases élémentaires de propulsion en autant de phases équivalentes du point de vue propulsif, toutes ces phases se produisant à une même vitesse d'Éjection donnée. La création de ces *phases propulsives élémentaires équivalentes* ne peut se faire qu'en adaptant le Débit Massique instantané pour qu'à chaque instant la force Propulsive soit équivalente.

Parce que la vitesse d'éjection de cette fusée équivalente reste constante durant toute la propulsion, nous allons qualifier sa tuyère d'*homocinétique*.

Dans la pratique, la vitesse d'éjection à la tuyère d'une fusée à eau étant primordialement liée (par la loi de Bernoulli) à la pression de l'air comprimée (laquelle décroît adiabatiquement), il n'est pas possible de construire une telle fusée en lui gardant la qualité d'être hydropneumatique. Mais rien n'empêche d'imaginer un tel engin, même si on ne peut plus le qualifier d'hydropneumatique...

Par contre, on peut très bien concevoir de réaliser une fusée à feu à tuyère homocinétique : Dans les faits, la Vitesse d'Éjection des fusées à feu diminue nettement lorsque leur débit décroît : ceci est dû au fait que, puisque moins de gaz se présentent à la tuyère, on s'y bouscule moins au portillon : le passage des gaz peut se faire à une vitesse inférieure. Mais justement, en resserrant un peu ce portillon, on peut très facilement restaurer la Vitesse d'Éjection à débit moindre.

Mais revenons à la fusée à eau

Considérons par exemple l'une de ces phases élémentaires de propulsion :
(à terminer)

APPLICATION DE LA LOI DE BERNOULLI À LA PROPULSION DE LA FUSÉE À EAU :

La loi de la conservation des quantités de mouvements nous autorise à écrire :

$$\text{Poussée} = \mathbf{q} \mathbf{V}_{\text{éject}}$$

...égalité où \mathbf{q} est le **Débit Massique** en **Kg/s**.

L'expression du débit \mathbf{q} conduit alors à l'expression :

$$\text{Poussée} = \rho \mathbf{S}_{\text{Tuy}} \mathbf{V}_{\text{éject}}^2$$

L'application (classique) de l'équation de Bernoulli ¹⁰⁵ à l'écoulement stationnaire d'eau ¹⁰⁶ nous informe sur le carré de cette Vitesse d'Éjection Instantanée :

$$\mathbf{V}_{\text{éject}}^2 = 2\mathbf{P}_{\text{Tuy}} / \{ \rho [1 - (\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2] \}$$

si l'on appelle \mathbf{S}_L la section de la surface libre de l'eau à chaque instant.

La valeur instantanée de la Poussée est donc :

$$\text{Poussée} = 2\mathbf{S}_{\text{Tuy}} \mathbf{P}_{\text{Tuy}} / [1 - (\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2]$$

Il est de coutume de négliger le terme $(\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2$ comme très petit devant **1**. C'est ce que nous avons fait également dans les calculs qui précèdent. En effet la valeur de $(\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2$, pour variable qu'elle soit durant la propulsion, est quand même usuellement, pour une fusée de **1,5L**, de **0,005** ¹⁰⁷, ce qui abaisse le numérateur $[1 - (\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2]$ à **0,995** (au lieu de **1** si $(\mathbf{S}_{\text{Tuy}} / \mathbf{S}_L)^2$ est négligé).

Cette erreur volontaire de **0,5 %** sur une bonne partie de la propulsion est évidemment acceptable Nous avons basé nos calculs qui précèdent sur cette acceptation...

¹⁰⁵ équation qui exprime la conservation des énergies gravitaire, cinétique, et de pression...

¹⁰⁶ Voir à ce sujet le texte *Principes* sur le site d'Alain Juge cité dans notre bibliographie de fin de texte.

¹⁰⁷ et ceci pendant une bonne partie de la propulsion. Mais cette quantité augmente nettement en fin de propulsion (selon les formes du réservoir)...

NOTE SUR UNE IMPOSSIBILITÉ DE CALCUL EN “STATIONNAIRE”

Il faut également faire ici une constatation très étonnante :

Lorsque S_L tend vers S_{Tuy} , vers la fin de la propulsion, le terme dénominateur $[1 - (S_{Tuy} / S_L)^2]$ tend vers zéro : cela semble promettre une **Vitesse d'Éjection** infiniment grande ¹⁰⁸ ...

D'ailleurs, dans la pratique de nos simulateurs *par pas de temps successifs*, cette situation $S_{Tuy} = S_L$ est bien systématiquement rencontrée !!

L'utilisation de ce terme correctif de numérateur $[1 - (S_{Tuy} / S_L)^2]$ rend donc impossible la simulation informatique de la Phase Propulsive... ¹⁰⁹

Il apparaît donc qu'il convient de prendre toute hypertrophie de la **Vitesse d'Éjection** pour l'indication que l'on est en train de quitter le domaine que l'on s'était assigné, à savoir l'application de l'équation de Bernoulli à un phénomène stationnaire... En dehors de ce domaine précis, la masse d'eau, dont la vitesse d'écoulement varie dans le temps ainsi que spatialement lorsqu'on se rapproche de la tuyère, développe des forces d'inertie qui doivent être prises en compte par l'utilisation de l'équation de Bernoulli généralisée aux écoulements instationnaires (voir notre texte *Montée en vitesse d'éjection d'une fusée à eau*, cité en fin de la présente étude).

RÉFÉRENCES ET LIENS :

Notre texte : [LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE](#) :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/la_fusee_en_vol_balistique7.doc

Notre texte : [MONTÉE EN VITESSE D'ÉJECTION D'UNE FUSÉE À EAU](#) :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/montee_v_eject.doc

Notre texte où est proposé une prise en compte du freinage atmosphérique, en additif à la fameuse formule de Tsiolkovski, et où est démontré l'insensibilité de cette formule aux changements de Débit massique : [AMENDEMENT ATMOSPHÉRIQUE À LA VITESSE DE TSIOLKOVSKI](#)

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/amendement_tsiolkovski.doc

¹⁰⁸ à un moment où la masse de la fusée est déjà très faible, ce qui augure d'accélération extrêmes...

¹⁰⁹ Du moins en stationnaire ; il faut alors passer à un calcul en instationnaire (voir notre texte : *Montée en vitesse d'éjection d'une fusée à eau*, cité en fin de la présente étude).

Notre texte [LA PARTIE CACHÉE DE LA FORCE](#) expliquant pourquoi la force de propulsion est $2PS_{Tuy}$ au lieu de la moitié PS_{Tuy} où l'on lit la poussée de l'air comprimé sur la partie opposée à la tuyère :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/part_cach_f.pdf

Tous ces textes sont consultables sur la page *Physique de la fusée* :

<http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm>

du site [Go Mars !](#) :

<http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/>

Le site d'Alain Juge et spécialement son texte "[Principes](#)" consacré à la propulsion de la fusée à eau :

<http://pagesperso-orange.fr/alain.juge/Francais/CadreFR.htm>

Les textes papiers d'un grand précurseur : Jean-Paul Soulard. Par exemple :

"LA FUSÉE A EAU, pratique, approche théorique, mesures"