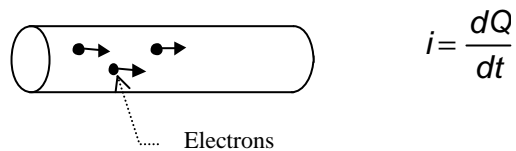


Propagation d'une onde dans un câble coaxial.

Présentation

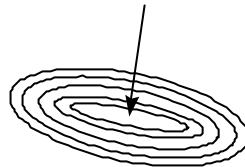
Comme nous l'avons vu précédemment, c'est la circulation des électrons dans un conducteur qui est à la base des lois régissant l'étude des circuits électriques. L'ensemble de ces lois est nommé électrocinétique.



Ces lois ainsi que les modèles équivalents utilisés, ne peuvent être employées que dans la limite de certaines fréquences. Au delà de cette fréquence, ce n'est plus la circulation des électrons dans le conducteur qui prédomine, mais la propagation des ondes et dans ce cas, les lois qui régissent les propriétés de ces ondes sont appelées électromagnétiques.

Il est possible de percevoir ce qu'est une onde en visualisant cette image simple d'un caillou tombant dans l'eau. Après l'impact, la surface de l'eau se déforme en dessinant des ondes concentriques se propageant du centre vers l'extérieur.

Lorsque ces ondes arrivent à l'extrémité du bassin ou rencontrent un obstacle, elles sont réfléchies et retournent vers leur point d'origine en s'interférant les unes avec les autres. Tant que l'énergie initiale du choc n'est pas entièrement estompée, ce phénomène continue.



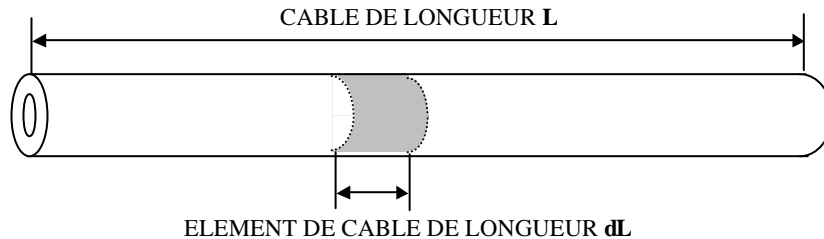
Revenons à l'électronique. Dans le cas d'une ligne de transmission, celle-ci est souvent considérée comme étant uniquement une source d'atténuation du signal électrique entre deux points.

Cette simplification n'est valide que dans le cas où la liaison est de type basses fréquences. En effet dans le cas où la fréquence du signal émis avoisine ou dépasse quelques Méga Hertz, le problème n'est plus le même : il s'agit en ce cas de l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques où la ligne de transmission devient le support d'une énergie appelée radiante.

Pour une liaison filaire entre un générateur et un récepteur, les fils servent de guide à ces ondes et c'est par l'espace extérieur que se transmet l'énergie. Les rayons électromagnétiques sont sensiblement parallèles aux câbles. Ceux passant par la surface du fil dissipent leur énergie par effet joule.

Modélisation d'une ligne

Soit une ligne de transmission de longueur L , réalisée par un câble coaxial.



En considérant un élément de longueur dL du câble, il est possible du point vue de la propagation, de modéliser un élément du câble par le quadripôle suivant.

Rappelons que ce modèle ne peut être utilisé que pour des fréquences inférieures à quelques Méga Hertz.

Avec :

- $L/2$ inductance **H/m**
- C capacitance **F/m**
- $R/2$ résistance **W/m**
- G conductance **S/m**

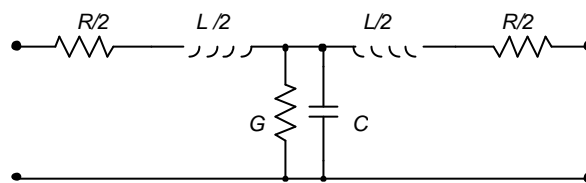
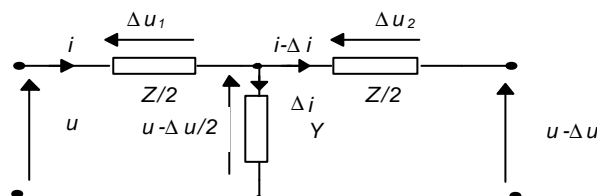


Figure 0.1 : Modèle du câble

Ce modèle est composé pour une unité de longueur dL , de deux résistances $R/2$ et de deux inductances $L/2$ ainsi qu'une conductance G en parallèle avec une capacité C .

Afin de comprendre le comportement de la ligne, il est indispensable d'écrire et analyser mathématiquement l'élément de quadripôle.

Soit $Z/2$ l'impédance composée de $R/2$ et de $L/2$ et Y l'impédance composée de C et de G dans l'élément de câble dL .



Sur le schéma ci-dessus, il apparaît que pour une unité de ligne dL , l'impédance Z génère une chute de tension (Δu) le long de la ligne et que l'admittance Y est source d'un courant (Δi) dans la branche parallèle.

Il est possible d'écrire :

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2$$

$$\Delta u_1 = i \times \left(\frac{Z}{2} \times dL \right) \quad \text{et} \quad \Delta u_2 = (i - \Delta i) \times \left(\frac{Z}{2} \times dL \right)$$

$$\text{donc} \quad \frac{\Delta u}{dL} = Z \times \left(i - \frac{\Delta i}{2} \right)$$

si $\Delta i \ll i$ alors

$$\frac{\Delta u}{dL} = Z \times i$$

et pour le courant l'équation devient :

$$\Delta i = Y \times dL (u - \frac{\Delta u}{2})$$

$$\text{comme} \quad \frac{\Delta u}{2} \ll u$$

$$\frac{\Delta i}{dL} = Y \times u$$

En écrivant ces équations sous forme d'équations différentielles :

$$\frac{du}{dL} = Zi \quad \text{et} \quad \frac{di}{dL} = Yu$$

$$\text{donc} \quad \frac{d^2 u}{dL^2} = Z \times \frac{di}{dL}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dL^2} = ZYu \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 i}{dL^2} = ZYi}$$

Pour la suite du calcul nous prendrons $ZY = \gamma^2$.

Rappels mathématiques : la solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants est : $y = Ae^{u^1 x} + Be^{u^2 x}$. Les termes en u^i sont des constantes racines de l'équation caractéristique.

Donc la solution générale de l'équation de propagation $\frac{d^2 u}{dL^2} - \gamma^2 u = 0$ (1) est :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_1 e^{-\gamma L} + \mathbf{K}_2 e^{+\gamma L} \quad (2)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{i} = \mathbf{K}_3 e^{-\gamma L} + \mathbf{K}_4 e^{+\gamma L} \quad (2')$$

Comme Z et Y sont des variables complexes $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY}$ ce qui donne :

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{K}_1 \cdot e^{-(\alpha + j\beta)L} + \mathbf{K}_2 \cdot e^{(\alpha + j\beta)L}} \quad (3)$$

Après transformation, l'expression devient : $\mathbf{u} = \mathbf{K}_1 (e^{-\alpha} \cdot e^{-j\beta}) + \mathbf{K}_2 (e^{\alpha} \cdot e^{j\beta})$ avec :

- $e^{-\alpha}$ et e^{α} exprimant l'atténuation dans la ligne,
- $e^{-j\beta}$ et $e^{j\beta}$ exprimant un retard.

Les constantes K_1 et K_2 homogènes à une tension, sont fonction d'une part de l'endroit où l'on observe le signal et d'autre part des caractéristiques des impédances de source et de charge.

A la suite il est possible de calculer le courant i :

$$\frac{du}{dL} = Zi$$

En dérivant l'équation (2) :

$$Zi = -\gamma K_1 e^{-\gamma L} + \gamma K_2 e^{+\gamma L}$$

donc

$$i = \frac{\gamma}{Z} (-K_2 e^{-\gamma L} + K_1 e^{+\gamma L})$$

Ondes :

Il apparaît donc à partir de l'analyse de l'équation (3) $u = K_1 e^{-gL} + K_2 e^{+gL}$ que la tension u peut être décomposée en deux tensions telles que :

$$u = u_i + u_r.$$

Du point de vue de la propagation, ces deux tensions u_i et u_r correspondent dans une ligne à deux ondes opposées : une onde incidente u_i et une onde réfléchie u_r .

L'onde appelée incidente va de l'émetteur vers le récepteur (la charge) puis, cette onde est réfléchie par la charge et retourne vers la source :

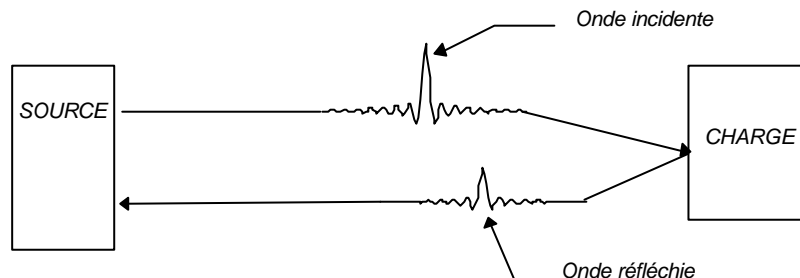


Figure 0.2 : Propagation d'une onde.

En fonction de la charge, l'onde réfléchie est plus ou moins intense. Cette onde réfléchie perturbe l'onde incidente.

1.1.1 Rôle et détermination des paramètres a et b.

La variable g est définie par l'expression complexe suivante : $\gamma = \sqrt{ZY}$. Donc à partir du modèle du câble et pour une longueur dL la valeur de g devient :

$$\gamma = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} = \alpha + j\beta \quad (4)$$

Il est possible de définir les valeurs de a et b tel que :

$$\bullet \alpha = \text{Re}(\sqrt{ZY}) = \text{Re}(\sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)})$$

Correspondant à l'affaiblissement du câble

$$\bullet \beta = \text{Im}(\sqrt{ZY}) = \text{Im}(\sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)})$$

Correspondant à la constante de phase.

A propos d'a :

a est dans certains cas exprimé en **Np** (Neper), mais le plus souvent l'atténuation est exprimée en **dB** tel que :

$$\text{Atténuation (dB)} = 20 \cdot \text{Log} \cdot e^a = 8,69 \cdot a$$

(Remarque mathématiques $20 \cdot \text{Log}(e^x) = 8,69 \cdot x$).

Les courbes théoriques suivantes représentent l'atténuation en dB pour une ligne de 20 mètres et de 100 mètres.

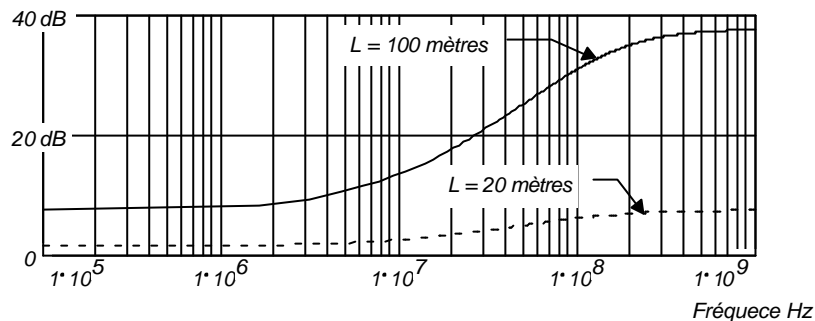


Figure 0.3 : Atténuation sur une ligne.

Si a = 0. Dans le cas d'une étude théorique, on considère souvent que la ligne n'a pas de perte, en ce cas l'expression de $\gamma = \alpha + j\beta$ donne uniquement : $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$.

S'il n'y a pas d'atténuation dans la ligne, l'équation (3) prend la forme suivante $u(p) = K_1 \cdot e^{tp} + K_2 \cdot e^{-tp}$ et seules les constantes de propagation sont à considérer.

Si LG = RC. Dans le cas où la technologie du câble permet de s'approcher de l'égalité $LG = RC$, il y a simplification de l'expression (4) de a et b tel que :

$$\alpha = \sqrt{RG} \quad \text{et} \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

En ce cas a est :

- indépendant de la fréquence.
- proportionnel à la longueur de la ligne ou câble.

S'il est agréable en théorie de prendre a indépendant de la fréquence, il est indispensable de vérifier que la réalité est toute autre. En effet l'atténuation d'un câble croît avec la fréquence. Elle est d'environ 0,03dB par mètre pour 100 MHz.

Le graphique ci-dessous représente une courbe issue des caractéristiques constructeur où l'atténuation sur la ligne est de -63 dB à une fréquence de 3 GHz pour un câble de 100 mètres (câble de référence RG 214 et RG 220) :

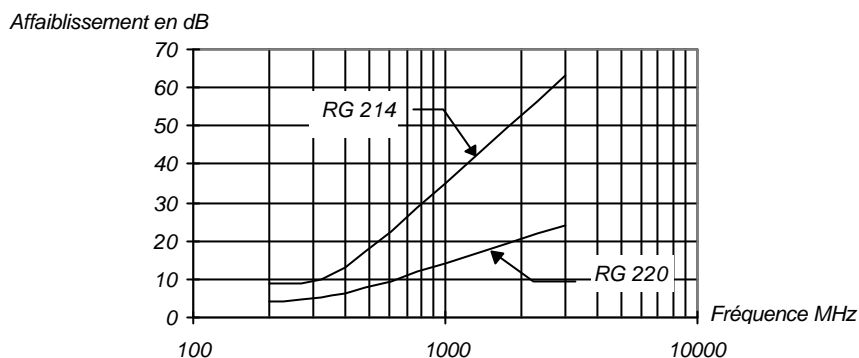


Figure 0.4 : Affaiblissement dans un câble.

Il est évident à la lecture du graphe ci-dessus, que l'utilisation d'un câble coaxial devient impossible pour de grandes longueurs et à des fréquences élevées.

A propos de b :

Le coefficient b issu du calcul de $g = a + jb$ est appelé constante de phase. Tel que le présente le graphe suivant, ce coefficient suit une loi de variation linéaire en fonction de la fréquence (ou ω) et de la longueur du câble (L).

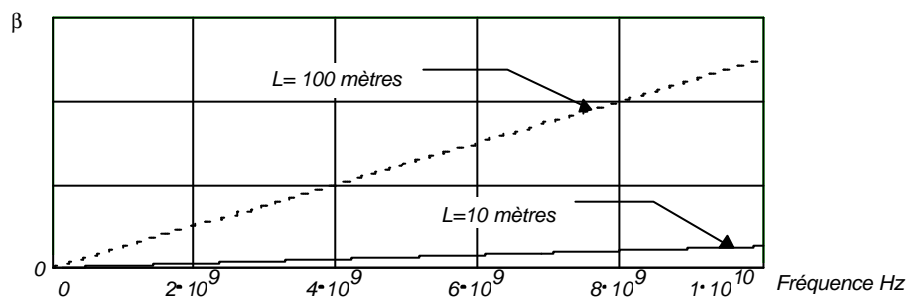


Figure 0.5 : Variation du coefficient β en fonction de la longueur de la ligne.

Il est possible d'exprimer b sous la forme suivante : $b = \omega t$.

Si l'on considère uniquement les termes en e^{jb} de l'équation (3), $e^{jb} = e^{j\omega t}$. Ils deviennent e^{tP} lorsqu'ils sont exprimés par les transformées de Laplace. Il est donc possible d'identifier e^{-tP} à un retard ou un temps de propagation le long de la ligne.

En ce cas le terme t devient la constante de propagation du câble par unité de longueur.

Ce retard dans la ligne est proportionnel :

- au temps de propagation t
- à la fréquence de la ligne $f(\text{Hz})$
- à la longueur de la ligne L .

Impédance caractéristique :

Pour définir l'impédance caractéristique, revenons à l'expression du courant :

$$i = \frac{\gamma}{Z} (-K_2 e^{-\gamma L} + K_1 e^{+\gamma L}) \quad (5)$$

Le rapport $\frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$, est homogène à une conductance en Ohm^{-1} .

Le rapport inverse définit une impédance $Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ exprimée en Ohms.

$$\text{donc : } i = \frac{K_1 e^{+\gamma L} - K_2 e^{-\gamma L}}{Z_c}$$

Cette impédance est appelée l'**impédance caractéristique** de la ligne.

Si la valeur de **R** et de **G** est négligeable devant les impédances de **L** et de **C**, l'équation de **Z_c** devient :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

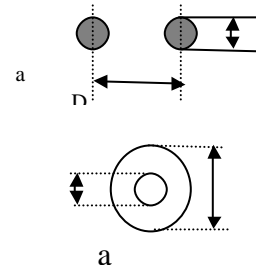
Cette valeur de **Z_c** est réelle et devient en théorie indépendante de la fréquence. C'est une constante du câble donnée par le constructeur.

Les valeurs proposées par les constructeurs sont souvent 50Ω ou 75Ω . Ces valeurs de l'impédance **Z_c** sont imposées par des contraintes technologiques : d'une part par les dimensions des conducteurs : diamètre et distance entre les conducteurs, et d'autre part par les isolants employés pour séparer les deux conducteurs : **μr** (perméabilité relative) et **εr** (permittivité relative) dans la fabrication du câble :

Exemple :

$$\text{Ligne bifilaire : } Z_c = 276 \sqrt{\frac{\mu r}{\epsilon r}} \text{Log} \frac{2D}{a}$$

$$\text{Câble coaxial : } Z_c = 138 \sqrt{\frac{\mu r}{\epsilon r}} \text{Log} \frac{D}{a}$$



1.1.2 Impédance caractéristique et l'impédance d'entrée :

L'impédance d'entrée de la ligne a pour équation :

$$Z_e = \frac{V_o}{I_o}$$

La tension **V_o** et le courant **I_o** correspond aux valeurs en début de ligne. Afin de déterminer ces valeurs revenons aux équations suivantes :

$$u = K_1 e^{-\gamma L} + K_2 e^{+\gamma L}$$

$$i = \frac{1}{Z_c} (-K_2 e^{-\gamma L} + K_1 e^{+\gamma L})$$

En fixant $L=0$, il est possible d'obtenir **V_o** et **I_o**. Ce qui donne après transformation par la formule d'Euler ($e^{-jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$) :

$$V_o = K_1 + K_2 \text{ et } I_o = K_2 - K_1.$$

En partant de l'extrémité de la ligne et en considérant une charge $Z_r = V_r / I_r$, la tension **V_o** et le courant **I_o** prennent les valeurs suivantes :

$$V_o = V_r \cdot \cos(\gamma L) + j Z_c \cdot I_r \cdot \sin(\gamma L)$$

$$I_o = I_r \cos(\gamma.L) + j(V_r/Z_c) \sin(\gamma.L)$$

D'où il est possible d'extraire Z_e :

$$Z_e = Z_c \left(\frac{Z_r + jZ_c \operatorname{tg}(\beta.L)}{Z_c + jZ_r \operatorname{tg}(\beta.L)} \right)$$

Analyse de Z_e : De cette formule il apparaît que l'impédance d'entrée n'est pas constante. Elle est fonction des impédances Z_c et Z_r d'une part et de la longueur de la ligne d'autre part.

Il est donc intéressant d'envisager trois cas remarquables si :

- $Z_c = Z_r$ ligne adaptée
- $Z_r = 0$ ligne en court circuit
- $Z_r = \infty$ ligne ouverte.

Pour ces trois cas particuliers, Z_e a pour équation :

$Z_r = 0$	$Z_r = Z_c$	$Z_r = \infty$
$Z_e = j.Z_c \operatorname{tg}(\beta.L)$	$Z_e = Z_c$	$Z_e = -j \frac{Z_c}{\operatorname{tg}(\beta.L)}$
Z_e : imaginaire pure	Z_e = impédance caractéristique.	Z_e : imaginaire pure

Coefficient de réflexion r .

Nous savons que la tension u en un point de la ligne est la somme d'une tension incidente et d'une tension réfléchie : $u = u_i + u_r$. De l'équation (5), il est possible d'écrire que $Z_c.i = u_i - u_r$.

De ces deux équations les tensions u_i et u_r , peuvent être données en fonction de Z_c et de I :

$$u_i = \frac{V + Z_c.I}{2}$$

$$u_r = \frac{V - Z_c.I}{2}$$

Lorsque la ligne aboutit sur une charge, il y a réflexion. En fonction de la charge, la réflexion est plus ou moins intense. On définit donc un coefficient de réflexion noté r correspondant au rapport entre l'onde réfléchie et l'onde incidente :

$$\rho = \frac{u_r}{u_i} \quad \text{donc} \quad \rho = \frac{V - Z_c.I}{V + Z_c.I}$$

Le but de la ligne consiste à fournir de l'énergie à la charge Z_R . Cette charge est soumise à une tension V liée à un courant I par la loi d'Ohm.

En ce cas, il est possible d'exprimer le coefficient r sous la forme suivante :

$$\rho = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

En considérant cette formule, nous voyons que la valeur de r est directement fonction de la valeur de Z . En effet il est possible de définir trois cas remarquables :

- Si $Z = Z_c$: En ce cas, il n'y a pas de réflexion, car $r = 0$, donc $u_r = 0$.

- Si $Z = 0$: le coefficient r devient négatif donc la tension de réflexion est en opposition de phase par rapport à u_i : $u_r = -u_i$.
- Si $Z = \infty$: la valeur de r est égale à l'unité. Il y a une tension de réflexion u_r telle que $u_r = u_i$.

Evolution des ondes dans un circuit.

A partir de l'ensemble de l'étude précédente, il est possible intuitivement, de percevoir l'évolution d'une tension parcourant un circuit.

Pour cela nous allons prendre un circuit minimale, composé d'un générateur (E_G et Z_G), d'une ligne d'impédance caractéristique Z_C et d'une charge Z_R tel que le représente le schéma suivant :

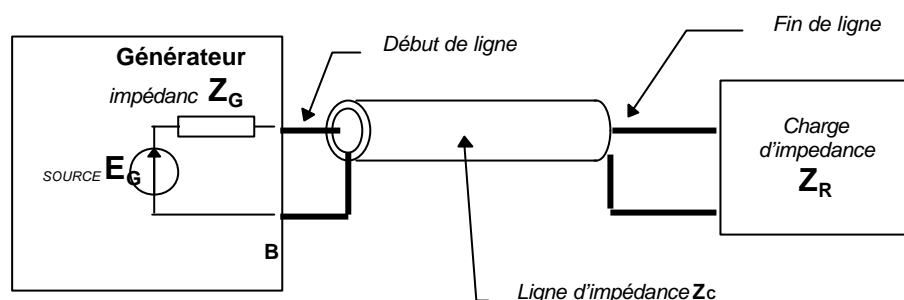
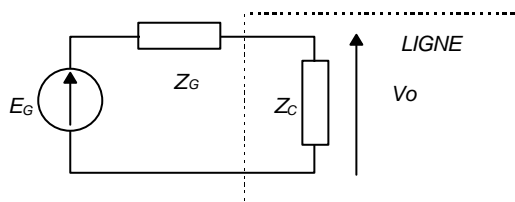


Figure 0.6 : Schéma d'une ligne.

Pour comprendre l'évolution des tensions dans l'ensemble du circuit, le générateur E_G sera source d'une tension en forme d'échelon de type Heaviside. Cette tension d'entrée se propage dans le circuit et subit des atténuations, des retards qu'il est possible d'analyser étapes par étapes.

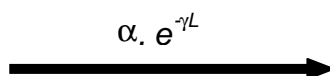
Pour bien comprendre le phénomène, il ne faut pas oublier que ces différentes étapes se déroulent successivement dans le temps.

1^{ère} étape : Au temps t_0 , le générateur "voit" le circuit suivant dans lequel la ligne "vue" de l'entrée se limite à son impédance Z_C :

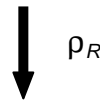


$$\text{donc : } V_0 = E_G \cdot \frac{Z_C}{Z_G + Z_C}$$

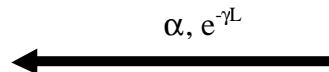
2^{ème} étape : Puis cette tension V_0 , devient la tension incidente u_i . Elle se propage dans la ligne en subissant une atténuation α et un retard $e^{-\gamma L}$. La flèche ci-dessous représente cette propagation de u_i dans la ligne.



3^oétape : Arrivée au niveau de la charge, la tension **ui** retardée et atténuée, se réfléchit dans la charge et génère la tension réfléchie **ur**. Cette tension **ur** a pour équation : $\mathbf{ur} = r_R \cdot \mathbf{ui}$ dans laquelle le coefficient de réflexion r_R a pour équation : $r_R = (Z_R - Z_c) / (Z_R + Z_c)$.



4^oétape : La tension réfléchie **ur** retourne vers le début de la ligne en subissant une atténuation et un retard.



5^oétape : Au niveau du début de la ligne, l'onde réfléchie est de nouveau réfléchie par l'impédance du générateur mais avec un nouveau coefficient de réflexion r_G qui a pour valeur : $r_G = (Z_G - Z_c) / (Z_G + Z_c)$.



6^oétape : Cette onde retourne en fin de ligne tout en subissant d'une manière répétitive les phénomènes de retard et de réflexion en aller et retour de ligne.

7^oétape : Calcul de la tension en un point de la ligne. Comme $\mathbf{u} = \mathbf{ui} + \mathbf{ur}$, pour connaître la tension il faut donc additionner au point désiré l'ensemble de la tension incidente et des multiples tensions réfléchies.

Le bilan des tensions peut donc être représenté par le schéma suivant dans lequel seuls les coefficients de réflexion et les retards sont considérés, car pour simplifier, l'atténuation α est nulle.

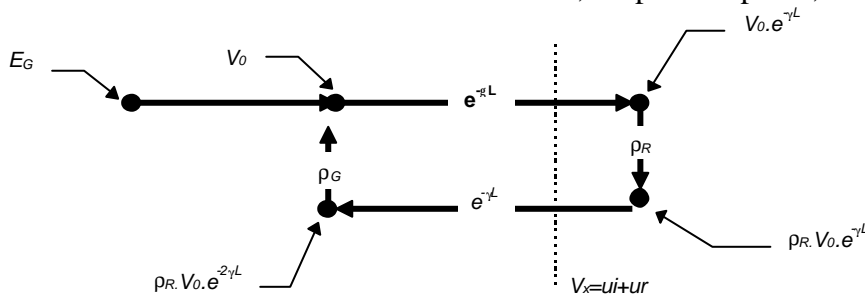


Figure 0.7 : Cheminement des tension le long de la ligne.

En résumé , il est possible d'exprimer la tension en un point **x** d'une ligne de longueur **L** par l'équation suivante :

$$V_x = V_0 (e^{-\gamma x} + \rho_R \cdot e^{-\gamma(2L-x)} + \rho_R \cdot \rho_G \cdot e^{-\gamma(2L+x)} + \rho_R \cdot \rho_G \cdot e^{-\gamma(4L-x)} + \dots)$$

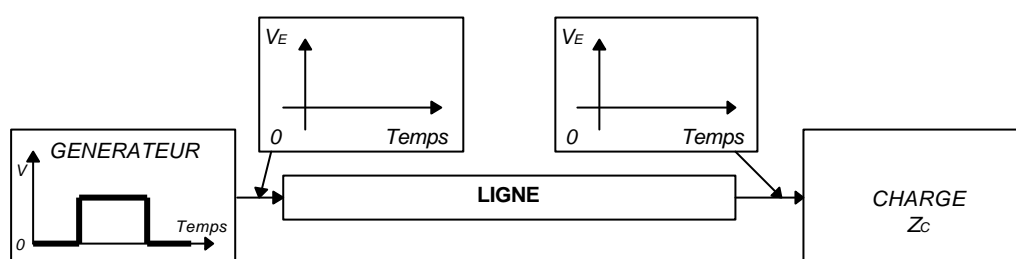
1.1.3 Représentation temporelle des tensions.

Si nous reprenons le circuit minimale composé d'une source, d'une ligne et d'une charge en fin de ligne, nous avons vu précédemment que la charge en fin de ligne avait une grande influence sur le signal réfléchi donc sur la "forme" des signaux.

Dans la suite de l'étude, nous proposons de représenter les chronogrammes en début et en fin de ligne pour les trois cas particuliers de charge :

- Ligne adaptée $Z_C = Z_R$
- La charge Z_R est infinie (ligne ouverte)
- La charge est nulle (ligne en court circuit)

Les points de visualisation des tensions sont les suivants : tension en début de ligne et en fin de ligne lorsque le générateur délivre une tension en forme de créneau d'amplitude de 1 Volt.



• 1° : Si $Z_R = Z_C$

En ce cas $r = 0$, il n'y a donc pas de réflexion dans la ligne. Toute l'énergie transmise en début de ligne est absorbée par la charge mais retardée du temps de propagation. La tension en fin de ligne correspond à l'équation suivante : $V_S = V_E \times e^{-\gamma x}$.

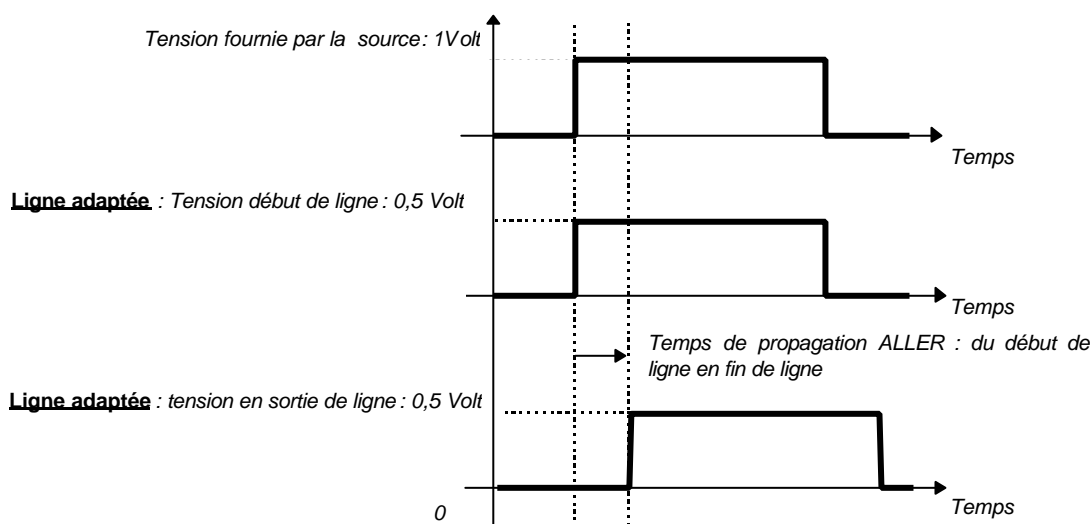


Figure 0.8 : Représentation des tensions si $Z_R = Z_C$.

• 2° : Si $Z_R = \infty$.

En ce cas, la ligne est ouverte. Le coefficient de réflexion prend la valeur +1. C'est à dire que l'onde réfléchi a même amplitude et phase que l'onde incidente.

L'onde réfléchi retourne en début de ligne en un temps correspondant à 2 fois le temps de propagation et s'additionne avec l'onde incidente. La tension en fin de ligne devient : $V_x = V_0(e^{-\gamma x} + e^{-\gamma(2L-x)} + \dots)$.

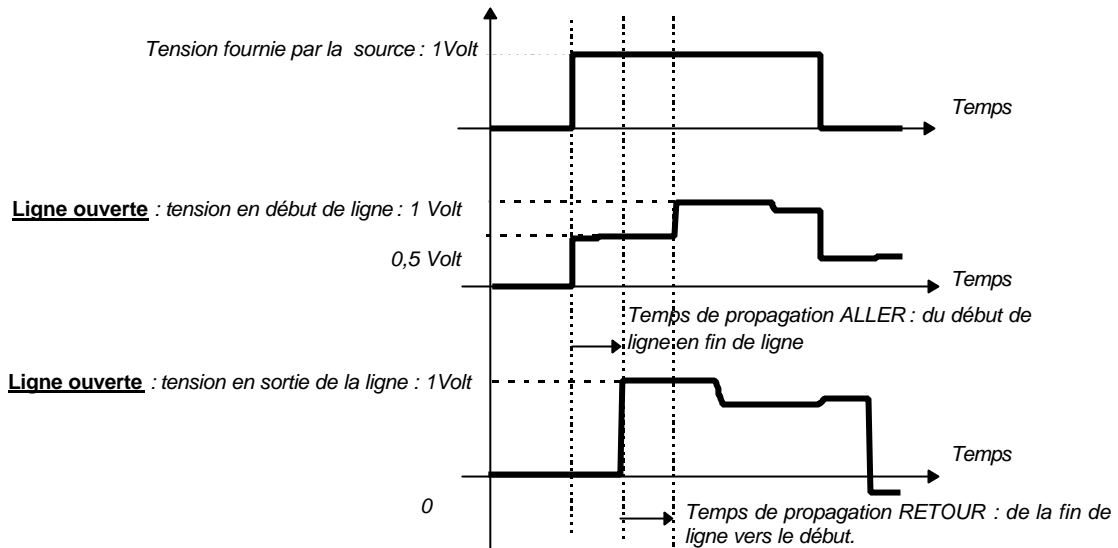


Figure 0.9 : Représentation des tensions si $Z_R = \infty$.

• **3° : Si $Z_R = 0$.**

Cela correspond à un court circuit de la ligne. Le calcul du coefficient de réflexion donne -1 . Les deux ondes sont en opposition de phase. Il y a création d'ondes stationnaires dans la ligne. La tension de sortie est nulle, l'onde réfléchie retourne intégralement vers la source mais en opposition de phase et s'oppose à l'onde incidente. La tension en un point x de la ligne devient : $V_x = V_0(e^{-\gamma x} - e^{\gamma(2L-x)} + \dots)$.

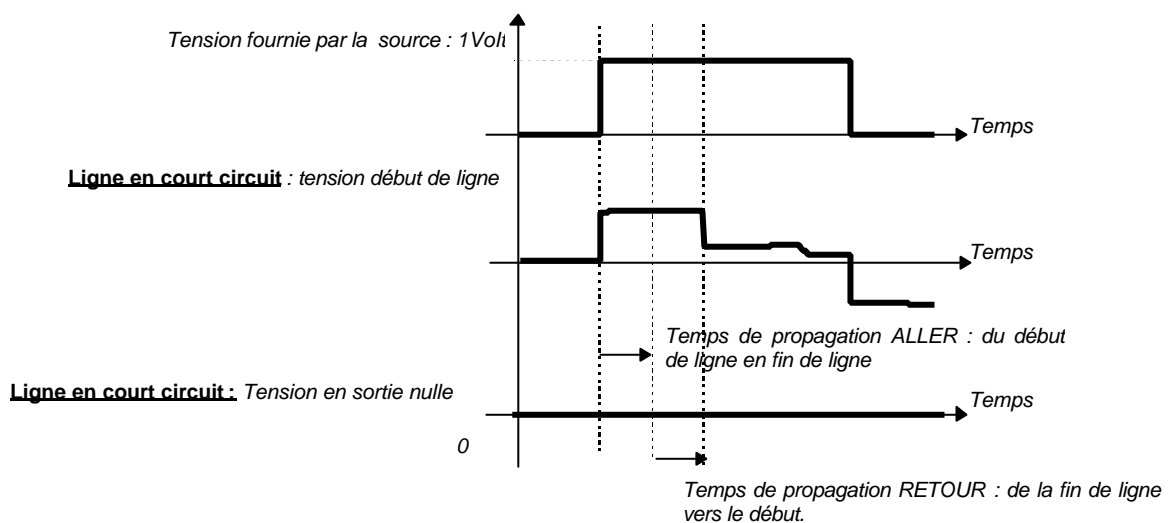


Figure 0.10 : Représentation des tensions si $Z_R = 0$.

Etude fréquentielle

Les courbes présentées précédemment montrent l'influence de la fréquence sur la valeur du coefficient d'atténuation α . Le phénomène de réflexion n'est pas sans influence sur la bande passante de la ligne. En effet la combinaison de l'onde incidente et l'onde réfléchie génère des interférences observables par l'apparition d'ondes stationnaires dans la ligne.

Il est donc intéressant de visualiser la bande passante d'une ligne dans les deux cas suivants :

- Ligne adaptée avec $Z_c = Z_R$
- Ligne désadaptée avec $Z_R = \infty$ (ligne ouverte).

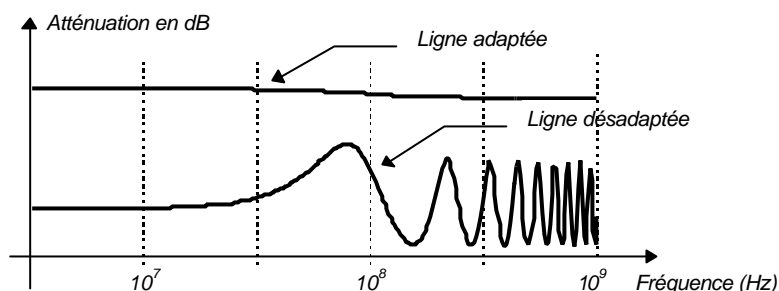


Figure 0.11 : Atténuation de la tension de sortie.

Il est évident que dans le cas d'une ligne désadaptée, l'allure de la courbe est fonction des caractéristiques du câble, des impédances de source et de charge ainsi que de la longueur de la ligne.

Caractéristiques des câbles :

Les paramètres des câbles coaxiaux sont :

- L'impédance caractéristique
- L'affaiblissement en dB/100m à une fréquence en MHz
- La capacité parallèle en Pico Farads/m.

Exemple :

Câble RG 214U :	Câble RG 220U :
$Z_c = 50$ ohms	$Z_c = 50$ ohms
atténuation : <ul style="list-style-type: none"> • 9 dB/100 m à 200 MHz • 13 db/100 m à 400 mhz • 63 db/100 m à 3000 MHZ 	atténuation : <ul style="list-style-type: none"> • 4 dB/100 m à 200 MHz • 6,5 db/100 m à 400 MHz • 24 db/100 m à 3000 MHZ
capacité : 106 pF/m.	capacité : 106 pF/m.

Il faut remarquer que l'atténuation exprimée en dB/m si elle est convertie en Volts par km, présente une atténuation exponentielle en fonction de la longueur.