Algèbre linéaire

1 Pivot de Gauss et variations

Télécharger les fonctions utiles sur mon site web (notamment le code du pivot ci-dessous).

L'algorithme du pivot de Gauss. On rappelle l'algorithme du pivot de Gauss :

Algorithme 1 : Pivot de Gauss

Entrées : Une matrice A de taille $n \times n$, un vecteur Y
Sortie : La solution du système $AX = Y$, si le pivot se déroule bien
pour chaque i *allant de* 0 *à* $n-1$ **faire**
  $j \leftarrow$ indice_pivot(A,i);
  si $j \neq i$ **alors**
    echange_ligne(A, i, j);
    echange_ligne(Y, i, j)
  pour chaque j *allant de* $i+1$ *à* $n-1$ **faire**
    $\mu \leftarrow -A[j][i]/A[i][i]$;
    transvection(A, j, i, μ);
    transvection(Y, j, i, μ)
$X \leftarrow$ vecteur nul de taille n;
pour chaque i *allant de* $n-1$ *à* 0 *par pas de* -1 **faire**
  $x_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{i,j}x_j)$
Renvoyer X

La fonction `indice_pivot(A,i)` prend en entrée une matrice A et un indice i, et renvoie l'indice de la ligne du plus grand coefficient en valeur absolue parmi les éléments situés en dessous de $a_{i,i}$ (compris). En mathématiques on testerait si $a_{i,i}$ est nul avant de procéder à un échange de lignes éventuel, en informatique il ne faut pas : si $a_{i,i}$ est très petit mais non nul, on introduit d'énormes erreurs en le prenant comme pivot. On préfère prendre le plus grand en valeur absolue. La fonction `echange_lignes` parle d'elle même, et `transection(A,j,i,mu)` réalise l'opération $L_j \leftarrow L_j + \mu \cdot L_i$ sur la matrice A. L'idée du pivot est de mettre la matrice sous forme triangulaire supérieure, puis de procéder à une phase de remontée pour calculer la solution de $AX = Y$.

On travaille avec une représentation sous forme de liste de listes : si `A` est une matrice, `A[i]` est la i-ème ligne, dont les éléments sont les `A[i][j]`. De même, un vecteur est vu comme une matrice $n \times 1$, et est donc représenté par une liste de listes à 1 élément.

Exercice 1. *Complexité du pivot.* Rappeler/retrouver la complexité du pivot de Gauss

Exercice 2. *Variation.* Que pensez-vous de la complexité du calcul du déterminant via une fonction récursive appliquant le développement par rapport à une ligne/colonne ? Modifier l'algorithme du pivot pour obtenir :

1. une fonction qui calcule le déterminant d'une matrice (rappel : un échange de lignes multiplie le déterminant d'une matrice par -1, une transvection ne le modifie pas).
2. une fonction qui calcule l'inverse d'une matrice (rappel : effectuer des opérations sur les lignes d'une matrice revient à la multiplier à gauche par des matrices élémentaires. Si on se débrouille pour transformer A en l'identité, cela revient à construire une matrice P telle que $PA = I_n$. Appliquer les mêmes opérations sur une matrice initialement égale à I_n mène à $P = A^{-1}$).

Vérifier vos fonctions à l'aide des fonctions fournies et Numpy (voir page suivante). Vérifier que la complexité est la même que celle du pivot.

```
>>> M=tri_diag(4)
>>> determinant(M)
55.0
>>> alg.det(M)
55.000000000000014
>>> np.array(inverse(M))
array([[ 0.38181818,  0.14545455,  0.05454545,  0.01818182],
       [ 0.14545455,  0.43636364,  0.16363636,  0.05454545],
       [ 0.05454545,  0.16363636,  0.43636364,  0.14545455],
       [ 0.01818182,  0.05454545,  0.14545455,  0.38181818]])
>>> alg.inv(M)
array([[ 0.38181818,  0.14545455,  0.05454545,  0.01818182],
       [ 0.14545455,  0.43636364,  0.16363636,  0.05454545],
       [ 0.05454545,  0.16363636,  0.43636364,  0.14545455],
       [ 0.01818182,  0.05454545,  0.14545455,  0.38181818]])
```

2 Résolutions particulières.

On donne ici quelques idées sur d'autres méthodes de résolution. L'idée est en général d'aller plus vite que la complexité du pivot de Gauss, quitte à sacrifier un peu l'exactitude de la solution. On travaille avec des tableaux Numpy dans la suite.

Exercice 3. *Méthode de Jacobi.* On se donne une matrice A à *diagonale dominante*, c'est à dire que $A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1}$ vérifie $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ (une telle matrice est classiquement inversible). On décompose A sous la forme $D + H$, avec D la matrice diagonale constituée des coefficients diagonaux de A et H la matrice à coefficients diagonaux nuls égale à $A - D$. D étant inversible (c'est évident), le système $Ax = y$ s'écrit $Dx = y - Hx$ soit encore $x = D^{-1}(y - Hx)$. La méthode de Jacobi consiste à partir d'un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (absolument quelconque, par exemple 0) et itérer à partir de x_0 la fonction $f : z \mapsto D^{-1}y - D^{-1}Hz$. On pose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi obtenue, dont on peut montrer qu'elle converge vers x, solution de $Ax = y$. Remarquez que :

— l'inverse de D n'est pas coûteux à calculer car D est diagonale ;

— le produit d'une matrice $n \times n$ et d'un vecteur a une complexité $O(n^2)$. Si le nombre d'étapes effectuées par la méthode de Jacobi est faible par rapport à n, on obtient une meilleure complexité que l'algorithme du pivot de Gauss (mais la solution n'est qu'approchée).

1. On pose $M = \max\limits_{0\leq i\leq n-1} \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Comme A est à diagonale dominante, $M < 1$. On admet [1] que la fonction f est M-lipschitzienne, pour la norme infinie définie par $\|(y_i)_{0\leq i<n-1}\|_\infty = \max |y_i|$, ce qui implique [2] que $\|x - x_k\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \|x_0 - x_1\|_\infty$. En déduire une estimation du nombre d'étapes à effectuer dans la méthode de Jacobi, si l'on vise une précision de ε sur chaque coefficient de x.

2. Écrire une fonction `couple(A)` renvoyant le couple (D^{-1}, H) de matrices associées à A sous forme de tableaux Numpy. On partira de deux tableaux `np.zeros((n,n))` qu'on remplira comme il se doit (la matrice D^{-1} se calcule facilement : ses coefficients sont les inverses des éléments digonaux de A).

3. Écrire une fonction donnant la norme infinie du vecteur passé en paramètre.

4. Implémenter effectivement une fonction `jacobi(A,Y,eps)` en Python (on commencera avec x_0 égal au vecteur nul, `np.zeros(n)`). La fonction `np.dot` donne le produit matriciel.

5. Quelle est sa complexité, en fonction de ε et de n ?

```
>>> A=tri_diag(4)
>>> Y=np.zeros(4) ; Y[0]=1
>>> jacobi(A,Y,10**-3) #17 est le nombre d'étapes effectuées
17
array([ 0.38181624,  0.14545285,  0.05454232,  0.01818077])
>>> alg.solve(A,Y)
array([ 0.38181818,  0.14545455,  0.05454545,  0.01818182])
```

Exercice 4. *Calcul de la valeur propre de plus grand module.* Dans cet exercice, on utilise la norme 2 (euclidienne), définie comme suit : $\|(x_i)_{0\leq i<n}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}$. On suppose que la matrice $A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1}$ possède une unique

1. Ceci se vérifie facilement.
2. Cela aussi n'est pas trop dur à montrer.

valeur propre de module maximal, de multiplicité 1. On définit les suites suivantes, en partant d'un vecteur x_0 arbitraire (on pourra le choisir au hasard) et $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2}$:

$$\begin{cases} x_k = Ay_{k-1} \\ y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2} \\ \lambda_k = {}^t y_k A y_k \end{cases}$$

On peut montrer que pour « presque tout » x_0 initial, $(\lambda)_k$ converge vers la valeur propre de module maximal, et (y_k) vers un vecteur propre associé, de norme 1.

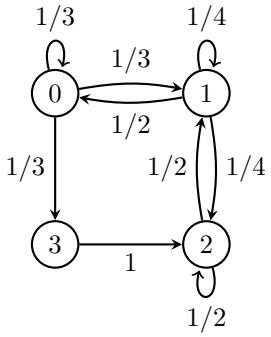
Programmer le calcul de cette suite sous la forme d'une fonction `vp(A,eps)`. On prendra comme vecteur initial x_0 un vecteur choisi aléatoirement, et comme condition d'arrêt $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < \varepsilon$, et on renverra la valeur λ_k et le vecteur y_k obtenus.

Comparer avec `alg.eig` qui renvoie valeurs et vecteurs propres (ces derniers sous la forme de la matrice des vecteurs propres).

```
>>> A=tri_diag(4)
>>> vp(A,10**-3)
(4.6170266970284484, array([-0.34993929,  0.59213796, -0.6130905 ,  0.38863243]))
>>> alg.eigvals(A) #la vp de module maximal est bien 4.61...
array([ 1.38196601,  2.38196601,  4.61803399,  3.61803399])
```

3 Ballades sur un graphe et théorème de Perron-Frobenius

Un graphe orienté est un couple (V, E) où les éléments de V sont appelés sommets et les éléments de $E \subseteq V^2$ sont appelés des arcs. On considère une marche aléatoire sur ce graphe : on part d'un sommet initial v_0, et à chaque étape, si l'on se situe au sommet v_i on se dirige vers l'un des voisins v_j de v_i (l'un des v tels que $(v_i, v) \in E$) avec une certaine probabilité $p_{i,j}$ ne dépendant que de v_i et v_j (i.e indépendante du parcours effectué précédemment). Formellement, on numérote les sommets de 0 à $n-1$ et on représente le graphe par une matrice de taille $n \times n$ dont les éléments sont les $p_{i,j}$. Cette matrice est la matrice d'adjacence du graphe, et naturellement $\sum_{i=0}^{n-1} p_{i,j} = 1$ pour tout i : les lignes de la matrice sont toutes de somme 1. Une telle matrice est dite *stochastique*. L'exemple suivant montre un graphe et la matrice d'adjacence associée.



$$G = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 1. *Se diriger vers un nouveau sommet.* La fonction `random` du module du même nom fournit un réel aléatoire de l'intervalle $]0,1[$ (suivant la loi continue uniforme sur cet intervalle). Écrire une fonction `suivant(L)` prenant en entrée une liste `[`$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$`]` de probabilités de somme totale 1, et renvoyant l'élément $i \in [\![0, n-1]\!]$ avec la probabilité p_i. *Indication :* il est très commode de calculer d'abord les sommes cumulés `[`$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$`]`, avec $s_i = p_0 + \cdots + p_i$, de tirer x au hasard dans $[0,1[$ via `random()` et de renvoyer le premier indice i tel que $s_i \geq x$.

Remarque : on pourrait calculer ces sommes cumulées une seule fois, et procéder par recherche dichotomique à chaque étape, pour gagner en complexité.

```
>>> [suivant([0.3, 0.2, 0.5]) for i in range(20)]
[2, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2]
```

Question 2. *Ballade aléatoire.* Déduire de la fonction précédente une fonction `ballade(G,s,N)`, prenant en entrée

— le graphe, donné par sa matrice d'adjacence ;

— un sommet de départ $s \in [\![0, n-1]\!]$, si le graphe a n sommets ;

— un entier $N \geq 0$.

et réalisant une marche aléatoire à N étapes sur le graphe, la fonction renvoyant le sommet atteint à la fin. À l'étape i, on utilisera la fonction précédente sur `G[i]` pour savoir quel sommet visiter ensuite.

```
>>> [ballade(G,0,100) for i in range(20)]
[2, 0, 0, 1, 3, 0, 1, 1, 3, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]
```

Question 3. *Des statistiques*. Écrire une fonction `stats(G,N,M)` prenant en entrée deux entiers N et M et un graphe G, et effectuant M marches aléatoires de longueur N partant du sommet 0. La fonction renvoie une liste de somme 1, l'élément en case i étant la proportion de marches aléatoires de longueur N effectuées depuis le sommet 0 et ayant terminé au sommet numéro i. On testera avec $N = 200$ et $M = 1000$, par exemple.

```
>>> stats(G,200,1000)
[0.258, 0.316, 0.358, 0.068]
```

Question 4. *Théorème de Perron Frobenius*. Comparer avec le vecteur propre dont la somme des coefficients vaut 1, associé à la valeur propre 1 de la matrice ${}^tG$. On pourra utiliser à nouveau `alg.eig`, et `np.transpose` pour la transposée.

4 Annexe : rappels Numpy

— `np.zeros(n)` : crée un vecteur (ligne) à n composantes nulles.

— `np.zeros((n,m))` : crée une matrice à n lignes et m colonnes remplie de zéros ; marche aussi avec des dimensions supplémentaires.

— `np.array(L)` : convertir une liste en tableau Numpy. Si `L` est une liste de listes, on obtient une matrice, etc...

— Les opérations usuelles se font terme à terme sur les tableaux Numpy. Les opérations scalaires également, par exemple si `v` est un tableau Numpy, `2*v` est le tableau où toutes les entrées ont été multipliées par 2.

— `M.dot(N)`, `np.dot(M,N)` : produit matriciel de `M` par `N` (si dimensions compatibles). Remarque : si `M` est une matrice et `N` un vecteur ligne, le produit est le produit matrice-vecteur standard, le résultat est donné comme un vecteur ligne.

— `M.transpose()`, `np.transpose(M)` : copie transposée de `M`.

— `alg.det(M)` : déterminant de `M`.

— `alg.inv(M)` : inverse de `M`.

— `alg.matrix_power(M,n)` : calcule M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

— `alg.solve(M,Y)` : résolution de $MX = Y$.

— `alg.eigvals(M)` : valeurs propres de `M` (sous forme de tableau Numpy).

— `alg.eig(M)` : valeurs et vecteurs propres de `M`. Les vecteurs propres sont donnés sous la forme d'une matrice de passage. Avec `T,P=alg.eig(M)`, on a $M = PDP^{-1}$, avec D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont donnés par `T`, si M est diagonalisable. Attention : avec des flottants, les égalités ne sont vraies qu'à ε près...

— `np.random.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$. Avec un paramètre supplémentaire, on peut avoir un vecteur Numpy constitué d'entrées aléatoires :

```
>>> np.random.random(4)
array([ 0.3158855 ,  0.01930876,  0.57718712,  0.1082994 ])
```