

---

## TP : Séries de Fourier

---

### Introduction (inspiré de Wikipédia)

L'apparition de ce qu'on appelle aujourd'hui des séries de Fourier remonte au XVIII<sup>e</sup> siècle, dans l'ouvrage *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* de Brook Taylor (mathématicien anglais), paru en 1715. Cet ouvrage donne le coup d'envoi à l'étude systématique des cordes vibrantes et de la propagation du son, thème de recherche majeur pendant tout le siècle.

Une controverse éclate dans les années 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes. Brièvement, le problème est le suivant : une corde de longueur  $L$ , attachée le long de l'axe des abscisses à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , est tendue avec une force de tension  $T$ . On déforme la corde dans la direction des ordonnées, et on la lâche. Comment évolue la déformation  $y(x, t)$  au cours du temps ? L'équation de D'Alembert régissant cette déformation est  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , où  $v = \sqrt{T/\mu}$ , avec  $\mu$  la masse linéique de la corde.

- D'Alembert, qui a déterminé l'équation précédente, énonce que la solution générale est  $(t, x) \mapsto f(x - vt) + g(x + vt)$ , avec  $f$  et  $g$  deux fonctions quelconques.
- Bernoulli, qui obtient aussi l'équation précédente, montre que les fonctions (les modes propres) de la forme  $(t, x) \mapsto C \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi vt/L)$  pour  $n \geq 0$  et  $C$  une constante sont solutions, et il vérifie que toute combinaison linéaire de ces fonctions est encore solution.

La controverse porte sur la nécessité de concilier ces points de vue avec les questions de régularité des solutions. Peut-on écrire qu'une solution de l'équation des cordes vibrantes est de la forme  $(t, x) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi vt/L)$  ?

Le nom de Joseph Fourier est resté attaché aux séries trigonométriques, celui-ci étudie l'équation de la chaleur en 1807. Il expose les séries et la transformation de Fourier en 1822, mais son exposé contient des lacunes (il énonce notamment qu'une fonction périodique peut être décomposée en série de fonctions trigonométriques, jugeant toute hypothèse de continuité inutile).

À partir de 1829 avec Dirichlet, les mathématiciens posent des bases solides à la théorie. De Jordan, Riemann, Cantor, Féjer au XIX<sup>e</sup> siècle à Lebesgue, Fatou, Riesz, Fischer, Kolmogorov, Carleson et Kahane (et bien d'autres) au XX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens fournissent de nouveaux outils et obtiennent de nouveaux résultats, sur cette riche théorie.

## 1 Coefficients de Fourier

On considère l'espace vectoriel des fonctions  $T$ -périodiques et continue par morceaux, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $f$  une telle fonction, et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , on pose :

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{et pour } n \geq 1 : \quad a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

On va voir dans quelle condition on peut écrire  $f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)$ . Expliquons d'abord d'où viennent ces coefficients :

- Sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par les fonctions  $t \mapsto 1$ ,  $t \mapsto \cos(n\omega t)$ , et  $t \mapsto \sin(n\omega t)$  (pour  $n \geq 1$ ), l'application

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire. Les formules de linéarisation des produits trigonométriques (du style  $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ ) permettent de montrer que la famille génératrice est une famille orthogonale pour ce produit scalaire, et de vérifier que  $t \mapsto 1$  est de norme 1, alors que les fonctions  $t \mapsto \cos(n\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(n\omega t)$  sont de normes  $1/\sqrt{2}$ . Pour  $f$  une combinaison linéaire (finie !) d'éléments de cette famille, les formules données pour les  $a_i(f)$  et  $b_i(f)$  permettent de trouver les coefficients de la combinaison linéaire.

- Remarquons qu'on aurait aussi pu travailler avec des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Ici on est plutôt amené à considérer le produit scalaire (hermitien)  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$  et la famille génératrice  $t \mapsto e^{in\omega t}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , qui a le bon goût d'être orthonormée. Pour  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continue par morceaux, les coefficients de Fourier sont les  $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 1. Calculs de coefficients.** On rappelle que la fonction `quad` du module `scipy.integrate` permet d'intégrer une fonction réelle : si  $a$  et  $b$  sont deux réels et  $f$  une fonction, `quad(f, a, b)` renvoie un couple  $(v, e)$ , où  $v$  est une approximation de  $\int_a^b f$  et  $e$  une estimation de l'erreur  $|v - \int_a^b f|$ . En utilisant `quad`, écrire deux fonctions `A(N, T, f)` et `B(N, T, f)` fournissant respectivement  $(a_n(f))_{0 \leq n < N}$  et  $(b_n(f))_{0 \leq n < N}$  (on convient que  $b_0(f) = 0$ ), sous la forme de deux listes de taille  $N$ , avec  $f$  une fonction  $T$ -périodique.

**Exercice 2. Fonction créneau.** On considère la fonction créneau  $c$ , impaire, de période 1, telle que  $c$  est constante égale à 1 sur l'intervalle  $]0, 1/2[$ . Définir une telle fonction `creneau` en Python. Comme  $c$  est impaire, tous ses coefficients  $a_i(c)$  sont nuls. À l'aide de la fonction `B`, calculer les 100 premiers coefficients  $(b_n(c))_{0 \leq n < 100}$ . À l'aide de la fonction `bar` du module `matplotlib.pyplot`, tracer l'histogramme des 100 premiers coefficients de Fourier de la fonction créneau. Vérifier numériquement que

$$b_n(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 3. Fonction triangle.** On considère la fonction triangle  $t$ , continue, paire, de période 1, telle que  $t(0) = 1$ ,  $t(1/2) = -1$  et  $t$  affine sur l'intervalle  $[0, 1/2]$ . Définir une telle fonction `triangle` en Python. Comme  $t$  est paire, ses coefficients  $b_i(t)$  sont nuls. Reprendre la même étude qu'à la question précédente, avec les coefficients  $a_i(t)$ . Vérifier numériquement que

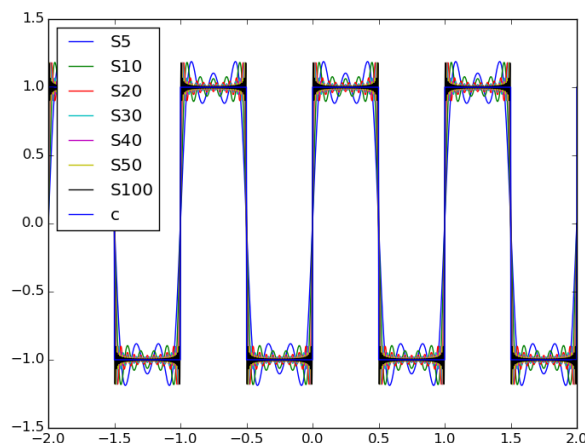
$$a_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2 Reconstruction à partir des coefficients de Fourier

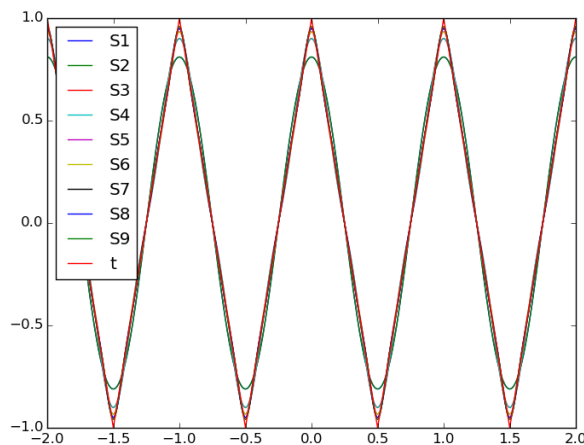
Dans la suite, on note  $S_n(f)$  la fonction  $x \mapsto a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x)$ , pour  $f$  une fonction  $T$ -périodique et  $\omega = 2\pi/T$ .

**Exercice 4. Reconstruction de fonction.** Écrire une fonction `S(La, Lb, T)` prenant en paramètre deux listes de coefficients  $[a_0, \dots, a_{n-1}]$  et  $[b_0, \dots, b_{n-1}]$  renvoyant la fonction  $S_{n-1}$ . On rappelle que l'on peut fort bien définir une fonction à l'intérieur d'une autre, et on pourra utiliser `sum` qui fait la somme des éléments d'une liste.

**Exercice 5.** À l'aide de la fonction `S` et des fonctions `A` et `B`, effectuer le tracé de  $S_5(c)$ ,  $S_{10}(c)$ ,  $S_{20}(c)$ ,  $S_{30}(c)$ ,  $S_{40}(c)$ ,  $S_{50}(c)$ ,  $S_{100}(c)$ , par exemple sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . On ne calculera qu'une fois les coefficients  $a_i$  et  $b_i$ .



**Exercice 6.** Faire de même avec la fonction triangle, on ne tracera que les sommes partielles  $(S_i(t))_{1 \leq i \leq 9}$ .



### 3 Égalité de Parseval, théorèmes de convergence

La section qui suit présente quelques résultats sur les séries de Fourier, utiles pour avoir une idée de la variation des coefficients, et pour préciser quand il est possible d'écrire que  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)$ . Les démonstrations sont admises, on donne seulement parfois des idées de preuve, que vous pouvez passer. Dans la suite, on se donne une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique, et continue par morceaux.

**Théorème 1** (Égalité de Parseval). Notons  $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}$ . Alors  $\|f\|_2^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$

*Démonstration.* On a déjà dit que la fonction constante  $t \mapsto 1$  et les fonctions  $t \mapsto \cos(n\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(n\omega t)$  forment une famille orthogonale dans l'ensemble des fonctions  $T$ -périodiques continues par morceaux, pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$ . La première fonction est de norme 1, les autres de norme  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . La fonction  $S_N(f) = t \mapsto a_0(f) + \sum_{k=1}^N a_k(f) \cos(k\omega t) + b_k(f) \sin(k\omega t)$  n'est autre que le *projeté orthogonal* de  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $T_N$  engendré par les fonctions trigonométriques intervenant dans la somme. Ainsi  $\|f\|_2^2 \geq a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + b_k^2$ , et on obtient une inégalité en faisant tendre  $N$  vers l'infini. Pour avoir l'égalité, on observe que le théorème de Pythagore donne  $\|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - f\|_2^2$ , et  $\|S_N(f) - f\|_2$  est la distance entre  $f$  et le sous-espace vectoriel  $T_N$ . Vous connaissez le théorème de Weierstrass d'approximation de fonctions continues sur un segment par des fonctions polynomiales, une variante de ce théorème permet de dire que pour une fonction  $f$  continue et  $T$ -périodique, il existe une suite  $(P_N)_N$ , avec  $P_N \in T_N$  pour tout  $N$ , telle que  $\|P_N - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,  $\|S_N(f) - f\|_2 \leq \|P_N(f) - f\|_2 \leq \|P_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Pour les fonctions seulement continues par morceaux, c'est un peu plus délicat...  $\square$

**Exercice 7.** Vérifier avec Python que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  et que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$  (on calculera simplement un grand terme de chaque somme). Ces deux formules s'obtiennent via l'égalité de Parseval appliquée respectivement à la fonction créneau et à la fonction triangle!

**Corollaire 2.** Les coefficients  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  tendent vers 0 en  $+\infty$ .

**Lemme 3** (Dérivation et coefficients). Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique, et  $C^1$  par morceaux. On note (abusivement)  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ , prolongée sur  $\mathbb{R}$  avec une valeur arbitraire aux points où  $f$  n'est pas dérivable. Alors pour tout  $n \geq 0$ , avec  $\omega = 2\pi/T$ , on a

$$a_n(f') = \omega n b_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -\omega n a_n(f)$$

*Démonstration.* Immédiat, par intégration par parties.  $\square$

**Corollaire 4.** Si  $f$  est une fonction continue de classe  $C^1$  par morceaux, les coefficients de Fourier de  $f$  sont en  $o(1/n)$ .

*Démonstration.* Les coefficients de  $f'$  tendent vers 0 en l'infini, donc ceux de  $f$  sont en  $o(1/n)$ .  $\square$

**Exemple 5.** Au signe près, la dérivée de la fonction triangle  $t$  est la fonction créneau  $c$ . Les coefficients de  $c$  sont en  $O(1/n)$ , ceux de  $t$  en  $O(1/n^2)$ .

On peut prolonger le corollaire par dérivations successives : notamment, si  $f$  est de classe  $C^{k-1}$  et  $C^k$  par morceaux, les coefficients de  $f$  sont un  $o(1/n^k)$ , et si  $f$  est de classe  $C^\infty$ , les coefficients de  $f$  sont à décroissance rapide : négligeables en l'infini devant toute puissance  $O(1/n^\alpha)$ .

Passons maintenant à la convergence ponctuelle. On se demande si  $S_N(f)(t)$  converge vers  $f(t)$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 6** (Théorème de convergence normale). *Si  $f$  est continue,  $T$ -périodique, et  $C^1$  par morceaux, alors  $S_N(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.*

*Démonstration.* On a pour  $n > 0$ , via le corollaire précédent et l'inégalité classique  $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

$$|a_n(f)| = \frac{|b_n(f')|}{n\omega} \leq \frac{1}{2} \left( b_n(f')^2 + \frac{1}{\omega^2 n^2} \right)$$

On a donc, d'après l'égalité de Parseval, la convergence absolue de la série des  $a_n(f)$ , et de même de la série des  $b_n(f)$ . On en déduit la convergence normale de la série de Fourier et ensuite assez facilement que la limite est bien  $f$ .  $\square$

**Exemple 7.** La série de Fourier  $S_N(t)$  de la fonction triangle  $t$  converge normalement vers  $t$ .

Si  $f$  n'est pas continue, on ne peut espérer une convergence normale de la série de Fourier (la limite serait continue!). Néanmoins on a le résultat suivant. On note  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$  les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x$ .

**Théorème 8** (Théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet). *Si  $f$  est  $T$ -périodique, et  $C^1$  par morceaux, alors  $S_N(f)$  converge simplement vers  $f$  en tout point de continuité de  $f$ , et vers  $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$  si  $f$  est discontinue en  $x$ .*

*Démonstration.* Admise.  $\square$

**Exemple 9.** La série de Fourier de la fonction créneau  $c$  converge simplement vers  $c$  en tout point de  $\mathbb{R}$ . En effet  $c(0) = 0 = \frac{1}{2}(c(0^+) + c(0^-))$ .

Il est possible d'affaiblir les hypothèses du théorème précédent, mais pas jusqu'à supposer  $f$  seulement continue par morceaux (ou même seulement continue) comme le montre la propriété suivante.

**Proposition 10.** *Il existe une fonction  $f$  continue,  $2\pi$ -périodique, et un réel  $x$  tels que  $S_N(f)(x)$  diverge.*

*Démonstration.* Le résultat précédent est une application classique d'un théorème d'analyse fonctionnelle (le théorème de Banach-Steinhaus). On peut aussi donner des exemples explicites, comme <sup>1</sup>  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left((2n^3 + 1)\frac{|x|}{2}\right)$ .  $\square$

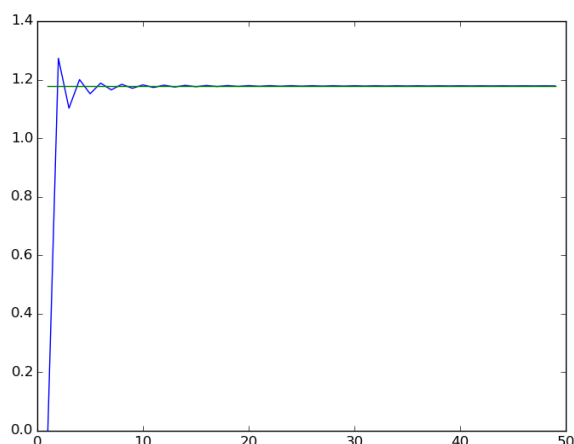
## 4 Phénomène de Gibbs

La fonction créneau est discontinue, et le tracé de l'exercice 5 montre que si la série de Fourier ( $S_n(c)$ ) semble se rapprocher de  $c$  en dehors des points de discontinuité (ce qui est le cas d'après le théorème de convergence ponctuelle), il semble que  $\|S_n(f)\|_\infty$  ait une limite strictement supérieure à 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ceci est le phénomène de Gibbs.

**Exercice 8.** Tracer sur un graphique les valeurs de  $S_n(c)\left(\frac{1}{2n}\right)$  en fonction de  $n$ , pour  $n \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ . Observer que cette quantité semble avoir une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Vérifier expérimentalement que cette limite est

$$\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$$

1. Exemple tiré de Wikipédia.



*Remarque :* ceci est le phénomène de Gibbs. Il est démontré que pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceau ayant une discontinuité, la somme  $S_n(f)$  aura, pour  $n$  grand, au voisinage de cette discontinuité, un ressaut proportionnel à l'amplitude du saut de discontinuité (de l'ordre de  $9\% \simeq (\ell - 1)/2$ ). Le facteur de proportionnalité ne dépend pas de la fonction !

## 5 Vibration d'une corde

Une corde de longueur  $\ell = 1\text{m}$  est fixée à ses deux extrémités et tendue, elle est supposée sans raideur, et de diamètre nul. On note  $y(x, t)$  la position de la corde au point  $x \in [0, 1]$  et au temps  $t \geq 0$ . Au temps  $t = 0$ , on relâche la corde, de sorte que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall x \in [0, 1], \quad y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

On note  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  le plan dans lequel le mouvement s'effectue, la direction de la corde au repos étant  $\vec{e}_x$ .

Avec  $T$  la tension appliquée aux deux extrémités de la corde, et  $\mu$  la masse linéique de la corde, on montre qu'en notant  $v = \sqrt{T/\mu}$ , l'équation régissant le mouvement de la corde est la suivante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(0, t) = y(1, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0. \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{pour tout } x \in [0, 1]. \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pour tout } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

La résolution par séries de Fourier de cette équation donne que pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $t \geq 0$ ,  $y(x, t)$  est somme des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \cos(vk\pi t)$$

avec

$$b_k = 2 \int_0^1 \sin(k\pi s) y_0(s) ds$$

En particulier, on a  $y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$ . Autrement dit, les coefficients  $b_k$  sont les coefficients de Fourier de la fonction 2-périodique obtenue en prolongeant  $y_0$  par imparité puis par 2-périodicité.

**Exercice 9.** On pose pour simplifier  $v = 1$ . Pour plusieurs<sup>2</sup> profils  $y_0$ , calculer les  $N = 50$  premiers coefficients ( $b_k$ ) à l'aide de la fonction  $B$ , et écrire une fonction  $Y(\text{BN}, \mathbf{x}, \mathbf{t})$  renvoyant  $y(x, t)$  (BN est la liste des coefficients obtenus via la fonction  $B$ ). Tracer des profils de la corde à différents instants. Voir aussi le fichier d'animation proposé sur le site web.

2. Par exemple : fonction affine par morceaux, fonction combinaison linéaire de modes propres, ou autre...