Centrale Maths 2 : Quelques planches

Planche I (Centrale MP 2016)

On écrit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{A_n}{B_n}$. On pose aussi $C_n = n!H_n$. On veut montrer la propriété :

$$\mathcal{P} : \quad \forall p \geq 5 \text{ et } p \text{ premier}, \quad p^2 | A_{p-1}$$

1. (a) Coder une fonction qui prend en paramètre n et renvoie C_n.

(b) Montrer que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, où $\mathcal{Q} : \forall p \geq 5$ et p premier, $p^2 | C_{p-1}$.

(c) Montrer que $\mathcal{P}$ est vérifiée pour tout $p \leq 1000$.

2. Soit $p \geq 5$ premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1[p]$.

3. On pose $a_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$ pour tout $k > 0$. Trouver une relation entre $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ et H_{p-1}.

4. Montrer que $k^2 a_k \equiv 1[p]$, puis que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$. Conclure.

Planche II (Centrale MP 2016)

On s'intéresse à la première apparition du motif « PF » dans un tirage infini de pile ou face, indépendants et non truqués. On note A_i l'événement « le motif PF apparaît pour la première fois au rang i ». On convient que le rang numéro 0 correspond au premier lancer (on a donc $\mathbb{P}(A_0) = 0$). On note $q_i = \mathbb{P}(A_i)$ pour $i \geq 0$, et T la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du motif PF pour la première fois.

1. Écrire une fonction Python donnant le résultat d'une expérience.

2. En réitérant l'expérience un grand nombre de fois, conjecturer une valeur pour l'espérance de T (l'existence de cette espérance sera montrée plus tard).

3. Montrer que $\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i) = 1$.

4. Décrire A_n pour $n \geq 1$ et en déduire la valeur de q_n.

5. Montrer que T est d'espérance finie, et donner $\mathbb{E}(T)$.

6. Reprendre l'exercice avec le motif « PP ».

Planche III (Centrale PC 2016)

Soient a et b deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les matrices $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés :

— les termes diagonaux égaux à 1 ;

— les termes de la première ligne et de la première colonne (sauf le premier) égaux alternativement à b et a.

Voici par exemple les matrices A_5 et A_6 :

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a & b \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on dire de ces matrices ?

2. Écrire une fonction Python de paramètres a, b et n et qui renvoie A_n.

3. Calculer les valeurs propres et le déterminant des matrices A_n pour $n \in [\![3, 7]\!]$ et $(a, b) \in \{(2,3), (1,2), (-1,2)\}$.

4. Calculer les valeurs propres et le déterminant dans le cas général.

5. Donner une base de vecteurs propres de l'espace propre associé à la valeur propre multiple.

6. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. Après avoir calculé quelques cas particuliers à l'aide du logiciel, donner une base de vecteurs propres de A_4 suivant les valeurs de a et b.

7. La matrice est-elle toujours diagonalisable dans le cas où a et b sont des complexes ?

Planche IV (Centrale PC 2016)

On considère dans cet exercice la série $\sum_{n\geq 1} a_n$, avec $\forall n > 0$, $a_n = (-1)^n \ln(1 + 1/n)$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

2. a. Vérifier avec le logiciel la relation $\sum_{n\geq 1} a_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.
   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est 1. On note f sa somme sur $]-1, 1[$.

4. a. Faire un tracé de f avec le logiciel et vérifier que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.
   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

5. a. Faire un tracé de f' avec le logiciel et vérifier que f' admet une limite en 1.
   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

Planche V (Centrale PC 2016)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. À l'aide de l'ordinateur, tracer les courbes des fonctions P_n pour $-2 \leq x \leq 2$ et $1 \leq n \leq 10$. On utilisera la commande `plt.axis([-2, 2, 0, 5])` afin de cadrer la fenêtre graphique.

2. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_n'(x) = \frac{u_n(x)}{(x-1)^2}$, où u_n est une fonction polynomiale à déterminer.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'allure du tableau de variation de la fonction P_n. Montrer en particulier que P_n possède un unique minimum sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera a_n le réel où P_n atteint son minimum.

4. Créer une fonction informatique `A` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et renvoyant une valeur approchée de a_n.

5. Représenter graphiquement a_n en fonction de n pour $1 \leq n \leq 500$. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

6. Déterminer un équivalent simple de la quantité $\ln(2n + 1 - 2na_n)$, puis, en exploitant la relation $P_n'(a_n) = 0$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. On pose maintenant $a_n = -1 + h_n$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8. On pose $w_n = h_n - \frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln 2}{n}$. À l'aide d'une représentation graphique, conjecturer la nature de la série $\sum w_n$.

9. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.

Planche VI (Centrale 2015)

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *
import numpy as np
```

1. Vérifier que $\langle ., .\rangle$ est bien un produit scalaire.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

(a) Trouver une relation encore I_n et I_{n-2}. Écrire une fonction récursive `Calcul(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

(b) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Écrire une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie le produit scalaire ci-dessus, à l'aide de `Calcul`.

4. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)$.

(b) Trouver une relation entre H_{n+2}, H_{n+1} et H_n (solution : $H_{n+2} + 2xH_{n+1} + 2(n+1)H_n = 0$.)

(c) Écrire une fonction `Poly2(n)` qui renvoie la liste de taille $n+1$ des $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$.

(d) Écrire une fonction `Gram(n)` renvoyant la matrice des $\langle H_i, H_j \rangle$ pour $i, j \in [\![0, n]\!]$. Tester pour de petits n. Observation ?

(e) Prouver le résultat observé (les (H_i) forment une famille orthogonale).

Planche VII (Centrale 2015)

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import math
import scipy.optimize as resol
import matplotlib.pyplot as plt
```

On considère sur $\mathbb{R}_+$ l'équation, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(E_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution notée u_n, pour tout entier $n \geq 1$.

2. Afficher les 100 premières valeurs approchées de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ en utilisant :

(a) La fonction fsolve du fascicule ;

(b) une implémentation de recherche dichotomique.

3. Que peut-on raisonnablement conjecturer ? Démontrer rigoureusement ce fait.

Planche VIII (Centrale 2015)

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr
```

On considère les fonctions f et g définies sous condition de convergence par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Que donne l'outil informatique pour le calcul de $f(0)$, $f(1)$ et $f(10)$? Commenter.

3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_A : x \mapsto \int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t} \, \mathrm{d}t$.

(a) Écrire une fonction Python de paramètres A et x qui calcule $f_A(x)$.

(b) Tracer simultanément les courbes représentatives de f_{50}, f_{100}, f_{200} et f_{500} sur l'intervalle $[0, 5]$. Commenter.

4. Montrer que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Tracer simultanément les courbes représentatives de g et f_{200}. Que peut-on conjecturer ?

6. Après avoir changé son expression à l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f et g. Conclure.