Centrale Maths 2 : Quelques planches

Le document suivant présente quelques planches d'oraux de Centrale, pour la plupart issus de la filière MP. Au début de chaque exercice, sont précisés les thèmes indiquant les modules dont vous aurez besoin (le module math n'est pas précisé !). Pour bien se préparer à cette épreuve, il faut connaître les fonctions présentes dans les fiches distribuées : inutile d'apprendre la syntaxe par cœur, mais il faut savoir quelles sont les fonctions à votre disposition. Lors de la préparation, il ne faudra pas perdre de temps !

Exercice 1. *Arithmétique : pas de module particulier à importer.*

1. Écrire une fonction qui renvoie le PGCD de deux entiers relatifs.

2. Soit φ une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(2n) = \varphi(n) \qquad \text{et} \qquad \varphi(2n+1) = \varphi(n+1) + \varphi(n)$$

. Écrire une fonction qui renvoie $\varphi(n)$.

3. Que vaut $\mathrm{PGCD}(\varphi(n), \varphi(n+1))$? Conjecture, démonstration.

Exercice 2. *Arithmétique : pas de module particulier à importer.*

On écrit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{A_n}{B_n}$. On pose aussi $C_n = n!H_n$. On veut montrer la propriété :

$$\mathcal{P} : \quad \forall p \geq 5 \text{ et } p \text{ premier}, \quad p^2 | A_{p-1}$$

1. (a) Coder une fonction qui prend en paramètre n et renvoie C_n.

(b) Montrer que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, où $\mathcal{Q} : \forall p \geq 5$ et p premier, $p^2 | C_{p-1}$.

(c) Montrer que $\mathcal{P}$ est vérifiée pour tout $p \leq 1000$.

2. Soit $p \geq 5$ premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1[p]$.

3. On pose $a_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$ pour tout $k > 0$. Trouver une relation entre $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ et H_{p-1}.

4. Montrer que $k^2 a_k \equiv 1[p]$, puis que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$. Conclure.

Exercice 3. *Calcul matriciel : déterminant.*

Soient $(a_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire une fonction Python calculant et affichant le déterminant Δ_n de A_n pour de petites valeurs de n.

2. Exécuter le programme lorsque $a_n = 1$ et lorsque $a_n = 1/n^2$. Que peut-on dire ?

3. Montrer que lorsque $a_n = 1$, la suite $(\Delta_n)_n$ est divergente. Donner un équivalent de Δ_n quand n tend vers l'infini.

4. Montrer que $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$

5. Montrer que la suite $(\Delta_n)_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

Exercice 4. *Polynômes, calcul matriciel, valeurs propres.*

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose pour $P \in E$, $\varphi(P) = (n-1)XP + (1 - X^2)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Écrire une fonction Python qui calcule $\varphi(P)$.

3. Calculer la matrice de φ dans la base canonique pour $n = 3$, puis pour n quelconque.

4. Déterminer dans le cas général les éléments propres de φ.

Exercice 5. *Polynômes, tracé, et résolution d'équations numériques.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. À l'aide de l'ordinateur, tracer les courbes des fonctions P_n pour $-2 \leq x \leq 2$ et $1 \leq n \leq 10$. On utilisera la commande `plt.axis([-2, 2, 0, 5])` afin de cadrer la fenêtre graphique.

2. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_n'(x) = \frac{u_n(x)}{(x-1)^2}$, où u_n est une fonction polynomiale à déterminer.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'allure du tableau de variation de la fonction P_n. Montrer en particulier que P_n possède un unique minimum sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera a_n le réel où P_n atteint son minimum.

4. Créer une fonction informatique `A` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et renvoyant une valeur approchée de a_n. *Remarque : la méthode de Newton ne s'applique pas bien, utiliser la méthode dichotomique, voir scipy.optimize.bisect.*

5. Représenter graphiquement a_n en fonction de n pour $1 \leq n \leq 500$. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

6. Déterminer un équivalent simple de la quantité $\ln(2n + 1 - 2na_n)$, puis, en exploitant la relation $P_n'(a_n) = 0$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. On pose maintenant $a_n = -1 + h_n$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8. On pose $w_n = h_n - \frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln 2}{n}$. À l'aide d'une représentation graphique, conjecturer la nature de la série $\sum w_n$.

9. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.

Exercice 6. *Polynômes, intégration, calcul matriciel.*

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $\langle ., . \rangle$ est bien un produit scalaire.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

(a) Trouver une relation encore I_n et I_{n-2}. Écrire une fonction récursive `Calcul(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

(b) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Écrire une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie le produit scalaire ci-dessus, à l'aide de `Calcul`.

4. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)$.

(b) Trouver une relation entre H_{n+2}, H_{n+1} et H_n (solution : $H_{n+2} + 2xH_{n+1} + 2(n+1)H_n = 0$.)

(c) Écrire une fonction `Poly2(n)` qui renvoie la liste de taille $n+1$ des $(H_k)_{0\leq k\leq n}$.

(d) Écrire une fonction `Gram(n)` renvoyant la matrice des $\langle H_i, H_j\rangle$ pour $i, j \in [\![0, n]\!]$. Tester pour de petits n. Observation ?

(e) Prouver le résultat observé.

Exercice 7. *Suites récurrentes : pas de module particulier à importer.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan(n + 1) - \arctan(n)$. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n\varepsilon_n$ converge et que $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \leq \pi/2$.

2. **Un cas particulier.** Soit $x \in [0, \pi/2]$. On définit la suite des $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

— si $x < \pi/4$, alors $\varepsilon_0 = 0$, sinon $\varepsilon_0 = 1$;

— pour $n \in \mathbb{N}$, si $x > \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1} = 1$, sinon $\varepsilon_{n+1} = 0$.

(i) Programmer en Python une fonction `suite` qui prend en paramètre $(x, n) \in [0, \pi/2] \times \mathbb{N}$ et qui renvoie $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$.

(ii) En testant pour des valeurs de x et $n = 100$, faire une conjecture.

(iii) Prouver la conjecture.

3. Le résultat de la question précédente est-il vrai dans le cas où $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ et $x = 0.5$?

Exercice 8. *Tracé.*

On considère dans cet exercice la série $\sum_{n\geq 1} a_n$, avec $\forall n > 0$, $a_n = (-1)^n \ln(1+1/n)$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

2. a. Vérifier avec le logiciel la relation $\sum_{n\geq 1} a_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

b. Démontrer avec rigueur le résultat.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est 1. On note f sa somme sur $]-1,1[$.

4. a. Faire un tracé de f avec le logiciel et vérifier que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

b. Démontrer avec rigueur le résultat.

5. a. Faire un tracé de f' avec le logiciel et vérifier que f' admet une limite en 1.

b. Démontrer avec rigueur le résultat.

Exercice 9. *Tracé, intégration.*

On considère les fonctions f et g définies sous condition de convergence par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Que donne l'outil informatique pour le calcul de $f(0)$, $f(1)$ et $f(10)$? Commenter.

3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_A : x \mapsto \int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Écrire une fonction Python de paramètres A et x qui calcule $f_A(x)$.

(b) Tracer simultanément les courbes représentatives de f_{50}, f_{100}, f_{200} et f_{500} sur l'intervalle $[0,5]$. Commenter.

4. Montrer que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Tracer simultanément les courbes représentatives de g et f_{200}. Que peut-on conjecturer ?

6. Après avoir changé son expression à l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f et g. Conclure.

Exercice 10. *Tracé, intégration, résolution d'équations différentielles.*

On considère $a \in \mathbb{R}$ et x_a une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant $x_a(0) = a$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $x_a'(t) = \cos(t) + \cos(x_a(t))$.

1. Utiliser la méthode d'Euler pour tracer le graphe de x_a sur $[0,T]$ pour diverses valeurs de a et T. *Note : je trouve assez aberrant de demander une méthode d'Euler, utiliser odeint !*

2. Si $x \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}) = E$ on pose $\phi(x) : t \mapsto a + \sin t + \int_0^t \cos(x(s))\,\mathrm{d}s$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \forall t \in [0,T],\ |\phi^n(x)(t) - \phi^n(y)(t)| \leq \frac{t^n}{n!}\,\|x-y\|_\infty$$

3. Avec les notations précédentes, soit $x \in E$. Montrer que $(\phi^n(x))$ converge uniformément vers un élément $z \in E$, et que z vérifie les propriétés de x_a.

4. Pour x la fonction constante égale à 1, tracer les premiers termes de la suite $(\phi^n)_n$ pour $a = 1$ et $T = 1$.

Exercice 11. *Probabilités.*

On s'intéresse à la première apparition du motif « PF » dans un tirage infini de pile ou face, indépendants et non truqués. On note A_i l'événement « le motif PF apparaît pour la première fois au rang i ». On convient que le rang numéro 0 correspond au premier lancer (on a donc $\mathbb{P}(A_0) = 0$). On note $q_i = \mathbb{P}(A_i)$ pour $i \geq 0$, et T la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du motif PF pour la première fois.

1. Écrire une fonction Python donnant le résultat d'une expérience.

2. En réitérant l'expérience un grand nombre de fois, conjecturer une valeur pour l'espérance de T (l'existence de cette espérance sera montrée plus tard).

3. Montrer que $\mathbb{P}(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1$.

4. Décrire A_n pour $n \geq 1$ et en déduire la valeur de q_n.

5. Montrer que T est d'espérance finie, et donner $\mathbb{E}(T)$.

6. Reprendre l'exercice avec le motif « PP ».

Exercice 12. *Probabilités.*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. (i) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Conjecturer la loi de $X+Y$.

(ii) Conjecturer la loi de $X+Y$, X et Y étant toujours supposées indépendantes, X suit la loi uniforme dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(iii) Sous les hypothèses de (i), conjecturer la valeur de $\mathbb{P}(XY=1)$.

(iv) Démontrer la conjecture faite en (i).

2. (i) Soit $(G,.)$ un groupe fini. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G, X suit la loi uniforme. Déterminer la loi de XY. Le résultat demeure-t-il sans l'hypothèse d'indépendance ?

(ii) Démontrer la conjecture faite en (1.ii).

3. Démontrer la conjecture faite en (1.iii).

4. Soit p un nombre premier, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, X suivant la loi uniforme. Donner la loi de XY.

Exercice 13. *Probabilités.*

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

1. Soient G_X, G_S, G_N les séries génératrices de X, S et N. Montrer :

$$\forall\, t \in [0,1], G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$$

2. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

3. On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbb{E}(S^2)$.

4. On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n-ième génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

(i) Écrire une fonction python renvoyant le nombre de descendants masculins à la n-ième génération.

(ii) Fixer λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants masculins. Comparer à $\mathbb{E}(Z_n)$.