Exercices corrigés : les limites.

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)$
b) $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1)$
c) $\lim_{x\to +\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)$
d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{1-3x}\right)$
e) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+1}{1-3x}\right)$
f) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)$
g) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)$
h) $\lim_{x\to +\infty}(x^3-10x^2+3)$
i) $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-x\sqrt{x}\right)$

Exercice 2 : (ex 82 p133)

f est la fonction définie sur I =]-2, +∞[par $f(x) = \frac{-x^2+x+3}{x+2}$.

a) Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x \in$ I, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe C représentant la fonction *f*.
c) Déterminer la position relative de C par rapport à Δ selon les valeurs de *x* dans I.
d) Prouver que la courbe C admet une asymptote verticale et donner une équation de cette asymptote.

Exercice 3 : (ex 83 p133)

f est la fonction définie sur I =]1, +∞[par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.

a) Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x \in$ I, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
b) Etudier les limites éventuelles de *f* aux bornes de I.
c) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C représentant la fonction *f*.
d) Résoudre l'inéquation $|f(x) - (x + 2)| \leq 0,1$ puis interpréter graphiquement le résultat.
e) La courbe C admet-elle une autre asymptote.

Exercice 4 :

Dans un repère, H est l'hyperbole représentant une fonction *f* définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (où *a*, *b*, *c* et *d* sont des réels).

a) Déterminer *f* sachant que H admet pour asymptotes les droites d'équations $x = 1$, $y = 2$ et que le point A(0 ; -5) est un point de H.
b) Tracer H.

Exercice 5 : *…des idées fausses…*

1. *f* est la fonction définie sur I =]0, +∞[par $f(x) = -\frac{1}{x}$.
   a) Etudier les limites en 0 et en +∞ de *f*.
   b) Dresser le tableau de variations de *f*.
   c) Dans un repère, tracer la courbe représentant *f*.

2. g est la fonction définie sur l'ensemble des réels par $g(x) = x + 2\cos(x)$.
   a) Démontrer que pour tout réel x, $g(x) \geq x - 2$.
   b) A est un réel positif donné aussi grand que l'on veut. Comment suffit-il choisir x pour que $g(x) \geq A$?
   c) En déduire la limite de g en $+\infty$.
   d) Démontrer que la fonction g n'est pas croissante sur l'ensemble des réels.

3. Voici deux affirmations relevées sur des copies d'élèves. Critiquer ces affirmations :
   a) « m est une fonction croissante sur un intervalle $]a, +\infty[$ donc $\lim_{x\to+\infty} m(x) = +\infty$ »
   b) « p est une fonction définie sur l'ensemble des réels et $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ donc p est croissante sur $]-\infty, +\infty[$ »

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ par la relation $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+1}$.

1. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à C la courbe représentative de f.
2. Etudier la position relative de Δ et C.