EQUATION D'UNE TANGENTE

1) Rappels sur le calcul de l'équation d'une droite

La droite est définie par deux points :

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points d'une droite *(AB)*

On calcule le coefficient directeur de la droite :

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

On calcule l'ordonnée à l'origine

Il suffit de remplacer *x* et *y* dans l'équation de la droite par les coordonnées de *A* ou de *B*

$$a\,x_A + b = y_A \Leftrightarrow b = y_A - a\,x_A$$

ou bien

$$a\,x_B + b = y_B \Leftrightarrow b = y_B - a\,x_B$$

Exemple

La droite est définie par les points *A(1 ;–1) et B(4 ;8)*

Calcul de *a*

$a = \dfrac{8-(-1)}{4-1} = 3$

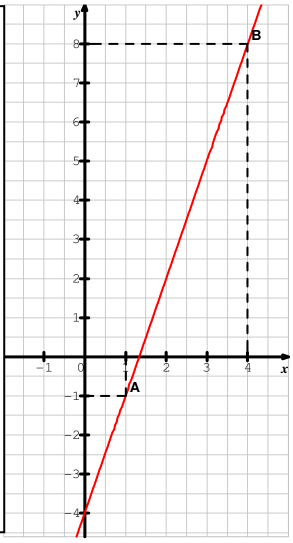
Calcul de *b*

Soit le point *A(1 ;–1)*

$b = -1 - 3\times 1 = -4$

L'équation de (AB) est :

$y = 3x - 4$



La droite est définie par un point et son coefficient directeur

Soit $M(x_M\,;\,y_M)$ un point de la droite et soit *a* son coefficient directeur.

Puisque le coefficient directeur est connu, il ne reste qu'à calculer l'ordonnée à l'origine, mais ici il n'y a que le point *M* dont on connaît les coordonnées :

$$\boxed{a\,x_M + b = y_M \Leftrightarrow b = y_M - a\,x_M}$$

Tracer une droite passant par un point et de coefficient directeur connu

Soit $M(x_M\,;\,y_M)$ un point de la droite et soit *a* son coefficient directeur.

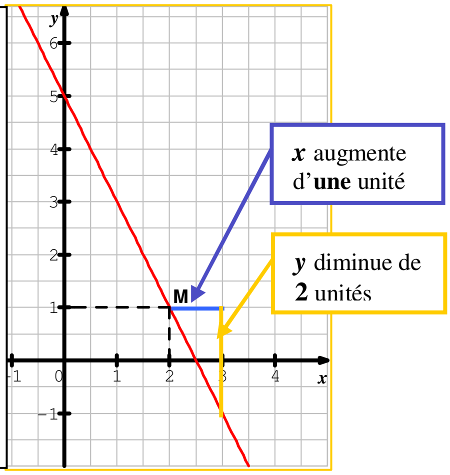
On commence par placer le point *M* dans le repère

Du point *M* on augmente *x* d'une unité.

Si *a* est > 0 on augmente *y* de *a* unités

Si *a* est < 0 on diminue *y* de *a* unités

Tracer la droite (d) sachant qu'elle passe par le point *M(2 ;1)* et que son coefficient directeur est $a = -2$



2) Tangente à une courbe

Pour tout point *M* d'abscisse x_M de la courbe représentative d'une fonction, il existe au plus une seule tangente *(une courbe peut ne pas avoir de tangente en un point, mais si elle admet une tangente en ce point, alors elle est unique*)

On ne connaît qu'un seul point de la tangente, c'est le point *M* appelé point de contact qui appartient à la fois à la tangente et à la courbe. Il manque donc un deuxième point pour calculer son équation.

La tangente ne sera définie (*c'est-à-dire qu'on pourra calculer son équation*) que si l'on connaît son coefficient directeur.

Le coefficient directeur de la tangente s'appelle **nombre dérivé en x_M** et se note : $a = f\,'(x_M)$

Pour le moment, on ne vous demande pas d'être capable de calculer ce nombre, cela viendra plus tard.

Soit (T) la tangente à la courbe au point d'abscisse 2

(T) passe par le point *M(2 ;3)*

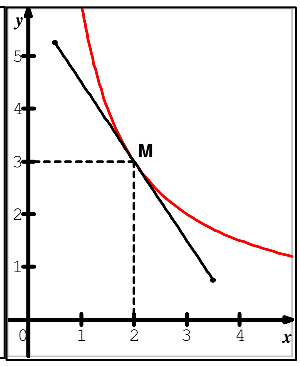
Son coefficient directeur est *a=f'(2)*

Ne pas confondre

$y_M = f(2) = 3$

avec

$a = f\,'(2)$

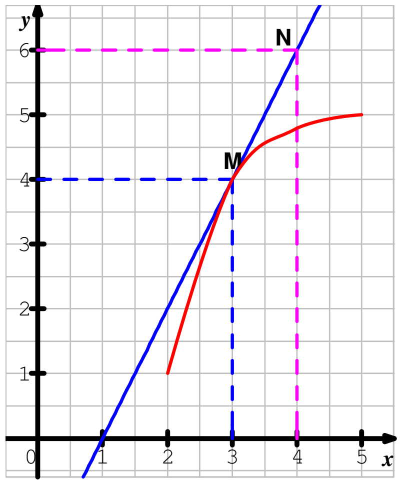


Si on vous dit, par exemple « *le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 est égal à 8* » vous devez savoir que cela s'écrit *f'(4)= 8*

Si réciproquement on vous dit « *le nombre dérivé f '(5) = –2* » vous devez savoir que la tangente au point d'abscisse 5 a pour coefficient directeur *a = –2*

EXERCICES TYPES

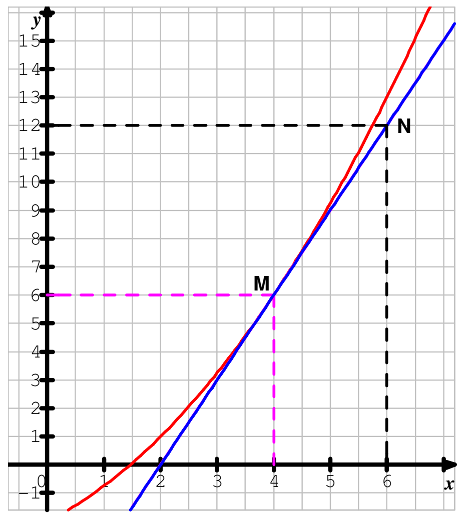
1) La tangente est tracée



Soit la fonction *f* définie par sa courbe représentative.
(MN) est tangente à la courbe au point *M* d'abscisse 3
1) Calculer l'équation de (*MN)*
2) en déduire la valeur de *f '(3)* et *f(3)*

1) On lit sur le graphique *M(3 ; 4) et N(4 ;6)*
Calcul du coefficient *a*
$a = \dfrac{6-4}{4-3} = 2$
Calcul du coefficient *b*
M(3 ;4) est un point de *(MN)* donc :
$2\times3 + b = 4 \iff b = 4 - 6 = -2$
La droite *(MN)* a pour équation : $y = 2x - 2$
2) Valeur de *f(3)* et *f '(3)*
Comme $y_M = 4$ alors *f(3) = 4*
La droite (*MN)* est tangente à la courbe au point **d'abscisse 3** et son coefficient directeur est égal à 2, donc : *f '(3)= 2*

2) On vous donne le nombre dérivé et la courbe



Soit la fonction définie par sa courbe représentative
On sait que *f'(4)* = 3
Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4, puis tracer cette tangente.

Le point d'abscisse 4 de la courbe est le point *M(4 ;6)*
Le coefficient directeur de la tangente est *a = f'(4) = 3*
On a donc :
$3\times4 + b = 6 \quad \iff \quad b = 6 - 12 = -6$
La tangente a pour équation :
$y = 3x - 6$
Pour tracer cette tangente il faut les coordonnées de deux points, dont, bien sûr le point *M.*

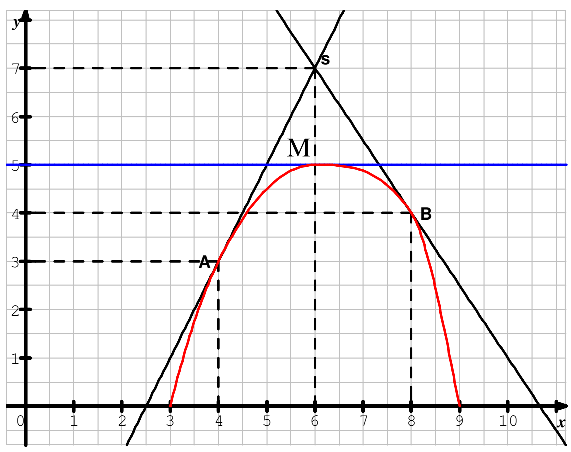
x	4	6
y	6	12

3) On vous donne le nombre dérivé et l'image

Soit la fonction *f* telle que *f(5) = 3 et f'(5) = 4*
Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 5

Le coefficient directeur de la tangente est *a= f'(5) = 4*
Le point de contact a pour coordonnées $x_O = 5$ et $y_o = f(5) = 3$
On a donc :
$4\times5 + b = 3 \iff b = 3 - 20 = -17$
L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 5 est donc : $y = 4x - 17$

4) Un classique



Soit la fonction *f* définie par sa courbe représentative.
Calculer les nombres dérivés *f'(4), f'(6) et f'(8)*

• La droite *(AS)* est tangente à la courbe au point *A(4 ;3)*
Son coefficient directeur est $a = \dfrac{7-3}{6-4} = 2$
La tangente au point **d'abscisse 4** a pour coefficient **directeur** ***a* = 2** donc *f'(4)= 2*

• En *M(6,5)* la tangente est horizontale, son coefficient directeur est nul
La tangente au point d'abscisse 6 a pour coefficient directeur ***a* = 0** donc *f'(6)= **0***

• La droite *(BS)* est tangente à la courbe au point *B(8 ;4)*
Son coefficient directeur est $a = \dfrac{7-4}{6-8} = -\dfrac{3}{2}$
La tangente au point **d'abscisse 8** a pour coefficient directeur $\boldsymbol{a = -\frac{3}{2}}$ donc $f'(6) = -\dfrac{3}{2}$