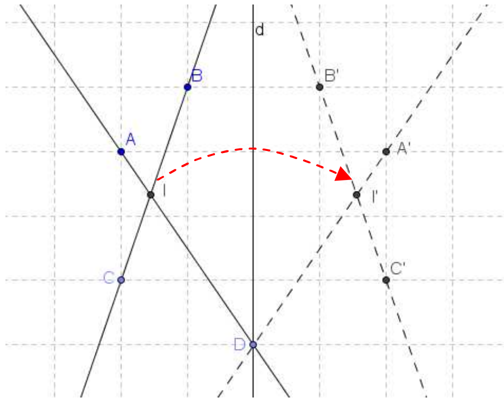
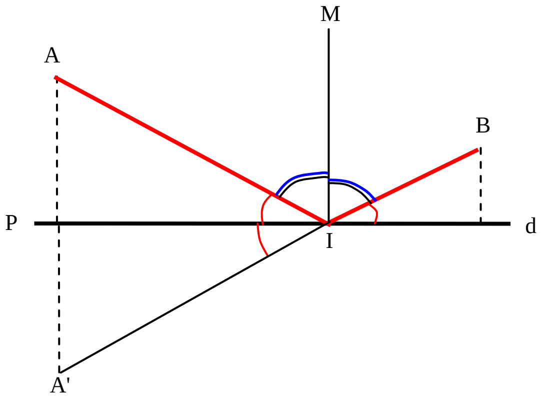
CORRECTION DES EXERCICES SUR LES ISOMETRIES

I. Image d'une intersection



Par la symétrie d'axe *d*, on a
A → A'
B → B'
C → C'
D étant sur l'axe de symétrie :
D → D
On en déduit que :
(AD) → (A'D)
(BC) → (B'C')
Le point *I* est l'intersection des droites *(AD)* et *(BC)* donc son image *I'* est l'intersection des droites *(A'D)* et *(B'C')*

II. Conservation des distances et des angles



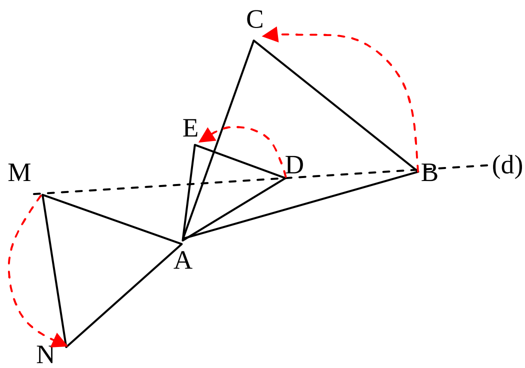
On applique la symétrie S_d aux point *A I* et *P*
A → A'
I et *P* sont sur l'axe de symétrie donc :
I → I
P → P

Donc le segment [AI] a pour image le segment [A'I]
Une isométrie conservant les distances on a
AI = A'I
Donc AI + IB = A' I + IB.

Mais on sait que le plus court chemin entre deux points est la droite. Donc I se trouve à l'intersection de (d) et de (A' B)

Les angles $\widehat{A'IP}$ et $\widehat{BIM}$ sont opposés donc égaux
$\widehat{A'IP}$ est l'image de $\widehat{AIP}$ par la symétrie S_d
Une symétrie conservant les angles $\widehat{A'IP}$ et $\widehat{AIP}$ sont égaux
Les angles $\widehat{AIM}$ et $\widehat{BIM}$ sont complémentaires d'angles égaux donc égaux

III. Alignement de points



Soit la rotation de centre *A* et d'angle α = 60° (sens direct)
AMN étant un triangle équilatéral on a *AM*= *AN* et $\widehat{AMN}$ = 60°
Donc l'image de *M* par la rotation est *N*

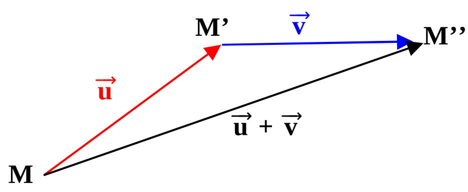
Mais *AED* est aussi équilatéral, pour la même raison, l'image de *D* par la rotation est *E*

Mais *ABC* est aussi équilatéral, pour la même raison, L'image de *D* par la rotation est *E*

Les trois points *M, D* et *B* ont pour image les points *N, E* et *C*

M, D et *B* étant alignés il en est de même pour leurs images *N, E* et *C*

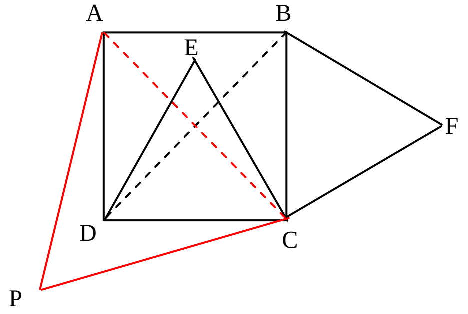
IV. Composition d'isométries



Soit *M* un point du plan
On a $T_{\vec{u}}(M) = M'$ avec $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
On a $T_{\vec{v}}(M') = M''$ avec $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$
D'après la relation de Chasles on a
$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$
$\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$
La transformation qui à *M* fait correspondre l'image *M''* est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

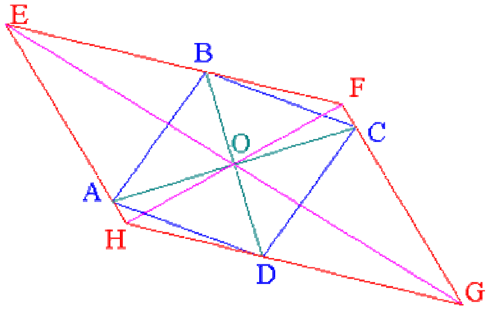
V. Un classique

1) Les diagonales d'un carré se coupent à angle droit en leur milieu. Donc (**BD**) est une médiatrice du triangle *APC*.
APC étant un triangle équilatéral sa médiatrice est aussi une médiane, donc *P* appartient à la droite (*BD*)
On en déduit que les points *B*, *D* et *P* sont alignés.



2) On utilise les propriétés suivantes:
Les angles d'un triangle équilatéral sont tous égaux à 60°
Les trois côtés d'un triangle équilatéral sont égaux.
Appliquons la rotation R(C,60) aux points *A*, *E* et *F*
A $\rightarrow$ P
E $\rightarrow$ D
F $\rightarrow$ B
Les points *A*, *E* et *F* sont les images des points alignés *B*, *D* et *P*. Or les images par une isométrie, de points alignés sont alignées ce qui prouve bien que *A*, *E* et *F* sont alignés.

VI.



Considérons la symétrie centrale de centre O
B $\rightarrow$ D
A $\rightarrow$ C

A $\in$ (EH) donc C appartient à l'image de (EH)
L'image de la droite (EH) est une droite parallèle à (EH) passant par C donc
(EH) $\rightarrow$ (FG)
de même on démontre que
(EF) $\rightarrow$ (HG)
L'intersection de (EH) et (EF) a pour image l'intersection de (FG) et (HG)
Donc E a pour image G par conséquent O est le milieu de la diagonale [EG] du parallélogramme EFGH