# Les démonstrations vectorielles

Une des méthodes les plus utilisées est la colinéarité. Elle permet de démontrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.
Pour réussir ce genre d'exercices il faut savoir utiliser la relation de Chasles.

## 1) Relation de Chasles

Etant donné *A, B* et *C,* trois points quelconques du plan on a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}C}$

### Simplification d'une expression vectorielle

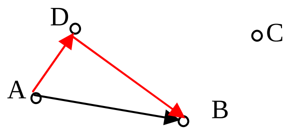
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Or $\overrightarrow{A\mathbf{C}} + \overrightarrow{\mathbf{C}B} = \overrightarrow{AB}$

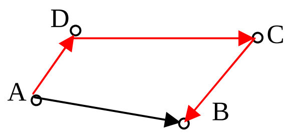
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$

### Ecrire un vecteur en fonction d'autres

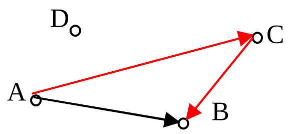
Supposons que dans une figure il y ait quatre points *A, B, C et D*
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut, par exemple, s'écrire :




$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$




$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$




$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

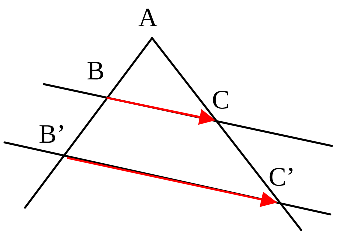
A vous de choisir la forme qui vous permettra de résoudre votre problème

## 2) La colinéarité

Pour démontrer que deux segments ou deux droite sont parallèles, ou pour démontrer que trois points sont alignés on utilise la colinéarité de deux vecteurs:
Ecrire les hypothèses du problème sous forme vectorielle
On commence avec un des deux vecteurs dont on veut démontrer la colinéarité avec le deuxième, on l'écrit en fonction d'autres vecteurs pour réussir, si possible, de l'écrire en fonction du deuxième.

### Exemple :

Forme vectorielle du théorème de Thalès




Hypothèses :
$\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} = k$

Démontrer que (BC) et (B'C') ont parallèles et que $\dfrac{BC}{B'C'} = k$

*A, B* et *B'* sont alignés avec $\dfrac{AB}{AB'} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AB'}$

De même on a $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AC'}$
On veut démontrer que *(BC)* et *(B'C')* sont parallèles donc démontrer que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires

On commence, par exemple avec le vecteur $\overrightarrow{BC}$
La relation de Chasles avec le point *A* donne
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{A}C}$
Or par hypothèse $\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AC'}$
Donc
$\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{B'A} + k\,\overrightarrow{AC'} = k(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'})$
Encore la relation de Chasles : $\overrightarrow{B'\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{A}C'} = \overrightarrow{B'C'}$
$\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{B'C'}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires donc les droites *(BC)* et *(B'C')* sont parallèles et de plus on a BC = k B'C' $\Leftrightarrow \dfrac{BC}{B'C'} = k$