EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES AVRIL 2009
CGRH 2 HEURES

Le sujet comporte deux pages dont une annexe à rendre avec votre copie

Calculatrice autorisée

Le prêt de calculatrice est interdit

Exercice 1 **4 points**

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants en France, exprimé en millions.

Année	1985	1990	1995	2000	2005
Nombre d'habitants (en millions)	56,6	58,2	59,4	60,8	62,8

(Source INSEE)

1. Calculer le taux d'évolution du nombre d'habitants de 1985 à 2005. Arrondir à 0,01%
2. En déduire le taux moyen annuel entre 1985 et 2005. Arrondir à 0,01%.
3. Calculer une estimation, en millions d'habitants, du nombre d'habitants en 2010 si le taux moyen annuel après 2005 est de 0,5%

Exercice 2 **4 points**

Soit la fonction *f* définie sur [0 ;4] par sa courbe représentative *C* en annexe
(SA) est une tangente horizontale à C au point *S(2 ;3)*
(AB) est une tangente à C au point *B(4 ;0)*

1) calculer les coefficients directeurs de ces deux tangentes.
2) Quelles sont les valeurs des nombres dérivés $f'(2)$ et $f'(4)$?
3) Dans quel intervalle la dérivée f' de f est elle < 0 ?

Exercice 3 **6 points**

Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un certain produit en fonction du prix unitaire *x*, exprimé en euros. Pour un prix unitaire de *x* euros, compris entre 2 et 30 le nombre de produits demandés est modélisé par :
$f(x) = 0{,}05x^2 - 4x + 80{,}8$.
et le nombre de produits offerts est modélisé par :
$g(x) = 2x + 16$.
Les courbes $\mathcal{C}f$ et $\mathcal{C}g$, tracées sur le graphique de l'annexe représentent respectivement les fonctions *f* et *g* .

1. Déterminer graphiquement le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque que le prix du produit est de 18 euros *Vous ferez apparaître sur le graphique les tracés utiles.*

2. a. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*.
b. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de *f* sur l'intervalle [2 ; 30].
c. Donner une interprétation économique des variations de *f*.

3. On appelle prix d'équilibre d'un produit, le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
a. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre de ce produit.
b. On se place au prix d'équilibre, quel est alors le nombre de produits demandés (et donc aussi offerts) et le chiffre d'affaires réalisé ?

Exercice 4 **6 points**

Un vendeur de jeux vidéo a proposé en 2007 une carte de fidélité à ses clients ; 60 %d'entre eux ont pris la carte.
Parmi les clients munis d'une carte de fidélité, 70 % ont dépensé plus de 300 euros dans l'année, alors que seuls 40 % des clients sans carte ont dépensé plus de cette somme annuellement.
À la fin de l'année 2007, le vendeur consulte le fichier de tous ses clients. Il choisit au hasard un des clients de l'année 2007.
On nomme :
F l'évènement : « le client choisi possède une carte de fidélité »,
D I'évènement : « le client choisi a dépensé plus de 300 euros dans l'année 2007 ».

1. Compléter l'arbre pondéré de probabilités en annexe.

2. Montrer que la probabilité de l'événement $F \cap D$ est égale à 0,42.

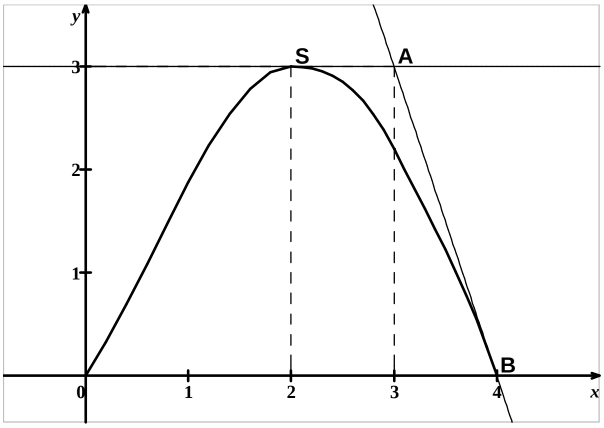
3. Quelle est la probabilité que la client choisi ne possède pas de carte de fidélité et a dépensé plus de 300 euros dans l'année 2007 ? En déduire la probabilité, de l'évènement *D.*

4. Calculer la probabilité de F sachant *D.*

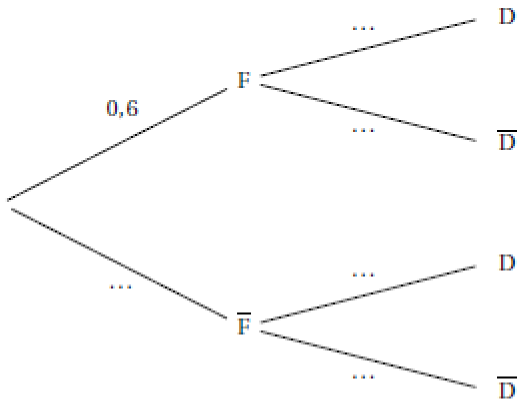
5. Les évènements *F* et *D* sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

ANNEXE

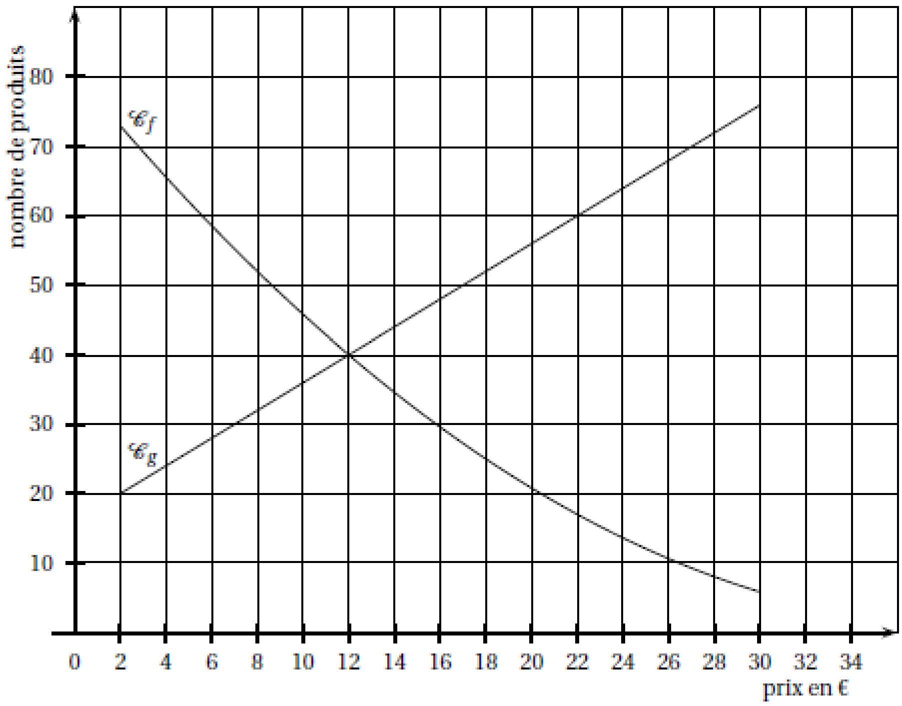
Exercice 2



Exercice 3



Exercice 4



CORRECTION

Exercice 1 — 4 points

1. Taux d'évolution du nombre d'habitants de 1985 à 2005. Arrondir à 0,01%

$t = \dfrac{62{,}8 - 56{,}6}{56{,}6} = 0{,}10954$

Le nombre d'habitants a augmenté de 10,95 %

Remarque : On demandait un résultat à 0,01 % et non à 0,01

2. Taux moyen annuel entre 1985 et 2005. Arrondir à 0,01%.

De 1985 à 2005 il y a eu 2005 – 1985 = 20 augmentations

Soit t_a le taux moyen

$1 + t_a = \sqrt[20]{1 + 0{,}1095} \approx 1{,}00520$

Le taux moyen annuel est de 0,52 %

3. Estimation, en millions d'habitants, du nombre d'habitants en 2010 si le taux moyen annuel après 2005 est de 0,5%

Le nombre d'habitants en 2010 est donné par $62{,}8\times(1 + 0{,}005)^5 \approx 64{,}4$

Il y aura donc 64,4 millions d'habitants en 2010

Exercice 2 — 4 points

Coefficients directeurs de ces deux tangentes.

(SA) est une tangente horizontale, sont coefficient directeur est donc nul

On a *A(3 ; 3)* et *B(4 ; 0)*

Le coefficient directeur de *(AB)* est $\dfrac{0-3}{4-3} = -3$

1) Valeurs des nombres dérivés *f'(2)* et *f'(4)*

Pour $x = 2$, le coefficient directeur de la tangente en *S* est nul donc $f'(2) = 0$

Pour $x = 4$, le coefficient directeur de la tangente en *B* est égal à –3 donc $f'(4) = -3$

2) Dans quel intervalle la dérivée *f'* de *f* est elle < 0 ?

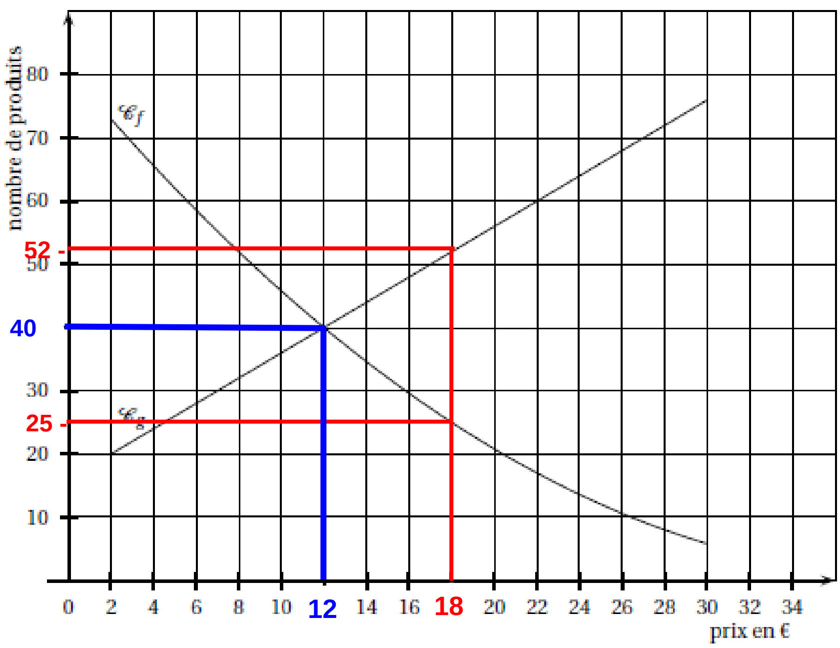
La dérivée d'une fonction est **négative** lorsque cette fonction est **décroissante.**

f étant décroissante sur [2 ; 4], la dérivée *f'* est négative sur cet intervalle.

Exercice 3 — 6 points

1. Pour un prix de 18 euros la demande est de 25 produits et l'offre de 52 produits.

Il est facile de vérifier par le calcul ces résultats :
$f(18) = 0{,}05\times18^2 - 4\times18 + 80{,}8 = 25$
$g(18) = 2\times18 + 16 = 52$



2. a. dérivée *f '* de la fonction *f*.
$f'(x) = 2\times0{,}05x - 4 = 0{,}1x - 4$

b. variations de *f* sur l'intervalle [2 ; 30].

La dérivée est nulle pour $x = \dfrac{4}{0{,}1} = 40$

Or $2 \le x \le 30$, la dérivée ne s'annule pas dans cet intervalle donc la dérivée ne change pas de signe.
La dérivée est < 0, on en déduit que *f* est décroissante sur cet intervalle.

c. interprétation économique des variations de *f*.
Lorsque le prix de l'objet augmente, la demande des consommateurs diminue

3. a. prix d'équilibre de ce produit.

Le prix d'équilibre est l'abscisse du point d'intersection de deux courbes, soit 12 euros

3. b. nombre de produits demandés et le chiffre d'affaires réalisé ?

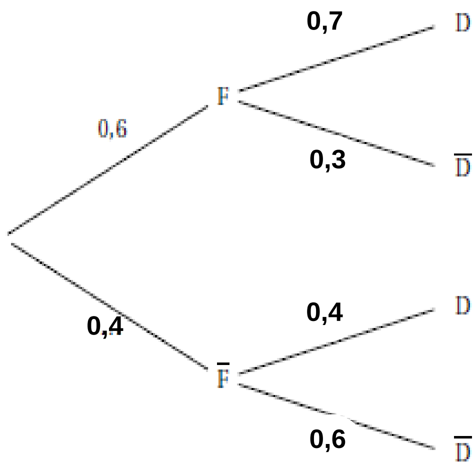
40 produits ont été offerts et vendus

Le chiffre d'affaire est donc 40×12 = 480 euros

Exercice 4 **6 points**

1. arbre pondéré de probabilités.

- 60 % des clients eux ont pris la carte donc P(F) = 0,6
- Parmi les clients munis d'une carte de fidélité, 70 % ont dépensé plus de 300 euros dans l'année, donc $P_F(D) = 0,7$
- 40 % des clients sans carte ont dépensé plus de 300 euros, donc $P_{\overline{F}}(D) = 0,4$



2. Montrer que la probabilité de l'événement $F \cap D$ est égale à 0,42.

$P(F \cap D) = P(F)\times P_F(D) = 0,6\times0,7 = 0,42$

3. Probabilité que le client choisi ne possède pas de carte de fidélité et a dépensé plus de 300 euros dans l'année 2007

$P(\overline{F} \cap D) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(D) = 0,4\times0,4 = 0,16$

La probabilité qu'un client dépense plus de 300 euros est :

P(D) = 0,42 + 0,16 = 0,58

4. Probabilité de F sachant *D.*

C'est la probabilité pour qu'un client ayant dépensé plus de 300 euros ait une carte de fidélité, soit $P_D(F)$

$P(D) \times P_D(F) = P(F \cap D)$

$0,58 \times P_D(F) = 0,42$

$P_D(F) = \frac{0,42}{0,58} = 0,72$

5. Les évènements *F* et *D* sont-ils indépendants ?

P(F) = 0,6 et $P_D(F) = 0,72$

Ces deux probabilités sont différentes, les événements *F* et *D* sont donc dépendants

Remarque :

Dès la question 3 on pouvait savoir que les deux événements étaient dépendants.

En effet on a P(D) = 0,58 et $P_F(D) = 0,7$ et ces deux probabilités sont elles aussi différentes

Autre démonstration possible :

$P(D)\times P(F) = 0,58\times0,6 = 0,348$

$P(F \cap D) = 0,42$

Donc $P(D)\times P(F) \neq P(F \cap D)$