Les tableaux de signe

Le tableau de signe d'une expression algébrique est utilisé pour :

- Résoudre des inéquations autres que celles du premier degré
- Et surtout, établir le tableau du signe de la dérivée pour en déduire les variations d'une fonction.

1) Signe d'une expression du 2ème degré.

Pour étudier le signe d'une expression du second degré, il faut, quand c'est possible, la mettre sous forme de produit de facteurs du premier degré.
On étudie alors le signe de chaque facteur, puis le signe de l'expression est obtenu en appliquant la règle des signes du produit de deux nombres.

Cas particuliers

$(ax + b)^2$ est nulle pour $x = -\frac{b}{a}$ et positive pour toutes autres valeurs de x

$x^2 + c^2$ n'est pas factorisable et est positive pour tout x

Rappel : signe d'une expression du premier degré

Pour calculer le signe de $f(x) = ax + b$

On recherche la solution de l'équation $f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{b}{a}$

On regarde le signe du coefficient a
Le tableau est alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple1

Signe de $f(x) = x - 3x^2$

Factorisation :
$f(x) = x(3 - x)$
Le premier facteur est x qui est évidemment nul pour $x = 0$
Le second facteur est $3 - x$ qui est nul pour $x = 3$

Tableau du signe

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$	
x		–	0	+	|	+		← a = 1 > 0
3 – x		+	|	+	0	–		← a = –1 <0
f(x)		–	0	+	0	–		← signe d'un produit

Exemple2

Signe de $g(x) = x^2 - 25$

Factorisation :
$f(x) = (x - 5)(x + 5)$
Le premier facteur est $x - 5$ qui est nul pour $x = 5$
Le second facteur est $x + 5$ qui est nul pour $x = -5$

Tableau du signe

x	$-\infty$		–5		5		$+\infty$
x – 5		–	|	–	0	+	
x + 5		–	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	0	+	

Exemple 3

signe de $h(x) = x^2 - x - 6$
On montrera que $h(x) = (x - 3)(x + 2)$ pour tout x

Factorisation :

$(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6$ pour tout x
$= x^2 - x - 6$ pour tout x
$= h(x)$ pour tout x

Le premier facteur est $x - 3$ qui est nul pour $x = 3$
Le second facteur est $x + 2$ qui est nul pour $x = -2$

Tableau du signe

x	$-\infty$		–2		3		$+\infty$
x – 3		–	|	–	0	+	
x + 2		–	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	0	+	

2) Signe d'une expression rationnelle

Une expression est dite rationnelle si elle comporte au moins un dénominateur variable *(x apparaît dans au moins un dénominateur)*
Une expression rationnelle doit être mise sous forme d'une seule fraction.
Le numérateur doit être, quand c'est possible, mis sous forme de produits du 1er degré
Le dénominateur ne doit jamais être développé.
Les valeurs qui annulent le dénominateur sont des valeurs interdites
La règle des signes d'un quotient est la même que celle d'un produit

Exemple 1

Signe de $f(x) = 3 + \dfrac{9}{x-2}$

Mise sous forme de fraction unique :

$f(x) = \dfrac{3(x-2)+9}{x-2} = \dfrac{3x-6+9}{x-2} = \dfrac{3x+3}{x-2}$

On a donc :

$f(x) = \dfrac{3(x-1)}{x-2}$

Le numérateur s'annule pour x = 1

Le dénominateur s'annule pour x = 2 qui est donc une valeur interdite

Tableau du signe

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
3(x – 1)		–	|	–	0	+	
x – 2		–	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	||	+	

x = 2 est une valeur interdite

Exemple 2

Signe de $f(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$

Mise sous forme de fraction unique :

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$

Il faut remarquer que le numérateur est de la forme $a^2 - b^2$

$f(x) = \dfrac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2}$

On a donc :

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

Le numérateur est un produit de deux facteurs qui s'annulent pour x = 1 et x = –3

Le dénominateur s'annule pour x = – 1 qui est donc une valeur interdite

Tableau du signe

x	$-\infty$		– 3		–1		1		$+\infty$
x – 1		–	|	–	|	–	0	+	
x + 3		–	0	+	|	+	|	+	
$(x+1)^2$		+	|	+	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	||	–	0	+	

← un carré n'est jamais < 0

x = – 1 est une valeur interdite