Les suites

1) Définition d'une suite

On appelle suite *(U_n)* toute fonction qui à un entier naturel *n* fait correspondre un réel U_n
A rapprocher de la définition d'une fonction qui à un réel *x* fait correspondre un réel *f(x)*
Pour une fonction *x* est appelé variable ou antécédent alors que pour une suite *n* est appelé indice
Pour une fonction, le nombre *f(x)* est appelé image alors que pour une suite le nombre U_n est appelé terme.

En toute logique, puisqu'une suite est une fonction de *n*, on aurait dû écrire un terme sous la forme *U(n)*. Mais, voila, en mathématiques on a pris l'habitude d'écrire U_n. On rencontre parfois la notation *U(n)* mais c'est rare, mais peut-être la verrez vous.

2) Les suites en terminale

En terminale on étudie deux types de suites :
Les suites arithmétiques : Pour calculer un terme, on ajoute au précèdent un nombre réel, toujours le même, appelé raison et noté *R*

$U_{n+1} = U_n + R$ ou parfois $U(n + 1) = U(n) + R$

Les suites géométriques : Pour calculer un terme, on multiplie le précèdent par un nombre réel positif, toujours le même, appelé raison et noté *q*

$U_{n+1} = qU_n$ ou parfois $U(n + 1) = q\times U(n)$

3) Rang et indice d'une suite

Pour calculer tous les termes d'une suite, connaître la raison ne suffit pas. Puisqu'on calcule un terme d'après le précédent, il faut bien sûr qu'on vous donne la valeur d'un terme. Ca sera souvent le premier terme, mais pas toujours.
Commençons par le plus simple : on vous donne la raison et le premier terme.
Ce premier terme peut être d'indice 0 et on écrira U_0 mais il peut aussi être d'indice 1 et on écrira U_1
Le rang d'un terme est son numéro d'ordre : on dira par exemple le terme de rang 15 est le 15ème terme.

Attention : ne pas confondre indice et rang
Si le 1er terme est U_1 alors le 15ème terme est U_{15}. Donc ici rang = indice
Mai si le 1er terme est U_0 alors le 15ème terme est U_{14} Donc ici rang = indice – 1

4) Définir un suite en fonction de son 1er terme et de l'indice *n*

Avec une suite arithmétique

Soit la suite arithmétique de raison 4 et de 1er terme $U_1 = 10$.
Calculer U_2, U_3 et le 50ème terme

Pour calculer U_1 et U_2 pas de difficulté
$U_2 = 10 + 4 = 14$
$U_3 = 14 + 4 = 18$
Avec cette méthode pour calculer le 50ème terme qui est U_{50} on va y passer du temps car il faudrait calculer tous les termes avant U_{50}

Heureusement il existe une autre formule $\boxed{U_n = U_1 + R\times(n - 1)}$
Dans notre exemple $U_n = 10 + 4(n - 1)$
Donc $U_{50}= 10 + 4(50 - 1) = 10 + 4 \times 49 = 206$

Soit la suite arithmétique de raison 4 et de 1er terme $U_0 = 10$.
Calculer le 50ème terme

Ici le seul changement est que le 1er terme est maintenant U_0. Le 50ème terme est maintenant U_{49}. Mais le50ème terme doit toujours être égal à 206 Car quelque soit l'indice du 1er terme, le 50ème reste toujours le même.

la formule devient dans ce cas $\boxed{U_n = U_0 + R\times n}$

le 50ème terme est donc $U_{49} = 10 + 4\times 49 = 206$

Avec une suite géométrique

L'indice des prix était 100 au 1er janvier de cette année, il augmente de 0,4 % par mois. Quel est l'indice des prix en décembre de la même année.

Qu'on appelle U_1 ou U_0 l'indice des prix en janvier, l'indice des prix en décembre doit être le même

$U_1 = 100$
$q = 1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$ formule $\boxed{U_n = q^{n-1}\times U_1}$
L'indice des prix de décembre est le 12ème soit U_{12}
$U_{12} = 1,004^{12-1}\times 100 = 104,49$

$U_0 = 100$
$q = 1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$ formule $\boxed{U_n = q^{n}\times U_0}$
L'indice des prix de décembre est le 12ème soit U_{11}
$U_{11} = 1,004^{11}\times 100 = 104,49$

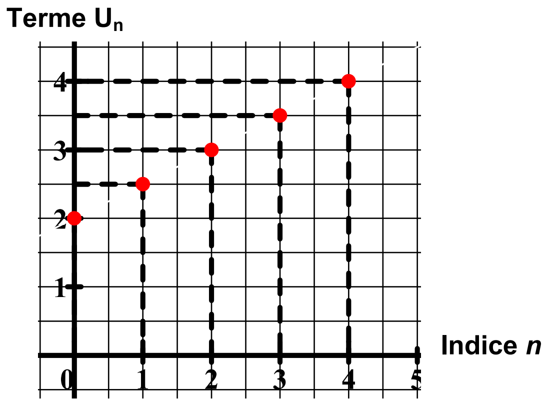
5) Représentation graphique d'une suite

Comme toute fonction, on peut représenter graphiquement une suite. La seule différence, c'est que l'indice n est un nombre entier.

Suite arithmétique

Soit par exemple la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $R = 0{,}5$
On peut faire le tableau de valeurs suivant :

indice n	0	1	2	3	4
terme U_n	2	2,5	3	3,5	4



L'indice n se lit sur l'axe des abscisses
Le terme U_n se lit sur l'axe des ordonnées.
Comme n est un nombre entier et donc ne prend aucune valeur décimale, le début de la suite est donc représentée par l'ensemble des points rouges.

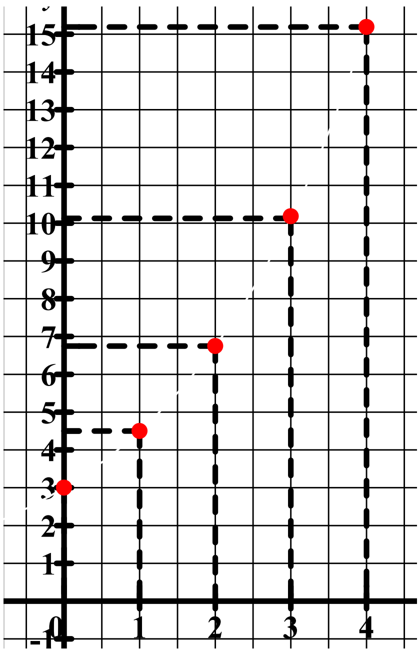
Ces points semblent alignés sur une droite représentative d'une fonction affine : en effet :
de $U_n = U_0 + R\times n$ on déduit
$U_n = 2 + 0{,}5n$ pour la suite n est entier
$f(x) = 2 + 0{,}5x$ pour la fonction affine x est réel
On peut remarquer que la raison R est égale au coefficient directeur de la fonction affine

Croissance d'une suite arithmétique :
Une suite arithmétique de raison positive est croissante
Une suite arithmétique de raison négative est décroissante

Suite géométrique

Soit la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 3$ et de raison $q = 1{,}5$
On peut faire le tableau de valeurs suivant :

indice n	0	1	2	3	4
terme U_n	3	4,5	6,75	10,125	15,1875



Croissance d'une suite géométrique :

Une suite géométrique de raison supérieure à 1 est croissante
Une suite géométrique de raison positive et inférieure à 1 est décroissante

6) Somme des termes d'une suite

Suite arithmétique

Soit la suite arithmétique de 1er terme 5 et de raison 10. on veut calculer la somme des 10 premiers termes :
$S_{10} = 5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 + 65 + 75 + 85 + 95$
Plutôt que de faire cette somme on peut remarquer que :

rang	1er	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème	10ème
termes	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
ordre inversé	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5
somme par colonne	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Faire la somme des dix termes de la dernière ligne est très simple, elle est égale à $10\times 100 = 1000$
Mais 1000 correspond à deux fois S_{10}

Donc $S_{10} = \dfrac{1000}{2} = 500$

Remarquons que l'on a seulement besoin :
du 1er terme 5
du dernier terme 95
du nombre de termes 10

Et dans ce cas $S_{10} = \dfrac{(5+95)\times 10}{2}$

On démontre que cette relation est vraie pour toutes les suites arithmétiques et on peut écrire, si n est le nombre de termes à ajouter :

$$\boxed{\mathbf{S_n = \dfrac{(1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier terme})\times \text{nombre de termes}}{2}}}$$

Présentation des calculs

Que le 1^{er} terme s'appelle U_0 ou U_1 ne doit rien changer à la somme des *n* termes :

Soit une suite arithmétique de 1^{er} terme 2 et de raison 8. On veut calculer la somme des 100 premiers termes de cette suite

On commence par U_1

$U_1 = 2$

Le $100^{ème}$ terme est $U_{100} = 2 + 8\times(100 - 1) = 794$

La somme des 100 premiers termes est

$S_{100} = \dfrac{(2 + 794)\times 100}{2} = 39\ 800$

On commence par U_0

$U_0 = 2$

Le $100^{ème}$ terme est $U_{99} = 2 + 8\times(99) = 794$

La somme des 100 premiers termes est

$S_{100} = \dfrac{(2 + 794)\times 100}{2} = 39\ 800$

Attention

Si on vous demande de calculer

$S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots.. U_n$

Le 1^{er} terme est U_0

Le dernier terme est U_n

Mais il y a $n + 1$ termes

Donc $S = \dfrac{(U_0 + U_n)\times(n + 1)}{2}$

Suite géométrique

Soit la suite géométrique de 1^{er} terme 5 et de raison 3.

Calculer la somme des 6 premiers termes.

On utilise une méthode différente de celle des suites arithmétiques

rang	1^{er}	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$
termes	5	$5\times3 = 15$	$5\times3^2 = 45$	$5\times3^3 = 135$	$5\times3^4 = 405$	$5\times3^5 = 1\ 215$
termes×3	15	45	135	405	1 215	$5\times3^6 = 3\ 645$

Dans la deuxième ligne on multiplie tous les termes par la raison $q = 3$

Maintenant faites la différence entre la deuxième et le première ligne :

$3S_6 - S_6 = 15 + 45 + 135 + 405 + 1\ 215 + 3\ 645 - 5 - 15 - 45 - 135 - 405 - 12\ 15 = 3\ 645 - 5 = 3\ 640$

$2S_6 = 3\ 640$ donc $S_6 = \dfrac{3\ 640}{2} = 1\ 820$

On a donc besoin

Du premier terme 5

De la raison 3

Du nombre de termes 6

et de $5\times3^6 = 3\ 645$ remarquer que la puissance est égale aux nombres de termes.

ce qui donnerait :

$S_6 = \dfrac{5\times3^6 - 5}{3 - 1} = 5\dfrac{3^6 - 1}{3 - 1}$

La formule générale pour toutes les suites géométriques de raison $q \neq 1$

$$\boxed{\mathbf{S_n = (premier\ terme)\times \dfrac{q^{nombre\ de\ termes} - 1}{q - 1}}}$$

Si q = 1 la formule n'est plus utilisable *(on diviserait par 0)*

Mais pour q = 1 tous les termes de la suite sont égaux au premier terme et dans ce cas on a :

S_n = (premier terme)×(nombre de terme)

Présentation des calculs

Soit la suite géométrique de 1^{er} terme 10 et de raison 1,5. Calculer la somme des 20 premiers termes.

1^{er} terme = 10

Raison $q = 1,5$

20 termes

$S_{20} = 10\ \dfrac{1,5^{20} - 1}{1,5 - 1} = 66\ 485,1346$

Remarquez qu'ici on n'a pas besoin de calculer le dernier terme.

Attention

Si on vous demande de calculer

$S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots.. U_n$

Le 1^{er} terme est U_0

Le dernier terme est U_n

Mais il y a $n + 1$ termes

la formule est donc $S = U_0\ \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$