Exponentielle complexe

13.1 Exponentielle complexe

Définition 1 On appelle exponentielle complexe la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ qui est de rayon infini. On a donc :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \ \exp(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Proposition 2 La restriction de l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$ conduit à l'exponentielle réelle .

Proposition 3

$$\begin{array}{rcl}\forall(z,z') & \in & \mathbb{C}^2\ ,\ e^{z+z'}=e^ze^{z'}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ \overline{e^z}=e^{\overline{z}}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ |e^z|=e^{Re(z)}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ |e^z|=1\iff z\in i\mathbb{R}\end{array}$$

Théorème 4 L'application exponentielle est un morphisme continu surjectif de $(\mathbb{C},+)$ sur $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Théorème 5 L'application $\varphi : t\to e^{it}$ est un morphisme continu surjectif de $(\mathbb{R},+)$ sur $(U,\times)$. Il existe un unique réel $a>0$ tel que $\ker\varphi=a\mathbb{Z}$. On note $\pi=\frac{a}{2}$.

Corollaire 6

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ e^{it}=1\Leftrightarrow t\in 2\pi\mathbb{Z}$$

Le sous-groupe des périodes de φ est $2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 7 Il existe une unique application continue φ définie sur le plan complexe privé du demi-axe réel négatif telle que

$$\begin{array}{rcl}\varphi(1) & = & 0\\ \forall z & \in & \mathbb{C},\ \exp(\varphi(z))=z\end{array}$$

Cette fonction est appelée détermination principale du logarithme et coïncide avec la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

13.2 Fonctions circulaires et hyperboliques

Définition 8 On appelle fonctions cosinus et sinus complexes, les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\begin{array}{rcl}\forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ \cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ \sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{array}$$

On appelle fonctions cosinus et sinus hyperboliques complexes, les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\begin{array}{rcl}\forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ ch\ z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ \forall z & \in & \mathbb{C}\ ,\ sh\ z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{array}$$

Proposition 9

$$\begin{array}{rcl}\forall z & \in & \mathbb{C},\ \cos(iz)=ch\ z,\ \ ch(iz)=\cos z\\ \forall z & \in & \mathbb{C},\ \sin(iz)=ish\ z,\ \ sh(iz)=i\sin z\\ \forall z & \in & \mathbb{C},\ e^z=ch\ z+sh\ z,\ \ e^{iz}=\cos z+i\sin z\\ \forall z & \in & \mathbb{C},\ ch^2z-sh^2z=1,\ \ \cos^2 z+\sin^2 z=1\end{array}$$

Proposition 10

$$\begin{array}{rcl} \forall (a,b) & \in & \mathbb{C}^2 \ , \ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \forall (a,b) & \in & \mathbb{C}^2 \ , \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \forall (a,b) & \in & \mathbb{C}^2 \ , \ ch(a+b) = ch\ a\ ch\ b + sh\ a\ sh\ b \\ \forall (a,b) & \in & \mathbb{C}^2 \ , \ sh(a+b) = sh\ a\ ch\ b + ch\ a\ sh\ b \end{array}$$

Proposition 11 L'application cos est paire périodique et son groupe des périodes est $2\pi\mathbb{Z}$.
L'application sin est impaire périodique et son groupe des périodes est $2\pi\mathbb{Z}$.
L'application ch est paire périodique et son groupe des périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.
L'application sh est impaire périodique et son groupe des périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.

Définition 12 Les restrictions des fonctions trigonométriques complexes à $\mathbb{R}$ coincident avec les fonctions trigonométriques réelles dont nous avions admis l'existence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \ \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 13 Les fonctions cos et sin sont de classe C^∞ et $(\cos)' = -\sin, \ (\sin)' = \cos$.

13.3 Théorème de relèvement

Théorème 14 L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une bijection de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{U}\backslash\{-1\}$.
Son application réciproque $u \mapsto Arg(u)$ est continue.sur $\mathbb{U}\backslash\{-1\}$ et ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbb{U}$.

$$(u = x + iy, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad , x \neq 1) \Rightarrow Arg(u) = 2Arc\tan\frac{y}{x+1}$$

Théorème 15 du relèvement :Soit $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{C})$ avec $k \geq 1$ telle que $\forall t \in I, \ |f(t)| = 1$. Il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I, \ f(t) = e^{i\theta(t)}$$

De plus une telle fonction est unique à une constante additive multiple de 2π près.

Corollaire 16 Soit $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{C})$ avec $k \geq 1$. Il existe deux fonctions $(\rho,\theta) \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})^2$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \rho(t) > 0 \ et \ \ f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

De plus une telle fonction est unique à une constante additive multiple de 2π près.