Chapitre 6

ESPACES VECTORIELS

6.1 Savoir Faire

Exercice 6.1 Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Montrer que si E est réunion de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Exercice 6.2 Montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres.

$$(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}\,, \quad f_k(x) = e^{ikx}$$

$$(g_k)_{k\in\mathbb{N}}\,, \quad g_k(x) = (\sin x)^k$$

$$\left((c_k)_{k\in\mathbb{N}}\,, (s_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\,, \quad s_k(x) = \cos kx, \quad s_k(x) = \sin kx$$

Exercice 6.3 Soient a et b deux nombres complexes distincts.
Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un espace vectoriel. Trouver une base de cet espace vectoriel.

Exercice 6.4 Donner une base de l'espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

Exercice 6.5 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P : P(2) = 0\}$ et G l'espace vectoriel des polynômes constants.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Exprimer de la projection p sur G parallèlement à F

Exercice 6.6 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble P des fonctions paires est un espace vectoriel ainsi que l'ensemble I des fonctions impaires.
2. Montrer qu'ils sont suppléméntaires.
3. Déterminer la projection sur P parallèlement à I.

Exercice 6.7 Soient p et q deux projecteurs. Montrer que :

$$p+q \text{ est un projecteur si et seulement si } pq = qp = 0$$

Exercice 6.8 :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$f^2 - 2f + id = 0$$
En cherchant g tel que $fog = id$, montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$u^5 = 0$$
En utilisant une identité remarquable, montrer que $u + id$ est bijective et calculer son inverse.

Exercice 6.9 Soient E, F, G trois K espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\begin{array}{rcl}\forall (f,g) & \in & \mathcal{L}(E,F)^2 \quad |rg(f) - rg(g)| \le rg(f+g) \le rg(f) + rg(g) \\ \forall (f,g) & \in & \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G), \quad rg(f) + rg(g) - \dim F \le rg(gof) \le \inf(rg(f), rg(g))\end{array}$$

Exercice 6.10 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soient a, b, c trois réels distincts.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les formes linéaires suivantes forment une famille libre :

$$\begin{aligned} f_a(P) &= P(a) \quad ; \quad f_b(P) = P(b) \quad ; \quad f_c(P) = P(c) \\ g(P) &= \int_a^b P(t)dt \end{aligned}$$

Exercice 6.11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$\exists w \in \mathcal{L}(E) : u = vow \Leftrightarrow Im\ u \subset Im\ v$$

2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$\exists w \in \mathcal{L}(E) : u = wov \Leftrightarrow \ker v \subset \ker u$$

6.2 Les Classiques

Exercice 6.12 Caractérisation des homothéties
Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout x dans E, on a $(x, f(x))$ est une famille liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 6.13 Polynômes de Lagrange
Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, soient $a_0, ..., a_n$, $n+1$ points distincts de $\mathbb{C}$.
On définit φ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^{n+1} \\ P & \mapsto & P(a_0), ..., P(a_n) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire que pour tout entier $0 \leq n$ il existe un unique polynôme L_i de E que l'on explicitera tel que :

$$\forall j, \ \ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

   ces polynômes sont appelés polynômes de Lagrange associés à $a_0, ..., a_n$

3. Montrer que les polynômes de Lagrange forment une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

Exercice 6.14 Endomorphismes cycliques :
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est cyclique si il existe un vecteur u de E tel que $(f^k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E. Supposons f cyclique.

1. Soit p le plus grand entier tel que $(u, ..., f^{p-1}(u))$ libre.
   Montrer que $p = n$. En déduire $(u, ..., f^{n-1}(u))$ est une base de E.

2. On appelle commutant de f l'ensemble défini par

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \ ; \ gof = fog\}$$

   Pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ on note

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k$$

   Montrer que

$$C(f) = \{P(f) \ ; \ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Exercice 6.15 Noyaux itérés :
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose :

$$N_k = \ker(f^k) \text{ et } \quad I_k = Im(f^k)$$

1. Etudier la monotonie au sens de l'inclusion des suites (N_k) et (I_k)
2. Montrer qu'il existe un p tel que $N_p = N_{p+1}$.
3. Montrer que si $N_p = N_{p+1}$ alors $\forall k \geq p, \quad N_k = N_{k+1}$
4. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p_0.
5. Montrer que N_{p_0}et I_{p_0} sont supplémentaires.
6. Montrer que la suite $(\dim N_{k+1} - \dim N_k)_k$ est décroissante.

Exercice 6.16 Endomorphismes nilpotents :
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad u^k = 0$$

On appelle indice de nilpotence le plus petit entier $k > 0$ tel que $u^k = 0$.
Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que $(x_0, ..., u^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre. En déduire $p \leq n$.
2. Montrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent alors $u + v$ est nilpotent.

Exercice 6.17 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini K à q éléments.

1. Déterminer le nombre de famille libres de E à k éléments.
2. Déterminer le nombre de bases de E.
3. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension k.
4. Déterminer le cardinal de $GL(E)$.

Exercice 6.18 Corps emboîtés
Soient K_1, K_2, K_3 des corps emboîtés, c'est à dire tels que

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3$$

K_2 est un espace vectoriel sur K_1 et K_3 est un espace vectoriel sur K_1 et sur K_2.
On suppose la dimension de K_2 sur K_1 est finie et vaut n et que la dimension de K_3 sur K_2 est finie et vaut m.
Montrer que la dimension de K_3 sur K_1 est finie et vaut nm.

Exercice 6.19 Cardinal d'un corps fini
Soit K un corps fini de caractéristique p. Soit

$$\varphi : k \in \mathbb{Z} \mapsto k1_K$$

1. Montrer que $L = Im\varphi$ est un sous-corps de K isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
2. Montrer que K est un espace vectoriel sur L de dimension finie.
3. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $|K| = p^r$.

6.3 Pour aller plus loin

Exercice 6.20 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E déterminé par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent.
2. Déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 6.21 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 6.22 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer que ceux-ci possèdent un supplémentaire commun.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G$.
   Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 6.23 Soit E un espace vectoriel sur un corps K infini.
Montrer que si E est réunion d'un nombre fini d'espaces vectoriels alors l'un d'entre eux est égal à E.

Exercice 6.24 Soit $\mathbb{K}$ une algèbre intègre sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 2$. On assimile $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}.1$ où 1 est l'élément de $\mathbb{K}$ neutre pour le produit.

1. Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible.
2. Soit a un élément de $\mathbb{K}$ non situé dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre tandis que le famille $(1, a, a^2)$ est liée.
3. Montrer l'existence de $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$.
4. Montrer que si $\mathbb{K}$ est commutative alors $\mathbb{K}$ est isomorphisme à $\mathbb{C}$.

Exercice 6.25 Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des applications polynômiales de K^n homogènes de degré p.

Exercice 6.26 Idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$
On dit qu'un sev $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}(E)$ est un idéal à droite si

$$\forall u \in \mathcal{I}, \forall f \in \mathcal{L}(E),\ u \circ f \in \mathcal{I}$$

1. Montrer que pour tout sev F de E, l'ensemble

   $$\mathcal{I}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : Imu \subset F\}$$

   est un idéal à droite et donner sa dimension en fonction de celle de F.
2. Soient F et G deux sev de E, déterminer $\mathcal{I}_F \cap \mathcal{I}_G$ et $\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G$.
3. Montrer que tout idéal à droite est de la forme $\mathcal{I}_F$ pour un unique sev F et que il peut s'écrire

   $$p \circ \mathcal{L}(E) = \{p \circ f : f \in \mathcal{L}(E)\}$$

   où p est un projecteur de E

Exercice 6.27 Idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$
On dit qu'un sev $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}(E)$ est un idéal à droite si

$$\forall u \in \mathcal{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E),\ f \circ u \in \mathcal{K}$$

1. Montrer que pour tout sev F de E, l'ensemble

$$\mathcal{K}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : F \subset \ker u\}$$

   est un idéal à gauche et donner sa dimension en fonction de celle de F.

2. Soient F et G deux sev de E, déterminer $\mathcal{K}_F \cap \mathcal{K}_G$ et $\mathcal{K}_F + \mathcal{K}_G$.

3. Montrer que tout idéal à gauche est de la forme $\mathcal{K}_F$ pour un unique sev F et que il peut s'écrire

$$\mathcal{L}(E) \circ p = \{f \circ p : f \in \mathcal{L}(E)\}$$

   où p est un projecteur de E

Exercice 6.28 Soit E un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère si c'est un idéal à droite et à gauche.

1. Montrer en utilisant l'exercice précédent que les seuls idéaux bilatères sont $\mathcal{L}(E)$ et $\{0\}$.

2. Montrer que ce n'est pas le cas en dimension infinie. On admettra que tout sev admet un supplémentaire.

Exercice 6.29 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $k \in [1, n-1]$. Que peut-on dire d'un endomorphisme u de E laissant stables tous les sous-espaces de dimension k.

Exercice 6.30 Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, .., u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que peut-on dire de $u_1....u_n$?

Exercice 6.31 Formule de Burnside :
Soit E un $C-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et G un sous-groupe fini de $GL(E)$.On pose

$$E^G = \{x \in E : \forall g \in G, g(x) = x\}$$

Montrer que

$$\dim E^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(g)$$

Exercice 6.32 Théorème de Maschke
Soit E un $C-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et G un sous-groupe fini de $GL(E)$.et F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 6.33 Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Montrer que tout automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est de la forme

$$u \longmapsto \tau \circ u \circ \tau^{-1}$$

où $\tau \in GL(E)$