Chapitre 2

SERIES NUMERIQUES

2.1 Méthodes

2.1.1 pour prouver la convergence :

- Regarder si le terme général tend vers 0
- Regarder si la série est absolument convergente en cherchant un équivalent de la valeur absolue, puis en fonction de la forme:
  1. Soit comparer avec une série de Riemann ou de Bertrand
  2. Soit utiliser la règle de d'Alembert si le quotient de deux termes consécutifs est simple.
  3. Soit comparer avec une intégrale
- Penser aussi à faire apparaître une série télescopique
- Si il n'y a pas absolue convergence:
  1. Si l'expression est simple, essayer d'utiliser le critère spécial des séries alternées.
  2. Sinon en faisant un développement limité, faites apparaître des termes absolument convergents, semi-convergents, et éventuellement un terme divergent.

2.1.2 pour prouver la convergence et calculer des sommes :

On pourra :

- Essayer de faire apparaître une série géométrique, en particulier avec cos, sin
- Essayer de faire apparaître une série télescopique.
- Regrouper les termes 2 par 2, 3 par 3.
- Décomposer en éléments simples et éventuellement utiliser la constante d'Euler.
- Essayer de comparer avec une intégrale.

2.1.3 en général

- penser aux comparaisons série intégrale
- penser aux équivalents de sommes et des restes d'une série

2.1.4 erreurs à éviter

- Ne pas utiliser les théorèmes de comparaison sur les séries qui ne sont pas à termes positifs.
- Dans les calculs de somme écrire précisément les bornes pour les indices.

2.2 Savoir faire :

Exercice 2.1 Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ 2) $th\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)$ 3) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ 4) $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$ 5) $n^{-\ln(\ln n))}$

6) $n^{-ch\left(\frac{1}{n}\right)}$ 7) $n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$ 8) $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ 9) $\frac{1}{n}(\ln n)^{-ch\frac{1}{n}}$ 10) $(\ln n\ln(chn))^{-1}$

11) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 12) $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$ 13) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ 14) $\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^{(\ln n)^2}$ 15) $\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

16) $\frac{n^n}{2^{n^3}}$ 17) $\frac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$ 18) $\left(ch\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$ 19) $\left(sh\sqrt[3]{\ln n}\right)^{-3}$ 20) $(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})^{-\sqrt{n}}$

Exercice 2.2 Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 2) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}$ 3) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$ 4) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}}$

5) $(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ 6) $\frac{(-1)^n\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n+2}}$ 7) $(-1)^n Arc\sin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right)$ 8) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n}$

9) $(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ 10) $\frac{(-1)^n}{\cos n+n^{\frac{3}{4}}}$ 11) $(-1)^n n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ 12) $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

13) $\frac{(-1)^n}{(\ln n+(-1)^n)^2}$ 14) $(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-e^{-1}\right)$ 15) $\cos\left(\pi n^2\ln\frac{n}{n-1}\right)$ 16) $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$

Exercice 2.3 Etudier la convergence et la somme éventuelle des séries suivantes :

$$\sum x^n\cos nx\ ,\ \sum x^n\sin nx$$

Exercice 2.4

1. Ecrire $cos\frac{x}{2}$ en fonction de $sinx$ et de $sin\frac{x}{2}$.
2. Soit $a\in]0,\frac{\pi}{2}[$. En faisant apparaître une série télescopique, étudier la convergence et la somme éventuelle de la série suivante :

$$\sum\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$$

Exercice 2.5

1. Calculer les sommes partielles en regroupant les termes 2 par 2 de la série suivante :

$$\sum(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

2. Etudier la convergence et la somme éventuelle de la série.

2.3 Les classiques :

Pour les Mines, Centrale, l'X ou les ENS ces exercices doivent pouvoir être refaits sans question intermédiaire.

Exercice 2.6 Calcul de $\sum_k k^p$

1. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $X^2=P(X+1)-P(X)$

2. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

3. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 2.7 Règle de Raabe-Duhamel
Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta > 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta})$$

1. Soit $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que la suite $\ln(\frac{a_n}{u_n})$ est convergente. On pourra étudier la série télescopique associée.

2. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$a_n \sim A\frac{1}{n^\alpha}$$

3. En déduire la nature de la série $\sum a_n$ en fonction de α

Exercice 2.8 Transformation d'Abel
On pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad v_n = e^{in\beta}, \;\; \beta \notin \;2\pi\mathbb{Z}, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

1. Montrer que le suite (V_n) est bornée.

2. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k(V_k - V_{k-1})$$

   calculer

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

   en fonction de

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})V_k$$

3. Etudier en fonction de α la nature de la série

$$\sum \frac{e^{in\beta}}{n^\alpha}$$

Exercice 2.9 Recherche d'équivalent de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$
Soit f une application continue de $[0, a]$ dans lui-même admettant un développement limité à droite de 0

$$f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 1$$

On suppose que $\forall x > 0, \quad 0 < f(x) < x$.
On considère la suite définie par

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

2. Chercher un réel β tel que la suite v_n ait une limite non nulle avec:

$$v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$$

3. En déduire un équivalent de (u_n).

4. Trouver un équivalent de la suite (u_n) définie par récurrence

$$0 < u_0 < \frac{\pi}{2}, \qquad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Exercice 2.10 1. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle même est une série divergente.

2. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ par elle même est une série convergente.

2.4 Pour aller plus loin :

Exercice 2.11 Une caractérisation des rationnels

1. Soit $x = 0,037037037....037.. = 0,\overline{037}$ où 037 est répété une infinité de fois.
   (a) Ecrire x comme somme d'une série.
   (b) Montrer que x est un rationel que l'on calculera.
   (c) Faire la même chose avec $y = 0,027027027....027.. = 0,\overline{027}$ où 027 est répété une infinité de fois.

2. Montrer qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité propre est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 2.12 Soit (a_n) une suite décroissante positive. On suppose que $\sum a_n$ converge. En introduisant $S_{2n} - S_n$, montrer que

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2.13 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $0 < u_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.

2. On suppose $\sum u_n$ diverge.
   (a) Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que si $\alpha = 1$ alors la série $\sum v_n$ diverge.
   (b) Montrer que si $\alpha < 1$ alors la série $\sum v_n$ diverge.
   (c) Comparer v_n et $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}$. Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum v_n$ converge.

3. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 2.14 Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1$
Montrer en introduisant une série double que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}}$$

Exercice 2.15 Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} a_n$ avec

$$a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$$

Exercice 2.16 Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \sqrt{u_{2n} u_n}$

Exercice 2.17 Nature de la série $\sum a_n$ avec

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 2.18 Montrer à l'aide de deux méthode différentes que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$$

Exercice 2.19 Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de $\sum a_n$ avec

$$a_n = n^a \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exercice 2.20 Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} a_n$ avec

$$a_n = Arc\cos\left(\frac{2}{\pi} Arc\tan(n^2)\right)$$

Exercice 2.21 En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n^a}{\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2}$$

Exercice 2.22 Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = (ln(2n+1))^\alpha - (ln(2n))^\alpha$$

Exercice 2.23 Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $p(n)$ le nombre de chiffre de l'écriture décimale de n.
Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} (10 - n^{\frac{1}{p(n)}})$$

Exercice 2.24 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$$

Déterminer la nature de $\sum R_n$

Exercice 2.25 **Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente.
Montrer que pour tout réel S il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge vers S.