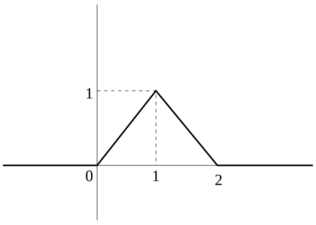
CENTRALE-SUPELEC 97 FILIERE PSI

PARTIE 1 - Préliminaires

1.A.
Soit φ la fonction continue définie sur $\mathbf{R}$ par : $t \mapsto \varphi(t) = \sup\{1 - |t-1|, 0\}$
Pour $t < 1$, $\varphi(t) = \sup\{t, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \end{cases}$
Pour $t \geq 1$, $\varphi(t) = \sup\{2-t, 0\} = \begin{cases} 2-t & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < t \end{cases}$
D'où la représentation graphique :



$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)dt = \int_0^2 \varphi(t)dt = 1$$

1.B.
1.B.1)

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)$$

avec :
$(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes,
$(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$
et $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels tels que, $\forall n \geq 1$, $0 < r_n < \dfrac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}$.

$0 < \dfrac{t-\lambda_n}{r_n} < 2 \iff 0 < t - \lambda_n < 2r_n \iff \lambda_n < t < 2r_n + \lambda_n < \lambda_{n+1}$. Donc, pour tout $t \in [0, +\infty[$, un terme au plus de la série est non nul, donc la série converge. g est bien définie sur $[0, +\infty[$.
De plus, pour tout $A > 0$, il existe un entier n_0 tel que, si $n > n_0$, $\lambda_n \geq A$.
Ainsi, pour tout $t \in [0, A]$, $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)$. Donc g est continue sur $[0, A]$ (comme somme finie de fonctions continues).

$$\boxed{g \text{est définie et continue sur } [0, +\infty[}$$

1.B.2) Pour tout $t \in [\lambda_p, \lambda_{p+1}]$, $g(t) = \dfrac{a_p}{r_p} \varphi\left(\dfrac{t-\lambda_p}{r_p}\right)$. Par le changement de variable $u = \dfrac{t-\lambda_p}{r_p}$, on obtient :

$$\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)dt = \frac{a_p}{r_p} \int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} \varphi\left(\frac{t-\lambda_p}{r_p}\right) dt = a_p \int_0^{\frac{\lambda_{p+1}-\lambda_p}{r_n}} \varphi(u)du$$

Or, $\dfrac{\lambda_{p+1}-\lambda_p}{r_n} > 2$, donc la dernière intégrale vaut 1 et

$$\boxed{\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)dt = a_p}$$

1.C. Si h est une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$, admettant une limite finie L en $+\infty$, alors h est bornée.
En effet, il existe A tel que, pour $x \geq A$, $|h(x)| \leq |L|+1$. Sur $[0,A]$, h est définie et continue donc bornée.
Soit M un majorant de $|h|$ sur $[0,A]$ et $M_1 = sup\{|L|+1, M\}$, alors, pour tout x de $[0,+\infty[$, $|h(x)| \leq M_1$.

PARTIE 2 - Exemples

Dans cette partie, on choisit $\lambda_n = \ln n$ pour tout $n \geq 1$.

2.A. On pose, $u_n(x) = a_n e^{-\ln(n)x}$
2.A.a) Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1$ donc $u_n = \frac{1}{n^x}$. La série $\sum u_n$ est à termes réels positifs, elle converge si et seulement si $x > 1$ donc

$$\boxed{\gamma = \delta = 1 \text{ et } I_A = I_B =]1,+\infty[}$$

2.A.b) Pour tout $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n(n+1)}$ et $u_n = \frac{\ln n}{n^{x+1}(n+1)}$. $|u_n| \sim \dfrac{\ln n}{n^{x+2}}$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement si $x \leq 2$, et converge absolument si et seulement si $x > -1$ (série de Bertrand).
Si $x > -2$, la série est à termes alternés, la suite $(|u_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 0, donc la série $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\gamma = -2,\ \delta = -1 \text{ et } I_A =]-1,+\infty[,\ I_C =]-2,+\infty[}$$

2.B. On suppose ici que I_A et I_C sont non vides et minorés.
2.B.1) Si $\Re(z) > \delta$, il existe $d \in I_A$ tel que $\Re(z) > d$, donc $|u_n(z)| < |u_n(d)|$ et $\sum |u_n(z)|$ converge.

2.B.2) $I_A \subset I_C$ donc $\gamma \leq \delta$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in I_C$, $\gamma \leq c \leq \gamma+\varepsilon$. $u_n(c) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n(c+1+\varepsilon = u_n(c)\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ donc $\sum u_n(c+1+\varepsilon)$ converge absolument. Ainsi, il existe un élément $(c+1+\varepsilon) \leq (\gamma+1+2\varepsilon)$ appartenant à I_A et donc supérieur ou égal à δ.
Ceci prouve que pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta \leq \gamma+1+2\varepsilon$ et donc $\delta \leq \gamma+1$.

2.B.3) Dans l'exemple de la question 2.A.a), $\gamma = \delta$.

2.B.4) Dans l'exemple de la question 2.A.b), $\gamma+1 = \delta$.

2.C. Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

$\dfrac{u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^x} - 1^n}{\sqrt{n}}$. La série $\sum |u_n$ converge si et seulement si $x = \dfrac{1}{2} > 1 ssi x > \dfrac{1}{n}$. Donc $\delta = \dfrac{1}{2}$.

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x}\left((-1)^n\sqrt{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{n^{x+1}} + o\left(\frac{1}{n^{x+1}}\right)$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement lorsque $x \leq \dfrac{1}{2}$, pour $x > \dfrac{1}{2}$, la première série de la somme ci-dessus converge (critère spécial des séries alternées), la deuxième converge si et seulement si $x > 0$. $\sum u_n$ converge si et seulement si $x > 0$ donc $\gamma = 0$.

$$\boxed{\gamma = 0, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad \gamma < \delta < \gamma + 1}$$

PARTIE 3 - Etude d'un cas particulier

Dans cette partie, on choisit $\lambda_n = \ln(n+1)$ et $a - n = (-1)^n \dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.
On note U la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall\ x \geq 0, \quad U(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n(n+1)^{1+x}}$$

3.A. Les fonctions $u_n : x \mapsto a_n e^{-\lambda_n x} = (-1)^n \dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)^{1+x}}$ sont définies et continues (et même C^∞) sur $\mathbf{R}$.
Pour tout $x \geq 0$, $|u_n(x)| \leq |a_n| = \dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$. Ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, +\infty[$ et donc la continuité de U sur cet intervalle.

3.B. Montrons que, pour x fixé, la suite $(|u_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante. En effet, introduisons la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(t+1)}{t(t+1)^{x+1}}$. Elle est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$h'(t) = \frac{1}{t(t+1)^{x+2}} - \ln(t+1)\left[\frac{t}{t^2(t+1)^{x+1}} + \frac{(x+1)}{t(t+1)^{x+2}}\right] = \frac{(x+2)t+1}{t^2(t+1)^{x+2}}\left[\frac{t}{(x+2)t+1} - \ln(t+1)\right]$$

Soit la fonction $h_1 : t \mapsto h_1(t) = \dfrac{t}{(x+2)t+1} - \ln(t+1)$.
$h_1'(t) = \dfrac{1}{((x+2)t+1)^2} - \dfrac{1}{t+1}$ est négative pour tout $t \geq 0$ et $x > 0$. Donc, h_1 est négative (car $h_1(0) = 0$) et h' aussi. h est décroissante (cqfd).
Donc, pour tout $x \geq 0$, $|U(x)|$ est majoré par $|u_1(x)|$ (critère spécial des séries alternées).

$$|U(x)| \leq |u_1(x)| = \frac{\ln(2)}{2^{x+1}} \qquad\qquad U(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.C. Pour tout n, u_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et $u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \dfrac{\ln(n+1)^{p+1}}{n(n+1)^{x+1}}$. Pour tout p, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. Donc U est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

3.D. Par un raisonnement identique à celui de la question 3.B, montrons que pour x fixé, la suite $(|u'_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante. En appliquant le critère spécial, $U(x)$ est du même signe que $u_1(x)$, c'est à dire positif.
Posons donc : $h(t)\dfrac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}(t+1)^\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{x+1}{2}$.

$$h'(t) = \frac{(2\alpha+1)t+1}{2t\sqrt{t}(t+1)^{\alpha+1}}\left[\frac{2t}{(2\alpha+1)t+1}\ln(t+1)\right]$$

Notons h_1 la fonction entre crochets, $h'_1(t) = \frac{2}{(x+2)t+1} - \frac{1}{t+1} \leq 0$ et on conclut comme ci-dessus.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ est } C^\infty \text{ et croissante sur } [0,+\infty[\text{ et } U(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

3.E.
3.E.1) Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+1)^{x+1}}$ est une primitive de u_n. Elle est admet une limite en $+\infty$ donc u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3.E.2)

La série $\sum f_n(0) = \sum (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge, donc la somme Fde la série $\sum f_n$ est une primitive de U.
Pour tout $x \geq 0$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses du criyère spécial des séries alternées, ce qui permet comme en 3.B de prouver que sa somme F a une limite nulle en $+\infty$. D'où U est intégrable sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} U(x)dx = -F(0) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{p}\frac{-1}{(2k-1)(2k)} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k(2k+1)} = \sum_{k=1}^{p}\frac{-1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{p}\frac{-1}{2k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2p+1} - 2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{-1}{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{2p+1} - 2\sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} = 1 - 2\ln 2 + \varepsilon\left(\frac{1}{p}\right)$$

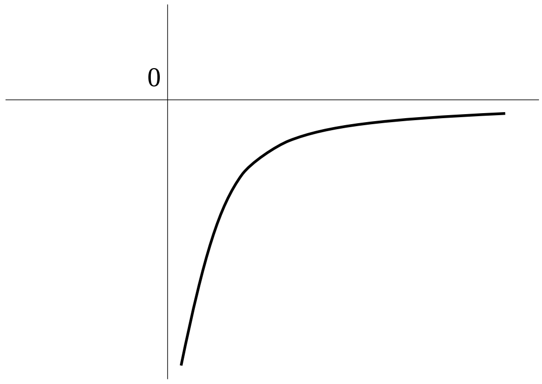
$$\boxed{\int_0^{+\infty} U(x)dx = 1 - 2\ln 2}$$

3.F.

$$U(0) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$$

Comme on l'a vu précédemment, c'est une série vérifiant les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On peut donc décomposer, pour un n donné, $U(0) = S_n + R_n$ (où S_n désigne la somme des n premiers termes, et R_n le reste). On sait alors que R_n est du signe de son premier terme (soit du signe de $(-1)^{n+1}$) et majoré en valeur absolue par ce terme soit $\dfrac{\ln(n+2)}{(n+1)(n+2)}$.
En négligeant les erreurs machines, on obtiendra une valeur approchée à 10^{-1} prés en choisissant n tel que $\dfrac{\ln(n+2)}{(n+1)(n+2)} \leq 10^{-1}$ soit $n = 3$ (cette faible valeur justifie que l'on néglige les erreurs machines) et $\tilde{S}_3 = -0,3$.
Un étude analogue montre que pour $U'(0)$, il faut choisir $n = 5$ et $\tilde{S}'_5 = 0,2$.

3.G. Allure de la courbe :



PARTIE 4 - Etude de I_A et I_C dans le cas général

$$I_A = \{x \in \mathbf{R} \ / \sum |u_n(x)| \ \text{ converge}\} \qquad I_C = \{x \in \mathbf{R} \ / \sum u_n(x) \ \text{ converge}\}$$

4.A.
4.A.1) Soit $x_0 \in I_A$. Alors, pour tout $x \geq x_0$ et tout $n \geq 1$, $|u_n(x)| \leq |u_n(x_0)|$, donc $x \in I_A$.
I_A est donc soit vide, soit égal à $\mathbf{R}$, soit un intervalle de la forme $]\delta, +\infty[$ ou $[\delta, +\infty[$.

4.A.2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\lambda_n = \ln(\ln(n+1))$ et $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n+1)^x)}$.
Pour tout x, $n^{\frac{2}{3}}|u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, il existe un entier n_x tel que, pour tout $n \geq n_x$, $|u_n(x)| \geq \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. La série $\sum |u_n(x)|$ est donc divergente.
Pour tout x,

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right]^x = (1+\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right]^x\left[1+\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\ln n}\right]^x = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La suite $(|u_n(x)|)_{n\geq 1}$ est donc décroissante à partir d'un certain rang. Le critère spécial des séries alternées s'applique, $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } x, \sum |u_n(x)| \text{ diverge et } \sum u_n(x) \text{ converge donc } I_A = \phi \text{ et } I_C = \mathbf{R}}$$

4.A.3) Si on choisit les mêmes λ_n et $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors $I_A = I_C = \phi$.

4.A.4) Si on choisit les mêmes λ_n et $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $I_A = I_C = \mathbf{R}$.

4.B. On suppose I_C non vide et minoré, on note γ sa borne inférieure.
4.B.1) Si les a_n sont réels positifs, et si $\Re(z) > \gamma$, il existe $\beta \in I_C$ tel que $\Re(z) \geq \beta$.Posons $z = \beta + x + iy$ (avec $x \geq 0$).

$$|u_n(z)| = a_n e^{-\lambda_n \beta} e^{-\lambda_n x} \leq u_n(\beta)$$

La série $\sum u_n(\beta)$ converge, donc la série $\sum u_n(z)$ converge absolument et $z \in I_A \subset I_C$.

4.B.2)

a) Soit $L = \lim_{x\to+\infty} F(t)$. Définissons la fonction $h : t \mapsto h(t) = F(t)e^{(\alpha-z)t}$. Elle est définie et continue sur $[0,+\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle. De plus, en $+\infty$, $|h(t)| \sim e^{(\alpha-x)tL}$ où $x = \Re(z) > \alpha$. La fonction h est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

b)

$$\int_0^{\lambda_n} f(x)e^{-zx}dx = \int_0^{\lambda_n} f(x)e^{-\alpha x}e^{(\alpha-z)x}dx = \left[F(x)e^{(\alpha-z)x}\right]_0^{\lambda_n} - \int_0^{\lambda_n}(\alpha-z)F(x)e^{(\alpha-z)x}dx$$

Le terme intégré a une limite finie lorsque $n \to +\infty$ (et λ_n aussi) puisque F a une limite finie en $+\infty$. L'intégrale a aussi une limite finie d'aprés la question précédente.

La suite $\left(\int_0^{\lambda_n} f(x)e^{-zx}dx\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

4.B.3) La série $\sum u_n(z)$ converge si et seulement si la série $\sum v_n(z)$ converge.
Or, il existe $\alpha \in I_C$ tel que $\Re(z) > \alpha$. Pour cet α, $\sum u_n(\alpha)$ converge donc aussi $\sum v_n(\alpha)$. Posons $G(t) = \int_0^t g(x)e^{-\alpha x}$. La suite $(G(\lambda_n))_{n\geq 1}$ converge.
La fonction g est définie et continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. Il suffit de montrer que G a une limte finie en $+\infty$.
Pour tout $x > 0$, il existe λ_n tel que : $\lambda_n \leq x \leq \lambda_{n+1}$. On a alors :

$$G(x) = G(\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^x g(t)e^{-\alpha t}dt = G(\lambda_n) + \frac{a_n}{r_n}\int_{\lambda_n}^x \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)e^{-\alpha t}dt$$

$$0 \leq \int_{\lambda_n}^x \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)dt \leq\leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)e^{-\alpha t}dt = \frac{r_n}{a_n}v_n(\alpha)$$

$$|G(x) - G(\lambda_n)| \leq |v_n(\alpha)$$

Soit l la limite de la suite $(G(\lambda_n))_{n\geq 1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et n_1 tels que $|G(\lambda_n) - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, et $|v_n(\alpha)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. Soit $N = sup(n_0, n_1)$, et $A = \lambda_N$,
Pour tout $x \geq A$, $|G(x) - l| \leq 2\varepsilon$.
Ainsi, G a une limte finie en $+\infty$.