

CORRIGE DE L'EPPREUVE DE MATHS1 MINE 07 proposé par A.NAIMI
PROFESSEUR DE MATHS AU LYCEE TECHNIQUE-MOHEMMADIA.

I. CAS PARTICULIERS

1. Par C. on a $\chi(1.1) = \chi(1) \cdot \chi(1)$, donc $(\chi(1))^2 = \chi(1)$, donc $\chi(1) = 1$ ou $\chi(1) = 0$.

Mais toujours par le C. : pour tout a entier relatif $\chi(a.1) = \chi(a) \cdot \chi(1)$ et l'application χ n'est pas identiquement nulle, donc $\chi(1) \neq 0$ et par suite $\chi(1) = 1$.

2. Par le D. l'application χ est 2-periodique donc pour tout entier relatif a , on a :

$\chi(2k) = \chi(0) = 0$ et $\chi(2k+1) = \chi(1) = 1$. d'où l'application χ .

3. On a $\chi(1) = 1$ et donc moyennant le C. : $(\chi(-1))^2 = 1$, donc $\chi(-1) = 1$ ou $\chi(-1) = -1$. D'autre part χ est 4-periodique et donc $\chi(3) = \chi(3-4) = \chi(-1)$. d'où le resultat.

4. On a pour tout entier naturel p ,

$$S_p = \sum_{k=1}^{4p+3} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=1}^p \frac{\chi(4k)}{4k} + \sum_{k=0}^p \frac{\chi(4k+1)}{4k+1} + \sum_{k=0}^p \frac{\chi(4k+2)}{4k+2} + \sum_{k=0}^p \frac{\chi(4k+3)}{4k+3}.$$

D'autre part, comme χ est 4-periodique et $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$, $\chi(2) = 0$ car 2 n'est pas premier avec 4 et $\chi(3) = -1$, alors pour tout entier k , $\chi(4k) = \chi(4k+2) = 0$, $\chi(4k+1) = 1$ et $\chi(4k+3) = -1$.

$$\text{Alors } S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{4k+1} - \sum_{k=0}^p \frac{1}{4k+3} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{2(2k)+1} - \sum_{k=0}^p \frac{1}{2(2k+1)+1} = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{2k}}{2(2k)+1} + \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{2k+1}}{2(2k+1)+1}.$$

Donc $S_p = \sum_{n=0}^{2p+1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et compte tenu du rappelle, on conclue que la suite $(S_p)_p$ converge vers $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Or la suite

$(\frac{\chi(k)}{k})_k$ converge vers 0, puisque les quatres sous suites $(\frac{\chi(4k)}{4k})_k$, $(\frac{\chi(4k+1)}{4k+1})_k$, $(\frac{\chi(4k+2)}{4k+2})_k$, $(\frac{\chi(4k+3)}{4k+3})_k$ convergent vers 0.

On conclue alors que la serie $\sum \frac{\chi(k)}{k}$ converge et que sa somme est $\frac{\pi}{4}$.

II CONVERGENCE DE LA SERIE $\sum \frac{\chi(k)}{k}$.

5. On sait que $(Z/NZ)^* = \{\bar{k} / k \in P\}$ et que ce dernier est un groupe multiplicatif.

D'autre par puisque a est premier avec N alors $\bar{a} \in (Z/NZ)^*$ et donc

$\bar{a} \cdot (Z/NZ)^* = (Z/NZ)^*$, par suite $\prod_{k \in P} \bar{a} \cdot \bar{k} = \prod_{k \in P} \bar{k}$, or P est de cardinal $\Phi(N)$, donc cette égalité devient : $(\bar{a})^{\Phi(N)} \cdot \prod_{k \in P} \bar{k} = \prod_{k \in P} \bar{k}$, mais dans un groupe tout élément est inversible et $\prod_{k \in P} \bar{k}$ est dans le groupe $(Z/NZ)^*$ et par suite $(\bar{a})^{\Phi(N)} = \bar{1}$

ou encore $\overline{a^{\Phi(N)}} = \bar{1}$ d'où $a^{\Phi(N)} - 1$ est multiple de N .

6. D'après le 5) il existe q entier tel que $a^{\Phi(N)} - 1 = qN$ donc $a^{\Phi(N)} = 1 + qN$. Mais χ est N -périodique donc $\chi(a^{\Phi(N)}) = \chi(1)$, d'autre part d'après 1) $\chi(1) = 1$ et puisque l'application χ est multiplicatif, alors $\chi(a^{\Phi(N)}) = (\chi(a))^{\Phi(N)}$ donc $(\chi(a))^{\Phi(N)} = 1$ ou encore

$$|\chi(a)|^{\Phi(N)} = 1 \text{ d'où } |\chi(a)| = 1.$$

7. Soient k, s des éléments de $\{1, \dots, N-1\}$ tels que $r_k = r_s$, alors $\bar{r}_k = \bar{r}_s$.

Mais r_k (resp r_s) est le reste de la division euclidienne de ak (resp as) par N et donc $\bar{r}_k = \overline{ak}$ et $\bar{r}_s = \overline{as}$, par suite $\overline{ak} = \overline{as}$ ou encore $\bar{a} \cdot \bar{k} = \bar{a} \cdot \bar{s}$ mais $\bar{a}$ est dans le groupe $(Z/NZ)^*$, en composant à gauche par son inverse, on obtient $\bar{k} = \bar{s}$, donc $|k-s|$ est multiple de N , or ce dernier entier est strictement inférieur à N , il est donc nul et par suite $k = s$.

On conclue alors que les r_k sont deux à deux distincts.

8. Pour tout k entre 1 et $N-1$, r_k est le reste de la division de ak par N , il est donc compris entre 0 et $N-1$, d'autre part r_k ne peut être nul, car sinon N divisera ak et par le théorème de Gauss (N est premier avec a), N divisera k , ce qui est impossible puisque k est entre 1 et $N-1$. On a donc $\{r_k / k \in \{1, \dots, N-1\}\} \subset \{1, \dots, N-1\}$ et les r_k sont deux à deux distincts et par suite le premier ensemble est de cardinal $N-1$, On conclue alors que $\{r_k / k \in \{1, \dots, N-1\}\} = \{1, \dots, N-1\}$,

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

D'autre part puisque χ est N -périodique et r_k est le reste de la division euclidienne de ak par N , alors $\chi(ak) = \chi(r_k)$. D'où l'égalité demandée.

9. D'une part, on a $\chi(a) = -1$ puisque d'après 6), $|\chi(a)| = 1$ et par hypothèse $\chi(a) \neq 1$

D'autre part compte tenu de l'égalité de question 8) et du fait que χ est multiplicative, il vient : $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(a) \cdot \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$

ou encore $\chi(a) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$, donc

$$-\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k), \text{ donc } \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0, \text{ mais } \chi(0) = 0 \text{ et par suite } \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$$

Soit alors n entier naturel et supposons $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0$ alors

$$\sum_{k=n+1}^{n+N} \chi(k) = \sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) + \chi(n+N) - \chi(n). \text{ Or } \chi \text{ est } N\text{-périodique donc } \chi(n+N) - \chi(n) = 0, \text{ d'où } \sum_{k=n+1}^{n+N} \chi(k) = 0.$$

On donc montré par recurrence que pour tout n entier $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0$.

10. Soit m un entier > 0 .

* Si $m \leq N-1$ alors $\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \sum_{k=1}^m |\chi(k)| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |\chi(k)|$.

Mais par definition de χ , on a $\chi(k) = 0$ pour tout k non premier avec N et par suite

$\sum_{k=1}^{N-1} |\chi(k)| = \sum_{k \in P} |\chi(k)|$, d'autre part on a vu dans le 6) que pour tout $a \in P$, $|\chi(a)| = 1$ et donc $\sum_{k \in P} |\chi(k)| = \text{card}(P) = \Phi(N)$, d'où l'inégalité demandée.

** Si $m \geq N$. La division euclidienne de m par N donne l'existence de q et de $r \in \{0, \dots, N-1\}$, tels que $m = qN + r$ alors :

$\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=0}^m \chi(k) = \sum_{k=0}^{qN+r} \chi(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) + \sum_{k=N}^{N+N-1} \chi(k) + \dots + \sum_{k=(q-1)N}^{(q-1)N+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{qN+r} \chi(k)$. Or d'après le 9), tous les termes de cette dernière somme sont nuls sauf peut-etre le dernier et par suite

$\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=qN}^{qN+r} \chi(k)$. et puisque χ est N -périodique alors : $\sum_{k=qN}^{qN+r} \chi(k) = \sum_{k=qN}^{qN+r} \chi(k - qN)$ et $\sum_{k=qN}^{qN+r} \chi(k - qN) = \sum_{k=0}^r \chi(k)$ (après changement d'indice). On donc :

$\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=0}^r \chi(k)$. Si $r = 0$ alors cette dernière somme est nulle et si $r > 0$, alors d'après ce qui précède $\left| \sum_{k=0}^r \chi(k) \right| \leq \Phi(N)$ (c'est la première étape), d'où $\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \Phi(N)$.

11. On va montrer que cette suite est de cauchy en utilisant la trasformation d'ABEL appelé au debut de l'enoncé.

Notons alors pour tout k entier ≥ 1 , $\alpha_k = \chi(k)$, $u_k = \frac{1}{k}$ et $T_k = \sum_{p=0}^k \alpha_p$.

Et soit $\epsilon > 0$.

Alors pour tout n, m entiers tels que $2 \leq n < m$:

$$\sum_{k=n}^m \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=n}^m \alpha_k \cdot u_k = -u_n \cdot T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k \cdot (u_k - u_{k+1}) + u_m \cdot T_m. (*)$$

Or la suite $(u_k)_k$ converge vers 0 et d'après le 10). la suite $(T_k)_k$ est bornée, donc les suites $(u_k \cdot T_{k-1})_k$ et $(u_k \cdot T_k)_k$ convergent vers 0, il existe alors un entier n_1 , tel que pour tout entier $k \geq n_1$, $|u_k \cdot T_{k-1}| \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $|u_k \cdot T_k| \leq \frac{\epsilon}{3}$.

D'autre part, on a pour tout $k \geq 2$, $|T_k \cdot (u_k - u_{k-1})| \leq \varphi(N) \cdot (u_{k-1} - u_k) = \frac{\varphi(N)}{k(k-1)}$ et cette dernière suite est le terme général d'une serie convergente, donc par comparaison des series la serie $\sum |T_k \cdot (u_k - u_{k-1})|$ converge, donc la serie $\sum T_k \cdot (u_k - u_{k-1})$ est absolument convergente et donc convergente. Sa suite des sommes partielles est donc de cauchy et par suite il existe un entier $n_0 \geq 2$, tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $m > n$, $\left| \sum_{k=n}^{m-1} T_k \cdot (u_k - u_{k-1}) \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Et donc compte tenue de l'égalité (*) et en utilisant l'inegalité triangulaire, il vient : pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ et pour tout $m > n$

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{\chi(k)}{k} \right| \leq |-u_n \cdot T_{n-1}| + \left| \sum_{k=n}^{m-1} T_k \cdot (u_k - u_{k+1}) \right| + |u_m \cdot T_m| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

La suite en question est une suite de nombres réels de cauchy, elle est donc convergente.

III COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

12. Si l'un des entiers n ou m vaut 1, alors l'égalité est trivial, sinon leurs décompositions en facteurs premiers s'écrit : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et $m = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$ avec α_i et β_i des entiers non nuls, $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r$ des entiers premiers et distincts deux à deux. Alors la décomposition en facteurs premier du produit mn est :

$m \cdot n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$ et donc les diviseurs de n s'ecrivent sont de la forme

$p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$ avec $0 \leq x_i \leq \alpha_i$; ceux de m s'ecrivent sont de la forme $q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r}$ avec $0 \leq y_i \leq \beta_i$ et ceux de $m \cdot n$ s'ecrivent sont de la forme $p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \cdot q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r}$ et par suite :

$$\sum_{d/m \cdot n} \chi(d) = \sum_{\substack{0 \leq x_i \leq \alpha_i \\ 0 \leq y_i \leq \beta_i}} \chi(p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \cdot q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r}), \text{ or par definition de } \chi, \text{ elle est multiplicative c-à-d verifie le C. et}$$

donc cette dernière égalité devient $\sum_{\substack{0 \leq x_i \leq \alpha_i \\ 0 \leq y_i \leq \beta_i}} \chi(p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}) \cdot \chi(q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r})$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{d/m \cdot n} \chi(d) &= \sum_{0 \leq x_i \leq \alpha_i} \sum_{0 \leq y_i \leq \beta_i} \chi(p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}) \cdot \chi(q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r}) \\ &= \sum_{0 \leq x_i \leq \alpha_i} \chi(p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}) \sum_{0 \leq y_i \leq \beta_i} \chi(q_1^{y_1} \dots q_r^{y_r}) \\ &= \sum_{d/n} \chi(d) \cdot \sum_{d/m} \chi(d) \\ &= f_n \cdot f_m. \end{aligned}$$

13. Comme p est un entier premier, alors soit il ne figure pas dans la decomposition en facteurs premiers de N et dans ce cas il est premier avec N , soit il figure et dans ce cas il divise N . Dans le premier cas $|\chi(p)| = 1$ (c'est le II.6) et dans le second cas $\chi(p) = 0$ (c'est le B. de la definition de la fonction χ).

D'autre part les diviseurs de p^α sont les p^k pour k variant entre 0 et α et donc $f_{p^\alpha} = \sum_{d/p^\alpha} \chi(d) = \sum_{0 \leq k \leq \alpha} \chi(p^k)$, mais χ est multiplicative donc pour tout k , $\chi(p^k) = (\chi(p))^k$, par suite $f_{p^\alpha} = \sum_{0 \leq k \leq \alpha} (\chi(p))^k = 1 + \sum_{1 \leq k \leq \alpha} (\chi(p))^k =$

$$\begin{cases} 1 + 0 \text{ si } \chi(p) = 0 \\ \alpha + 1 \text{ si } \chi(p) = 1 \\ \sum_{0 \leq k \leq \alpha} (-1)^k \text{ si } \chi(p) = -1 \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$f_{p^\alpha} = \begin{cases} 1 \text{ si } \chi(p) = 0 \\ \alpha + 1 \text{ si } \chi(p) = 1 \\ 0 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impaire} \\ 1 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ paire} \end{cases}.$$

On remarque que dans tous les cas $0 \leq f_{p^\alpha} \leq (\alpha + 1)$.

14. Si $n = 1$, alors $0 \leq f_1 = 1 \leq 1$.

Si $n \geq 2$, on écrit la décomposition de n en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec les α_i des entiers non nuls et les p_i des entiers premiers et distincts deux à deux ; donc les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers deux à deux et donc d'après le 12. : $f_n = f_{p_1^{\alpha_1}} \dots f_{p_k^{\alpha_k}}$, donc compte tenue de la remarque faite à la dernière question du 13. : $0 \leq f_n \leq (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Mais $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ est exactement le nombre de diviseurs de n qui est donc $\leq n$.

D'où $0 \leq f_n \leq n$.

15. Si $n = 1$, alors $f_1 = 1 \geq 1$.

Si $n \geq 2$, on écrit la décomposition de n en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec les α_i des entiers non nuls et les p_i des entiers premiers et distincts deux à deux ; donc $n^2 = p_1^{2\alpha_1} \dots p_k^{2\alpha_k}$ est la decomposition en facteurs premiers de l'entier n^2 et donc par le 12. : $f_{n^2} = f_{p_1^{2\alpha_1}} \dots f_{p_k^{2\alpha_k}}$, mais d'après le 13. : pour tout α entier non nul $f_{p^{2\alpha}} \in \{1, 2\alpha + 1\}$, d'où $f_{n^2} \geq 1$.

16. Le rayon demandé est 1, en effet soit x réel.

- Si $|x| < 1$, alors d'après le 13. on a pour tout $n \geq 1$, $|f_n \cdot x^n| \leq |n \cdot x^n|$ et la serie $\sum |n \cdot x^n|$ converge puisqu'il s'agit d'une serie entiere de rayon de convergence 1 (par dalembert).

- Si $|x| > 1$, alors d'après le 14. on a pour tout $n \geq 1$, $|f_{n^2} \cdot x^{n^2}| \geq |x^{n^2}| = |x|^{n^2}$, mais la suite $(|x|^{n^2})_n$ diverge vers $+\infty$, donc la suite $(|f_{n^2} \cdot x^{n^2}|)_n$ diverge elle aussi vers $+\infty$, donc ne converge pas vers 0 et comme c'est une suite extraite de $(f_n \cdot x^n)_n$, alors cette dernière suite aussi ne converge pas vers 0 et donc la serie $\sum f_n \cdot x^n$ diverge grossièrement.

17. Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors la serie entière $\sum f_n \cdot x^n$ converge et d'autre part, d'après la question 14, elle est à termes positifs, donc la serie $\sum f_{n^2} \cdot x^{n^2}$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \cdot x^n &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n^2} \cdot x^{n^2}, \text{ mais d'après le 15. on a pour tout } n \geq 1, f_{n^2} \geq 1, \text{ donc} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n^2} \cdot x^{n^2} &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}. \text{ On a donc } f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante positive sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $k \geq 1$, $x^{k^2} \geq \int_k^{k+1} x^{t^2} dt$ et donc pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n x^{k^2} \geq \int_1^{n+1} x^{t^2} dt$ ou encore puisque les deux suites convergent $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \geq \int_1^{+\infty} x^{t^2} dt$, mais par le cchangement de variable : $u = t \cdot \sqrt{-\ln x}$, cette dernière intégrale devient $\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-u^2} dt$, or la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est positive et l'intervalle $[\sqrt{\ln 2}, +\infty[\subset [\sqrt{-\ln x}, +\infty[$, donc $\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-u^2} dt \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} e^{-u^2} dt$, d'où linégalité demandée : $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} e^{-u^2} dt$