CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATH 1 NAVALE 90

Partie I

Si $n = \deg P$ alors $P^{(n+1)} = 0$ donc la sommation étant finie, elle est parfaitement définie.

On remarque ensuite que $\alpha e^{-\alpha x}(Q(\alpha x) - Q'(\alpha x)) = [e^{-\alpha x}Q(x)]'$. Or $Q - Q' = P$ donc, après intégration, on obtient

$$R(\alpha) = e^{\alpha}Q(0) - Q(\alpha).$$

Partie II

Si $A(X) = X^p A_1(X)$ alors $A_1(e) = 0$, si on choisit pour p la valuation de A alors $A_1(0) \neq 0$ ce qui revient à supposer que $a_0 \neq 0$.

II.1. **a.** On a $P(X) = \dfrac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=p-1}^{np+p-1} b_m X^m$ où $b_m \in \mathbb{Z}$, or

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{(p-1)!}b_m X^m\right)^{(p)} &= b_m \frac{m(m-1)(\dots)(m-p+1)}{(p-1)!}X^{m-p} \\ &= p b_m C_m^p X^{m-p}\end{aligned}$$

i.e. tous les coefficients de $P^{(p)}$ sont entiers et divisibles par p, il en est donc de même pour $P^{(r)}$ avec $r \geq p$.

b. Les nombres $j \in [1, n]$ sont racines d'ordre p de P donc $P^{(r)}(j) = 0$ pour $r \in [0, p-1]$. 0 est racine d'ordre $p-1$ de P donc, de même, $P^{(r)}(0) = 0$ pour $r \in [0, p-2]$.
On a $P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p$ (il suffit de regarder le coefficient du terme de degré $p-1$ dans l'expression de P).

II.2. Comme $Q(j) = e^j Q(0) - R(j)$ vu la partie I, alors, par sommation :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = Q(0)\sum_{j=0}^{n} a_j e^j - \sum_{j=0}^{n} a_j R(j)$$

d'où, en tenant compte de l'hypothèse $A(e) = 0$, on en déduit que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = -\sum_{j=1}^{n} a_j R(j) \text{car } R(0) = 0.$$

II.3. **a.** On a $Q(j) = \sum\limits_{r\geq 0} P^{(r)}(j) = \sum\limits_{r\geq p} P^{(r)}(j)$ et comme chaque terme de la dernière somme est un entier multiple de p, il en est de même de la somme (finie) et donc de $Q(j)$.
Conclusion : $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est divisible par p.

b. On a $a_0 P^{(p-1)}(0) = a_0(-1)^{n^p}(n!)^p$. Si $p > \max(n, |a_0|)$ alors p (qui est un nombre premier) est premier avec $n!$ et a_0 donc $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p.
Pour de telles valeurs de p, $a_0 Q(0) = a_0 P^{(p-1)}(0) + a_0 \sum\limits_{r\geq p} P^{(r)}(0)$ n'est pas divisible par p car les termes de la somme sont tous multiples de p et le premier terme ne l'est pas (on sait que $P^{(r)}(0) = 0$ pour $r \leq p-2$).

Comme $\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)$ est un entier non divisible par p alors il est non nul donc, pour p assez grand

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\right| \geq 1.$$

II.4. a. On sait que $R(j) = je^j \int_0^1 e^{-jx} P(jx)\,\mathrm{d}x$ et donc, avec $j \leq n$ et $e^{-jx} \leq 1$ on obtient

$$\forall j \leq n,\ |R(j)| \leq ne^n \int_0^1 |P(jx)|\,\mathrm{d}x.$$

Il nous faut maintenant une majoration de $|P(jx)|$, si on pose $L(t) = (t-1)(t-2)(\dots)(t-n)$ alors $P(t) = \dfrac{(tL(t))^{p-1}L(t)}{(p-1)!}$. Majorons $tL(t)$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ (où $k \in [0, n-1]$) en utilisant le fait que $|t-i| \leq k+1-i$ si $k-i \geq 0$ et $|t-i| \leq i-k$ si $k-i \leq -1$:

$$|tL(t)| \leq (k+1).(\dots).2.1.1.2.(\dots).(n-k) = (k+1)!(n-k)! = \frac{(n+1)!}{C_{n+1}^{k+1}}$$

et, vu que $C_{n+1}^{k+1} \geq n+1$ on obtient $|tL(t)| \leq n!$ et cette majoration étant indépendante de k elle reste valable pour $t \in [0, n]$. On a de même $|L(t)| \leq n!$ d'où

$$\forall j \in [1, n],\ \forall x \in [0, 1],\ |P(jx)| \leq \frac{(n!)^{p-1}n!}{(p-1)!}$$

et donc, en revenant à l'inégalité du début,

$$R(j) \leq ne^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}.$$

b. On a donc $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| \leq ne^n \dfrac{(n!)^p}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{n} |a_j| = A_n \dfrac{(n!)^p}{(p-1)!} = \alpha_p$.

n est un entier fixé et comme $\dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \dfrac{n!}{p} \to 0$ on sait que $\alpha_p \to 0$ et donc, à partir d'un certain rang p_0, vu que l'ensemble des nombres premiers est infini, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| \leq \alpha_p < 1.$$

c. Comme $R(0) = 0$ alors, en reprenant l'égalité du II.2. on a

$$1 \leq \left|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| < 1$$

ce qui est contradictoire. Conclusion : e est transcendant.

Partie III

III.1. a. Soit z un nombre algébrique et $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme annulateur de z. Soit $B(z) = A(-iz) = \sum_j a_{2j}(-1)^j z^{2j} - i \sum_j a_{2j+1} z^{2j+1}$ alors $B(iz) = 0$ mais les coefficients du polynôme B ne sont pas dans $\mathbb{Z}$. Cependant,

$$\left(\sum_j a_{2j}(-1)^j z^{2j}\right)^2 + \left(\sum_j a_{2j+1} z^{2j+1}\right)^2 = B(z). \left(\sum_j a_{2j}(-1)^j z^{2j} + i \sum_j a_{2j+1} z^{2j+1}\right)$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ annulateur de iz c.q.f.d.

b. Si $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme annulateur de z alors $X^n + a_{n-1} a_n X^{n-1} + \cdots + a_0 a_n^n$ est un polynôme unitaire annulateur de $a_n z$.

c. Ceci est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.

III.2. Comme il existe q tel que $\beta_q = i\pi$ et que $1 + e^{i\pi} = 0$ alors $\displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1 + e^{i\beta_q}) = 0$.

Si on effectue le produit alors on aura

$$\prod_{q=1}^{n}(1 + e^{i\beta_q}) = 1 + \sum_q e^{\beta_q} + \sum_{q_1, q_2} e^{\beta_{q_1}} e^{\beta_{q_2}} + \cdots + e^{\beta_1 + \cdots + \beta_p}$$

qui est de la forme $E + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i}$ (si l'une des sommes $\beta_{q_1} + \cdots + \beta_{q_k}$ est nulle, on rajoute 1 à E), les α_i étant des sommes des racines β_q.

III.3. **a.** D'après la propriété R_2, il existe un polynôme unitaire Q_k dont l'ensemble des zéros coïncide avec l'ensemble des $\xi_{J_k} = c \sum_{j \in J_k} \beta_j$ donc, si l'on écarte les racines nulles, on va toujours trouver un polynôme unitaire $\prod Q_k$ qui admet exactement pour racines les $c\alpha_i$. Ce polynôme s'écrit $\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(Y - c\alpha_i)$ et donc $(p-1)!P_1(Y) = Y^{p-1} \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(Y - c\alpha_i)^p$ est unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. A fortiori, le polynôme $(p-1)!P(X)$ est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

b. 0 est racine d'ordre $p-1$ de P donc $P^{(r)}(x)$ s'annule donc en 0 pour $0 \leq r \leq p-1$.

c. Si $(p-1)!P(X) = \sum_{k=p-1}^{d} b_k X^k$ alors $(p-1)!P^{(r)}(0) = r!b_r$ et pour $r \geq p$

$$P^{(r)}(0) = p(p+1)(\dots)r.b_r$$

est multiple de p vu que l'on a prouvé que les b_k étaient entiers.

d. On a $P(X) = P_1(cX)$ d'où $P^{(r)}(\alpha_j) = c^r P_1(c\alpha_j)$ et donc

$$\sum_{j=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_j) = c^r \sum_{j=1}^{s} P_1^{(r)}(c\alpha_j).$$

Or, si on écrit

$$P_1(Y) = \frac{1}{(p-1)!}\left[Y^{ps+p-1} + u_{ps+p-2} Y^{ps+p-2} + \cdots + u_{p-1} Y^{p-1}\right]$$

alors $P_1^{(r)}(Y)$ est un polynôme à coefficients entiers divisibles par p ($r \geq p$)—cf II.1.a.—

$$P_1^{(r)}(Y) = p \sum_{k=0}^{d} v_k Y^k \text{ où } v_k \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^{s} P_1^{(r)}(c\alpha_j) = p \sum_{k=0}^{d} v_k \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{s} (c\alpha_j)^k\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$

car les $c\alpha_j$ sont les racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Conclusion : $\sum\limits_{j=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_j) = pc^r N$ où $N \in \mathbb{Z}$ c.q.f.d.

III.4. $Q(\alpha_j) = e^{\alpha_j}Q(0) - R(\alpha_j)$ donc

$$\begin{aligned} EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) &= Q(0)\left(E + \sum_{j=1}^{s} e^{\alpha_j}\right) - \sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \end{aligned}$$

car, d'après le III.2., le facteur de $Q(0)$ est nul.

III.5. Si on revient à l'expression de P,

$$P^{(p-1)}(0) = c^{p-1}(-1)^{sp}\left(\prod_{j=1}^{s} c\alpha_j\right)^p$$

et, vu que les $c\alpha_j$ sont racines d'un polynôme unitaire, d'après la propriété R_2, $\prod\limits_{j=1}^{s} c\alpha_j = m \in \mathbb{Z}$. Donc, pour $p > \max(c, |m|)$, $P^{(p-1)}(0)$ est un entier premier avec p (puisque p est premier avec c et m).

$$EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) = P^{p-1}(0) + \sum_{r \geq p} P^{(r)}(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j)$$

est alors un entier non nul (il est premier avec p) donc

$$\left| EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) \right| \geq 1.$$

III.6. **a.** Comme $P(\alpha_j x) = \dfrac{(c\alpha_j x)^{p-1}}{(p-1)!}\prod\limits_{k=1}^{s} c^p(\alpha_j x - \alpha_k)^p$ alors, avec $H = \sup\limits_j |\alpha_j|$ on a : $\forall x \in [0,1]$, $|\alpha_j x - \alpha_k| \leq |\alpha_j| + |\alpha_k| \leq 2H$ et donc

$$\forall x \in [0,1],\ |P(\alpha_j x)| \leq \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{s}(2|c|H)^p = \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps}$$

d'où

$$|R(\alpha_j)| \leq \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps}\int_0^1 |\alpha_j| e^{\alpha_j(1-s)}\,\mathrm{d}x \leq \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps} H e^H$$

vu que $|\alpha_j(1-x)| \leq |\alpha_j| \leq H$ et $|e^z| \leq e^{|z|}$.

b. On a donc $\left|\sum\limits_{j=1}^{s} R(\alpha_j)\right| \leq \dfrac{sHe^H}{|c|H(p-1)!}[|c|H(2|c|H)^s]^p = K\dfrac{A^p}{(p-1)!}$ et comme ce dernier majorant tend vers 0 quand p tend vers l'infini, comme au II, il existe p_0 tel que $p \geq p_0 \Rightarrow \left|\sum\limits_{j=1}^{s} R(\alpha_j)\right| < 1$.

c. Comme au II, les inégalités obtenues au III.5. et au III.6. sont incompatibles (compte tenu de la relation prouvée au III.4. donc on peut conclure π est bien transcendant.