ÉCOLE NAVALE

Première composition de mathématiques

Concours 1990

Durée : 3 heures

Problème

Il est expressément demandé aux candidats de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations.

Les candidats pourront admettre les résultats d'une question à condition de le mentionner explicitement.

Préliminaires

Soit $z \in \mathbb{C}$; on dit que z est un nombre algébrique si et seulement si il existe un polynôme non nul A (X) élément de $\mathbb{Z}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que $A(z) = 0$. Dans le cas contraire, on dira que z est un nombre transcendant. Le but de ce problème est de faire démontrer que les nombres e et π sont transcendants (résultats dus respectivement à Hermite et Lindemann).

Soit $B(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient dominant vaut 1) de racines $\beta_1, \ldots, \beta_r$, comptées avec leur ordre de multiplicité.

On admettra les deux résultats suivants notés R_1) et R_2).

R_1) : Pour tout entier $k \geqslant 0$ la quantité $S_k = \sum_{j=1}^{r} \beta_j^k$ appartient à $\mathbb{Z}$.

R_2) : Soit t un entier quelconque appartenant à $\{1, \ldots, r\}$. Alors il existe un polynôme unitaire $B_t(X) \in \mathbb{Z}[X]$ dont l'ensemble des zéros coïncide avec l'ensemble des

$$\xi_{J_t} = \sum_{j \in J_t} \beta_j$$

où J_t décrit la famille des parties à t éléments de $\{1, 2, \ldots, r\}$.

PARTIE I

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. On pose $Q(X) = \sum_{k \geqslant 0} P^{(k)}(X)$ (où $P^{(k)}(X)$ désigne la dérivée d'ordre k de P (X)). Établir que la formule définissant Q a bien un sens.

Montrer que :

$$e^{\alpha} Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$$

où

$$R(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha\, e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$$

(On pourra calculer $\int_0^1 \alpha\, e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$ par intégrations par parties successives).

Les parties II et III sont indépendantes mais reposent toutes deux sur la partie I. La partie II vise à établir la transcendance de e, la partie III celle de π.

. . . / . . .

PARTIE II

On suppose l'existence de $A(X) \in \mathbb{Z}[X]$, avec $A(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ de degré n ($a_n \neq 0$) tel que $A(e) = 0$. Dans toute cette partie II, nous fixons un tel $A(X)$.

Montrer qu'on peut se ramener au cas où $a_0 \neq 0$.

1. — Soit $P(X) = \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!}(X-1)^p (X-2)^p \dots (X-n)^p$ où p est un nombre entier premier arbitraire supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer que, pour $r \geqslant p$, $P^{(r)}(X)$ est un polynôme à coefficients entiers divisibles par p.

   b. Montrer que, pour $0 \leqslant r \leqslant p-1$, $P^{(r)}(j) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Montrer que pour $0 \leqslant r \leqslant p-2$, $P^{(r)}(0) = 0$ et calculer $P^{(p-1)}(0)$.

2. Soit $Q(X)$ (et $R(\alpha)$) définis à partir de $P(X)$ comme dans la partie I. Calculer $\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)$ en fonction des quantités a_j et $R(j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

3. — *a.* Montrer que $\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est divisible par le nombre premier p.

   b. Montrer que, pour p assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p.
   En déduire que

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geqslant 1$$

4. — *a.* Montrer que, pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|R(j)| \leqslant n\, e^n \dfrac{(n!)^p}{(p-1)!}$

   b. n étant fixé. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout nombre premier $p \geqslant p_0$ on a :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j R(j) \right| < 1$$

   c. En conclure que e est transcendant.

PARTIE III

1. — *a.* Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est algébrique, alors iz est également algébrique.

   b. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est algébrique, il existe un entier relatif c non nul et un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $B(X)$, tel que $B(cz) = 0$.

   On suppose jusqu'à la fin de cette partie que π est algébrique.

   c. Vérifier qu'il existe $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $B(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n tel que $B(ic\pi) = 0$. On notera $c\beta_q$ (avec $1 \leqslant q \leqslant n$), les racines de $B(X)$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

2. — Montrer que $\prod_{q=1}^{n} (1 + e^{\beta_q}) = 0$. (*) Montrer que $\prod_{q=1}^{n} (1 + e^{\beta_q})$ (*) s'écrit sous la forme $E + e^{\alpha_1} + \dots + e^{\alpha_s}$ où E est un entier strictement positif et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des nombres complexes non nuls que l'on précisera.

(*) $\prod_{q=1}^{n} \left(1 + e^{\beta_q}\right) \dots$

3. — Soit $P(X) = \dfrac{(cX)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{j=1}^{s}(cX - c\alpha_j)^p$ où p est un nombre premier arbitraire et c introduit au III.1.c.

a. Soit $P_1(Y) = P(\dfrac{Y}{c})$; montrer que $(p-1)!\,P_1(Y)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En déduire que $(p-1)!P(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

b. Montrer que $P^{(r)}(x)$ s'annule pour $x = 0$ si $0 \leqslant r < p-1$, et s'annule pour $x = \alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, si $0 \leqslant r < p$.

c. Montrer que, pour $r \geqslant p$, $P^{(r)}(0)$ est divisible par p.

d. Montrer que $\sum_{j=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_j)$ est, pour $r \geqslant p$, un entier divisible par p. (lire : $\sum_{j=1}^{s}\cdots$)

4. — On définit $Q(X)$ (et $R(\alpha)$) à partir de $P(X)$ comme dans la partie I.

Calculer $EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j)$ en fonction des quantités $R(\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

5. — Calculer $P^{(p-1)}(0)$ et montrer que, pour p assez grand, $EP^{(p-1)}(0)$ est un entier non divisible par p. En déduire que

$$\left| EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) \right| \geqslant 1.$$

6. — *a.* Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant s$, on a :

$$|R(\alpha_j)| \leqslant He^H \left| \frac{(|c|\,H)^{p-1}\,(2\,|c|\,H)^{ps}}{(p-1)!} \right| \text{où } H = \sup_{1 \leqslant j \leqslant s} |\alpha_j|$$

b. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout p nombre premier plus grand que p_0, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \right| < 1.$$

c. En déduire que π est transcendant.
