ENS Ulm-Cachan 2002 - Corrigé

Auteur : Robert Cabane (rcabane@free.fr) *29/6/2002*

Thème du problème : les fonctions presque périodiques

Notations

Nous conviendrons d'écrire $\oint_{2T} f$ à la place de $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction f continue et $2T$-périodique sur $\mathbb{R}$.

Partie préliminaire

1. Cherchons à résoudre l'équation $e_1(x)+e_{\sqrt{2}}(x)=2$. En prenant les parties réelles on trouve $\cos x=\cos\sqrt{2}x=1$, ce qui impose $\frac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}\cap\sqrt{2}\mathbb{Z}$. Comme $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, la seule solution est $x=0$. Si la fonction $e_1+e_{\sqrt{2}}$ était périodique, on aurait une infinité de solutions, ce qui n'est pas. ♦

2. Une « vraie » période T est une ε-quasipériode pour tout $\varepsilon>0$. Choisissons $\ell=T$: tout intervalle de longueur T contient un multiple entier de T, et $E(f,\varepsilon)$ est bien réparti pour tout $\varepsilon>0$.

Partie I : Généralités sur les fonctions presque périodiques

1. On prend $\varepsilon=1$. Comme l'intervalle $[k\ell,(k+1)\ell]$ est de longueur ℓ, on peut y trouver un élément r de $E(f,1)$. On écrit alors $|f(t)|\leqslant|f(t-r)|+|f(t)-f(t-r)|\leqslant 1+|f(t-r)|\leqslant 1+\operatorname{Sup}_{[-\ell,\ell]}|f|$. Comme f est continue sur le compact $[-\ell,\ell]$, elle y est bornée et cela la rend bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, toute fonction presque périodique est continue et bornée. On peut donc écrire $\|f\|$ sans hésitation.

2 - a. La presque-périodicité de f passe aussitôt à sa conjuguée $\overline{f}$, et aussi à $|f|$ par inégalité triangulaire. En ce qui concerne le carré, sachant que f est bornée, on peut écrire pour $r\in E(f,\varepsilon)$

$$|f^2(t+r)-f^2(t)|=|f(t+r)-f(t)||f(t+r)+f(t)|\leqslant 2\|f\||f(t+r)-f(t)|\leqslant 2\|f\|\varepsilon$$

et on en déduit que $|f|^2$ est aussi presque périodique. Cela ne suffit pas pour faire de $\mathcal{B}$ une algèbre, car la presque périodicité de la somme est délicate - nous la verrons à la question **7-a**.

2 - b. Par continuité uniforme de F, étant donné $\varepsilon>0$ il existe $\alpha>0$ tel que $|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|F(x)-F(y)|\leqslant\varepsilon$. En prenant $r\in E(f,\alpha)$, nous obtenons $|F(f(t+r)-F(f(t))|\leqslant\varepsilon$ pour tout t réel quelconque et $x=f(t+r)$, $y=f(t)$, de sorte que la composée $F\circ f$ est uniformément continue. En particulier, la composée de fonctions presque périodiques est presque périodique.

3. Soit une suite (f_n) de fonctions presque périodiques, convergeant uniformément vers f. Par convergence uniforme, f est certainement continue et bornée. Pour voir qu'elle est presque périodique, choisissons $\varepsilon\geqslant 0$, puis n assez grand pour que l'on ait $\|f-f_n\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$, puis prenons $a\in E(f_n,\frac{\varepsilon}{2})$. Il vient alors :

$$|f(x+a)-f(x)|\leqslant|f(x+a)-f_n(x+a)|+|f_n(x+a)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2\|f-f_n\|+\|f_n(.+a)-f_n(.)\|\leqslant\varepsilon\,.$$

Nous en déduisons que $\mathcal{B}$ est une partie fermée de l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

4. Fixons $\varepsilon>0$, $a\in E(f,\varepsilon)$ et $h\in]0,1]$. L'inégalité triangulaire permet d'écrire pour tout réel t :

$$|f(t+h)-f(t)|\leqslant|f(t+h)-f(t+h-a)|+|f(t+h-a)-f(t-a)|+|f(t-a)-f(t)|\leqslant 2\varepsilon+|f(t+h-a)-f(t-a)|\,.$$

Comme $E(f,\varepsilon)$ est bien réparti, on peut choisir a dans $[t,t+h]$, de sorte que $-h\leqslant t-a\leqslant 0\leqslant t-a+h\leqslant h$. La continuité uniforme de f sur $[-1,1]$ assure l'existence de $\delta>0$ tel que si $h<\delta$ alors $|f(t+h-a)-f(t-a)|\leqslant\varepsilon$, soit encore $|f(t+h)-f(t)|\leqslant 3\varepsilon$; la continuité uniforme de f en découle.

Remarque. La continuité uniforme de f signifie aussi que les nombres assez petits sont tous des ε-quasipériodes, et donc que tout nombre assez proche d'une ε-quasipériode est une 2ε-quasipériode. En d'autres termes, l'ensemble $E(f,\varepsilon)$ est non seulement bien réparti mais encore ouvert.

5 - a. Soit $\varepsilon>0$ et $\ell>0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne une $\frac{\varepsilon}{3}$-quasipériode ; en particulier, l'intervalle $[a_n-\ell,a_n]$ en contient une qui peut s'écrire a_n-b_n avec $b_n\in[0,\ell]$. L'inégalité triangulaire sert encore :

$$|f(t+a_n)-f(t+a_m)|\leqslant|f(t+a_n)-f(t+b_n)|+|f(t+b_n)-f(t+b_m)|+|f(t+b_m)-f(t+a_m)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+|f(s+b_n-b_m)-f(s)|$$

avec $s=t+b_m$ et parce que l'écart entre $t+a_n$ (resp. $t+a_m$) et $t+b_n$ (resp. $t+b_m$) est $\frac{\varepsilon}{3}$-quasipériode de f. Passant aux bornes supérieures, on a

$$\|f(.+a_n)-f(.+a_m)\|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+\|f(.+b_n-b_m)-f\|\,.$$

5 - b. La concept de sous-suite étant un peu flou, nous rédigerons cette question et la suivante en termes de suites extraites. On fixe toujours $\varepsilon>0$. Par compacité de $[0,\ell]$ un trouve une extraction φ telle que la suite $(b_{\varphi(p)})$ converge vers β. Avec p et q assez grands (supérieurs à p_0) on a $|b_{\varphi(p)}-b_{\varphi(q)}|\leqslant\delta$ (Cauchy), δ étant choisi par continuité uniforme de f (question **4**) par rapport à $\frac{\varepsilon}{3}$. Dès lors, on a avec $n=\varphi(p)$ et $m=\varphi(q)$: $|f(t)-f(t+b_n-b_m)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Finalement, si on pose $\psi(k)=\varphi(p_0+k)$, la suite extraite $(a_{\psi(k)})$ est telle que $\|f(.+a_{\psi(k)})-f(.+a_{\psi(l)})\|\leqslant\varepsilon$ pour tous k,l.

5 - c. On procède comme à la question précédente avec $\varepsilon = 1$, trouvant une première extraction ψ_1. Remplaçant la suite (a_n) par la suite $(a_{\psi_1(n)})$ et ε par $\frac{1}{2}$, on trouve une seconde extraction ψ_2 telle que $\|f(.+a_{\psi_1\circ\psi_2(k)}) - f(.+a_{\psi_1\circ\psi_2(l)})\| \leqslant \frac{1}{2}$.
Il est à ce point très commode de poser $\theta_1 = \psi_1$, $\theta_2 = \psi_1 \circ \psi_2$. On poursuit de la même manière, obtenant par extractions successives une extraction θ_p telle que $\|f(.+a_{\theta_p(k)}) - f(.+a_{\theta_p(l)})\| \leqslant \frac{1}{p}$, et $\theta_p = \theta_{p-1} \circ \psi_p$. On considère alors *l'extraction diagonale* définie par $\gamma(p) = \theta_p(p)$. Vérifions que c'est bien une extraction : $\gamma(p+1) = \theta_p \circ \psi_{p+1}(p+1) > \theta_p(p) = \gamma(p)$ parce que $\psi_{p+1}(p+1) \geqslant p+1 > p$ et que θ_p est strictement croissante (ce sont des extractions). Prenons alors $q > p$. On a $\gamma(q) = \theta_p \circ \psi_{p+1} \circ \cdots \circ \psi_q(q) = \theta_p(m)$, ce qui conduit à $\|f(.+a_{\theta_p(m)}) - f(.+a_{\theta_p(p)})\| = \|f(.+a_{\gamma(q)}) - f(.+a_{\gamma(p)})\| \leqslant \frac{1}{p}$.
En prenant p assez grand, on obtient le critère de Cauchy uniforme pour la suite des translatées $f(.+a_{\gamma(p)})$, qui va bien converger uniformément sur $\mathbb{R}$. En conséquence, on a bien $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$.

6 - a. On exprime le fait que f n'est pas presque périodique en disant qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $E(f,\varepsilon_0)$ ne soit pas bien réparti, c'est-à-dire que pour tout λ on puisse trouver un intervalle de longueur λ ne contenant pas de ε_0-quasipériode. Prenant $\lambda = 1$ nous trouvons déjà un intervalle I_1 de longueur $\ell(I_1) \geqslant 1$ et inclus dans le complémentaire de $E(f,\varepsilon_0)$. On choisit alors $\lambda = 5d(I_1) + 1$, et il apparaît un intervalle I_2 tel que $\ell(I_2) > 5d(I_1)$ et $I_2 \subset E(f,\varepsilon_0)^c$. On continue de même pour les intervalles suivants. On note au passage qu'il est permis d'allonger les I_n arbitrairement, au prix d'un allongement des intervalles suivants.

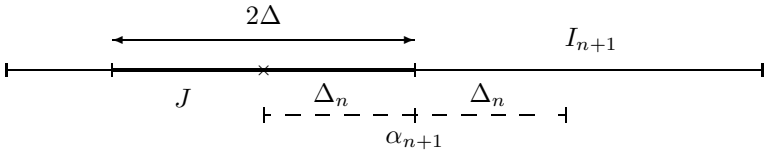
6 - b. Notons $I_n = [a_n, b_n]$, de sorte que $d(I_n) = \mathrm{Max}(|a_n|, |b_n|)$. Comme on a une collection finie d'intervalles, on a

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n \subset \big[\operatorname*{Min}_{1\leqslant i\leqslant n} a_i,\ \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} b_i\big] = [a_p, b_q] = I'_n$$

intervalle dont la longueur vérifie

$$\ell(I'_n) \leqslant 2d(I'_n) \leqslant 2(d(I_q) + d(I_p)) < 5(d(I_1) + \cdots + d(I_n)) < \ell(I_{n+1})\,.$$

Il en résulte, notamment, que $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ n'est pas inclus dans I_{n+1}. Plus précisément, si nous notons $\Delta_n = d(I_1) + \cdots + d(I_n)$, on sait que $\ell(I'_n) < 2\Delta_n$. Considérons alors un intervalle J contenant strictement I'_n, inclus dans I_{n+1}, et de longueur $2\Delta_n$. Alors $I_{n+1} \setminus J$ est formé de deux intervalles dont la somme des longueurs vaut au moins $3\Delta_n$, et dont l'un est de longueur supérieure à Δ_n. Prenons pour α_{n+1} l'extrémité de J contiguë à ce dernier. Par construction, α_{n+1} est dans I_{n+1} et pas dans I'_n. L'intervalle de centre α_{n+1} et de rayon Δ_n est certainement inclus dans I_{n+1} (voir figure ci-dessous).



6 - c. Supposons par exemple que $i > j$. On a alors $\alpha_i \in I_i$ et $\alpha_i \notin I_j$, tandis que $\alpha_j \in I_j$; par conséquent, α_i et α_j sont distincts. Vu les choix de Δ_{i-1} et a_i, on sait que $[a_i - \Delta_{i-1}, a_i + \Delta_{i-1}] \subset I_i$ (voir à nouveau la figure ci-dessus). Or, on a $\alpha_j \in I_j \Rightarrow |\alpha_j| \leqslant d(I_j) < \Delta_j \leqslant \Delta_{i-1}$ et donc $\alpha_i - \alpha_j$ appartient bien à I_i.
L'appartenance de f à $\mathcal{N}$ fait qu'on peut extraire de la suite (α_n) une sous-suite (α_{n_k}) telle que $(f(.+\alpha_{n_k}))$ converge uniformément, donc vérifie le critère de Cauchy uniforme. Cependant, $\alpha_i - \alpha_j$ n'étant pas une ε-quasipériode, on a $\operatorname*{Sup}_x |f(x+\alpha_i) - f(x+\alpha_j)| = \operatorname*{Sup}_t |f(t+\alpha_i-\alpha_j) - f(t)| > \varepsilon$ et notamment $\operatorname*{Sup}_x |f(x+\alpha_{n_k}) - f(x+\alpha_{n_l})| > \varepsilon$, ce qui constitue une contradiction, d'où nous tirons que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$, c'est-à-dire l'identité des fonctions presque périodiques et des fonctions normales.

7 - a. Montrons que la somme de deux fonctions f, g presque périodiques est presque périodique. La question **5** nous montre que f et g sont normales. Soit une suite (a_n) ; on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ telle que les translatées $f(.+a_{\varphi(n)})$ convergent uniformément, puis réextraire $(a_{\varphi\circ\psi(n)})$ de sorte que les translatées $g(.+a_{\varphi\circ\psi(n)})$ convergent uniformément. On peut alors ajouter et obtenir la convergence uniforme de la suite $f(.+a_{\varphi\circ\psi(n)}) + g(.+a_{\varphi\circ\psi(n)})$. En conséquence, $f+g$ est normale donc presque périodique d'après la question **6**.
On en déduit facilement que fg est presque périodique, grâce à la question **2-a** et à $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$. En fin de compte, $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ contenant toutes les algèbres $\mathcal{A}_r$ de fonctions r-périodiques.

7 - b. Comme $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel, et qu'il contient les fonctions périodiques, il doit aussi contenir leurs sommes et notamment les combinaisons linéaires d'exponentielles.

8 - a. Soit $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{1/n}$; cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ (série majorante $\sum |a_n|$) et sa somme est continue comme les sommes partielles $g_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_{1/n}$. Ces dernières appartiennent à $\mathcal{C}$ donc à $\mathcal{B}$ (question précédente). La stabilité par passage à la limite uniforme (question **3**) nous assure le résultat.

8 - b. La convergence normale de la série précédente permet d'intégrer terme à terme. Il vient : $\oint_{2T} g(t)e_{1/p}(-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \oint_{2T} e_{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$. Dans cette somme figure le terme a_p affecté d'un facteur 1 ; les autres facteurs valent $\oint_{2T} e_{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} = \frac{A}{T(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})}$, le numérateur A étant une différence de deux exponentielles de module 1. Pour un n fixé cette expression tend vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$, N supérieur à $2p$ et découpons :

$$\Big|\oint_{2T} g(t)e_{1/p}(-t)\,\mathrm{d}t - a_p\Big| \leqslant \tfrac{1}{T} \sum_{n\leqslant N, n\neq p} |a_n| \tfrac{np}{|n-p|} + \tfrac{1}{T} \sum_{n>N} |a_n| \tfrac{2(n-p)p}{n-p}$$

puisque $n > N \geqslant 2p \Rightarrow n < 2(n-p)$. On majore donc ainsi :

$$\left| \oint_{2T} g(t) e_{1/p}(-t)\,\mathrm{d}t - a_p \right| \leqslant \frac{2p^2}{T} \sum_{n\leqslant N, n\neq p} |a_n| + \frac{4p}{T} \sum_{n>N} |a_n| \leqslant \frac{4p^2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

assurant la limite nulle quand T tend vers l'infini.

8 - c. Si la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang p, une période commune à toutes les fonctions $e_{1/n}$ existe, c'est $2p!\pi$; ainsi, g est périodique. Réciproquement, supposons que g est p-périodique. L'usage de $T = kp$ avec k grand va nous permettre de maîtriser les coefficients. Plus précisément :

Lemme. *Soit une fonction g continue et p-périodique, et λ un réel tel que $p\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$\oint_{2kp} g(t) e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t = e_\lambda(\tfrac{p}{2}) \frac{\sin kp\lambda}{2k \sin p\lambda/2} \cdot \frac{1}{p} \int_0^p g(t) e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Preuve.
$$\begin{aligned}
\int_{-kp}^{kp} g(t)e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{j=-k}^{k-1} \int_{jp}^{(j+1)p} g(t)e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t && \text{par découpage}\\
&= \sum_{j=-k}^{k-1} e_\lambda(-jp) \int_0^p g(u)e_\lambda(-u)\,\mathrm{d}u && \text{par translation}\\
&= \tfrac{e_\lambda(kp)-e_\lambda(-kp)}{1-e_\lambda(-p))} \int_0^p g(u)e_\lambda(-u)\,\mathrm{d}u && \text{par sommation géométrique possible car } p\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}\\
&= e_\lambda(\tfrac{p}{2}) \tfrac{\sin kp\lambda}{\sin p/2} \int_0^p g(u)e_\lambda(-u)\,\mathrm{d}u && .
\end{aligned}$$

Il résulte de ce lemme que la limite de $\oint_{2kp} g(t)e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t$, quand k tend vers l'infini, est nulle (le sinus figurant au numérateur de la fraction étant borné). Dans le cas présent, avec $\lambda = \frac{1}{n}$ et $T = 2kp$, nous savons que cette même limite vaut a_n. L'hypothèse $p\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$ est certainement vérifiée pour n assez grand, et précisément dès que $n > \frac{p}{2\pi}$. En conclusion, la fonction g est périodique si et seulement si la somme la définissant est finie.

Partie II : Le spectre d'une fonction presque périodique

1 - a. Par linéarité, il suffit de montrer le résultat lorsque P est une exponentielle : $P(t) = e_\mu(t)$.

$$a(P,\lambda,T) = \oint_{2T} e_{\mu-\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \lambda \\ \frac{\sin(\mu-\lambda)T}{T(\mu-\lambda)} & \text{sinon} \end{cases}$$

expression ayant pour limite 1 ou 0 quand T tend vers l'infini, selon le cas.

1 - b. Utilisons le critère de Cauchy pour l'existence d'une limite. A cet effet, considérons $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et T_1, T_2 grands. On approche $f \in \mathcal{B}$ uniformément par $g \in \mathcal{P}$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près. Il vient alors :

$$\|a(f,\lambda,T_1) - a(f,\lambda,T_2)\| \leqslant \underbrace{\|a(f,\lambda,T_1) - a(g,\lambda,T_1)\|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ (choix de } g)} + \underbrace{\|a(g,\lambda,T_1) - a(g,\lambda,T_2)\|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ (choix de } T_1,\, T_2 \text{ grands)}} + \underbrace{\|a(g,\lambda,T_2) - a(f,\lambda,T_2)\|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ (choix de } g)} \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarque. La preuve de ce résultat, sans utiliser la densité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$, est possible mais un peu longue. Voir le problème donné à l'ENS Lyon, option P', en 1992.

1 - c. Toujours par linéarité, on a

$$P = a_1 e_{\lambda_1} + \cdots + a_n e_{\lambda_n} \implies a(P,\lambda) = a_1 a(e_{\lambda_1},\lambda) + \cdots + a_n a(e_{\lambda_n},\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \\ a_k & \text{si } \lambda = \lambda_k. \end{cases}$$

En définitive, on a $\mathrm{Spec}(P) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$.

1 - d. On se souvient que l'algèbre $\mathcal{B}$ est fermée, c'est-à-dire stable par passage à la limite uniforme. De ce fait, si f est limite uniforme de la suite (f_n), alors f est presque périodique et $a(f,\lambda)$ existe. On se demande alors si la fonction $f \mapsto a(f,\lambda)$ est continue sur $\mathcal{B}$ (à λ fixé). Comme il s'agit d'une forme linéaire, il suffit de la majorer. Or, on a $|a(f,\lambda,T)| \leqslant \|f\|$ et par passage à la limite il vient $|a(f,\lambda)| \leqslant \|f\|$, ce qu'il fallait.

2 - a. La notation proposée est un peu compliquée. Notons plutôt $P = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(P)} a(P,\lambda)e_\lambda$, et plus généralement $P = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a(P,\lambda)e_\lambda$ puisque la famille $(a(P,\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est sommable, étant nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de λ. L'ensemble $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Spec}(P_k)$ rassemble les spectres des différents P_k, et pour λ en-dehors de Λ on a $\lambda \notin \mathrm{Spec}(P_k)$, donc $a(P_k,\lambda) = 0$.

2 - b. Passant à la limite, en raison de la question **II-1-d**, nous obtenons que $a(f,\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \notin \Lambda$. En tant qu'union dénombrable d'ensembles finis, l'ensemble Λ est dénombrable.

3 - a. Q_n n'est autre que la somme partielle à l'ordre n de la série de Fourier de g. Considérons une période $T = qr$ multiple de la période de g (avec $q \in \mathbb{N}^*$) et introduisons le produit scalaire préhilbertien de l'espace des fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$: $<f|g> = \oint_{2T} \overline{f}g$, $\|f\|_2 = \sqrt{<f|f>}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cadre nous donne $|<Q_n-g|e_\lambda>|^2 \leqslant \|Q_n-g\|_2^2\|e_\lambda\|_2^2 = \|Q_n-g\|_2^2$ car les exponentielles e_λ sont de module 1. Or, le théorème de Parseval-Bessel appliqué à la fonction Q_n-g s'écrit $\|Q_n-g\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(Q_n-g)|^2 = \sum_{|k|>n} |c_k(Q_n-g)|^2$, du fait que les coefficients de Fourier de

g sont ceux de Q_n lorsque $|k| \leqslant n$. Finalement : $|a(Q_n,T,\lambda)-a(g,T,\lambda)|^2 = |\oint_{2T}(Q_n-g)(t)e_\lambda(-t)\,\mathrm{d}t|^2 \leqslant \sum_{|k|>n}|c_k(Q_n-g)|^2$ et en passant à la limite, k tendant vers l'infini, on trouve bien $|a(Q_n,\lambda)-a(g,\lambda)|^2 \leqslant \sum_{|k|>n}|c_k(Q_n-g)|^2$.

3 - b. La question précédente nous montre que pour tout λ l'on a $\lim_{n\to\infty} a(g_n,\lambda) = a(g,\lambda)$. Si λ n'est pas un multiple entier de $\frac{2\pi}{r}$, alors $a(g_n,\lambda)$ est nul pour tout n (question **II-1-c**), donc $a(g,\lambda)$ est nul ; c'est-à-dire que $\mathrm{Spec}(g) \subset \frac{2\pi}{r}\mathbb{Z}$. Si, au contraire, on prend $\lambda = \frac{2\pi k}{r}$, alors $a(Q_n,\lambda) = c_k(g)$ dès que $n \geqslant |k|$. La suite des $a(Q_n,\lambda)$ est ici stationnaire et λ est dans $\mathrm{Spec}(g)$. C'est pourquoi l'on a $\mathrm{Spec}(g) = \frac{2\pi}{r}\mathbb{Z}$.

4 - a. Comme $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{B}$ (question préliminaire), et que $\mathcal{B}$ est fermée, il est certain que f, limite uniforme des f_p, est presque périodique. Considérons deux éléments r, r' non nuls de $\mathrm{Spec}(f)$. Comme $a(f,r)$ est non nul et limite des $a(f_p,r)$ quand p tend vers l'infini (**II-1-d**), il existe p_0 tel que pour $p \geqslant p_0$ l'on ait $a(f_p,r) \neq 0$; dans ces conditions, r appartient au spectre de f_p, et est multiple entier de la période r_p de f_p. On procède de même avec r' qui est multiple entier de r_p pour $p \geqslant p_1$. En particulier, r et r' sont commensurables, et si on considère r comme fixé, les éléments du spectre de f sont des multiples rationnels de r. Enfin, si $\mathrm{Spec}(f)$ est réduit à $\{0\}$, la réponse est immédiate.

4 - b. L'idée est la même que dans la question précédente : on prend $r \neq 0$ dans $\mathrm{Spec}(f)$, et il vient $r = n_p r_p$ avec n_p entier nécessairement non nul, soit $r_p = \frac{1}{n_p} r \in r\mathbb{Q}$.

4 - c. La fonction $h = e_1 + e_{\sqrt{2}}$ est presque périodique puisque dans $\mathcal{C}$. Son spectre est $\{1, \sqrt{2}\}$ (question **II-1-c**), ensemble contenant deux nombres incommensurables. Par conséquent, la question **4-a** est en défaut, et h n'est pas limite uniforme de fonctions périodiques continues.

Partie III : Autour de la formule de Parseval.

1. Notons déjà que $|f|^2$ est presque périodique. On applique la question **II-1-b** pour obtenir l'existence de $a(|f|^2,0) = \lim_{T\to\infty} \oint_{2T} |f|^2$. Quand f est r-périodique, on peut choisir pour T un multiple entier de r ; dans ces conditions, on trouve $a(|f|^2,0) = \lim_{T\to\infty} \oint_{2T} |f|^2 = \|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ (via le théorème de Parseval) et la question **II-3-b** permet de conclure à $a(|f|^2,0) = \lim_{T\to\infty} \oint_{2T} |f|^2 = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2$.

Digression. Il devient tentant, en ce point, de définir un produit scalaire préhilbertien sur l'espace $\mathcal{B}$ en posant $(f|g) = a(\overline{f}g,0)$. Il convient toutefois de s'assurer que l'on a bien $(f|f) = 0 \Longrightarrow f = 0$, ce qui n'est pas immédiat mais est abordé plus loin, à la question **III-3-b**. En attendant, nous appellerons *semi-norme* sur un espace vectoriel complexe E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, et $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tous vecteurs x, y de E. Comme exemple de semi-norme on peut prendre une forme hermitienne positive H et poser $N(x) = \sqrt{H(x)}$; l'inégalité triangulaire se démontre exactement comme pour les normes préhilbertiennes, à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin, toute semi-norme N vérifie $|N(x)-N(y)| \leqslant N(x-y)$ (même démonstration que pour les normes). Sur l'espace $\mathcal{B}$ nous pouvons ainsi introduire deux semi-normes : $M(f) = a(|f|,0)$ et $N'(f) = \sqrt{M(|f|^2)}$. Nous avons déjà $M \leqslant N' \leqslant \|\cdot\|_\infty$ (Cauchy-Scharz).

2 - a. On s'inspire ici de la preuve de l'inégalité de Bessel.

$$\begin{aligned} a(|f-P|^2,0) &= a\Big(\big(f-\sum_{k=1}^n b_k e_{\tau_k}\big)\big(\overline{f}-\sum_{k=1}^n \overline{b_k} e_{-\tau_k}\big),0\Big) \\ &= a(|f|^2,0) - 2\,\mathrm{Re}\big(\sum_{k=1}^n \overline{b_k} a(f,\tau_k)\big) + \sum_{j,k} b_j\overline{b_k}\, a(e_{\tau_j-\tau_k},0) \\ &= a(|f|^2,0) - \sum_k \overline{b_k} a(f,\tau_k) - \sum_k b_k\overline{a(f,\tau_k)} + \sum_k b_k\overline{b_k} \\ &= a(|f|^2,0) - \sum_k |a(f,\tau_k)|^2 + \sum_k |b_k - a(f,\tau_k)|^2\,. \end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors minimiser $a(|f-P|^2,0)$ pour n fixé en prenant systématiquement $b_k = a(f,\tau_k)$ (P est alors une espèce de somme partielle de série de Fourier de f). Pour ce choix particulier il demeure : $a(|f-P|^2,0) = a(|f|^2,0) - \sum_k |a(f,\tau_k)|^2$.

2 - b. La formule précédente amène immédiatement $a(|f|^2,0) \geqslant \sum_k |a(f,\tau_k)|^2$. C'est dire que les sommes finies associées à la famille $(|a(f,\lambda)|^2)_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)}$ sont majorées, soit encore que ladite famille est sommable, ou enfin que la famille $(a(f,\lambda))_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)}$ est de carré sommable. En passant à la borne supérieure sur toutes les sommes finies possibles, on trouve $a(|f|^2,0) \geqslant \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |a(f,\lambda)|^2$.

Interprétations. Introduisons l'application linéaire $\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & (a(f,\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}} \end{array} \right.$. Nous venons de montrer que l'image de Λ est incluse dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, et que Λ est continue, de norme subordonnée inférieure ou égale à 1 (en fait égale à 1 grâce à **III-1**). De plus, nous pouvons créer une nouvelle semi-norme sur $\mathcal{B}$ en posant $N(f) = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2}$. Il vient donc $N \leqslant N'$, la coïncidence de N et N' sur le sous-espace $\mathcal{A}$ formé des fonctions périodiques, et notamment sur $\mathcal{C}$.

2 - c. Pour cette question il est pratique de suivre une voie plus géométrique que technique, quitte à faire usage du concept légèrement hors-programme de semi-norme. Soit $\varepsilon > 0$ et $P \in \mathcal{C}$, tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On minore :

$$\begin{aligned} N'(f) &\geqslant N(f) = N(f-P+P) \geqslant N(P) - N(f-P) && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\geqslant N(P) - \|f-P\|_\infty = N'(P) - \|f-P\|_\infty && \text{(domination de } N \text{ par } \|\cdot\|_\infty \text{ et coïncidence sur } \mathcal{P}) \\ &\geqslant N'(f) - N'(f-P) - \|f-P\|_\infty \geqslant N'(f) - 2\|f-P\|_\infty && \text{(inégalité triangulaire encore et domination)} \\ &\geqslant N'(f) - \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'on a bien $N = N'$, soit (iii).

Interprétation. La formule précédente, qui englobe les formules de Parseval pour toutes les périodes, signifie que l'application Λ est isométrique entre les espaces préhilbertiens $\mathcal{B}$ et $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Il est peu vraisemblable que Λ puisse être une isométrie (surjective) car l'espace préhilbertien $\mathcal{B}$ n'est probablement pas complet, au contraire de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

3 - a. Soient f presque périodique, positive, telle que $f(x_0) > 0$, et $f(y) \geqslant c > 0$ pour $y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Soit $\ell \geqslant 2\delta$, tel que chaque intervalle de longueur ℓ contienne une quasipériode à $\frac{c}{2}$ près. Considérons un intervalle I de longueur supérieure à ℓ ; il doit contenir une telle quasipériode h, c'est-à-dire que $|f(x+h) - f(x)| \leqslant \frac{c}{2}$ pour tout x. Prenant x dans $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, nous avons $f(x+h) \geqslant f(x) - \frac{c}{2} \geqslant \frac{c}{2}$. Ainsi, la fonction f dépasse $\frac{c}{2}$ sur tout l'intervalle $H =]h + x_0 - \delta, h + x_0 + \delta[$, de longueur 2δ. Il alors est immédiat de trouver un intervalle J fermé de longueur δ sur lequel on a $f(y) \geqslant \frac{c}{2}$.

3 - b. On a $a(f,0) = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{p\ell} \int_{-p\ell/2}^{p\ell/2} f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale peut se découper en une somme de p intégrales sur des intervalles de longueur ℓ. Chacune de ces sous-intégrales vaut au moins $\frac{c\delta}{2}$, puisque f est positive. On en tire que $\frac{1}{p\ell} \int_{-p\ell/2}^{p\ell/2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{pc\delta}{2p\ell} = \frac{c\delta}{2\ell}$, valeur strictement positive et indépendante de p qui minore $a(f,0)$ par passage à la limite.

3 - c. Comme on l'a signalé, un produit scalaire préhilbertien est possible sur $\mathcal{B}$, du fait que $a(|f|^2, 0) = 0$ entraîne $f = 0$. L'application Λ, qui est linéaire, prend ainsi un caractère d'injectivité puisque si $a(f,\lambda) = 0$ pour tout λ alors par (iii) on a $a(|f|^2, 0) = 0$.

Interprétation. La semi-norme N, qui coïncide avec N', est en fait une norme sur $\mathcal{B}$, de même que M. On a les dominations $M \leqslant N \leqslant \|\cdot\|_\infty$.

3 - d. La sommabilité de la famille $(a(f,\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ assure immédiatement l'existence de $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a(f,\lambda_n) e_{\lambda_n}(t)$, ainsi que la convergence normale de cette série ; la somme est donc une fonction presque périodique. Le spectre de g est exactement l'ensemble des λ_n, car on calcule $a(g,\lambda)$ terme à terme (question **II-1-d**) :

$$a(g,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a(f,\lambda_n) a(e_{\lambda_n},\lambda) = \begin{cases} a(f,\lambda) & \text{si } \lambda \in \mathrm{Spec}(f) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fin de compte, f et g sont deux fonctions presque périodiques de même spectre, et la question précédente nous assure qu'elles coïncident.

Notes historiques. La théorie des fonctions presque périodiques fut essentiellement créée par Harald Bohr (frère du physicien Niels Bohr) entre 1926 et 1931, à partir de travaux préliminaires de Bohl (1906), Favard (1928), Bochner (1927). Elle connut immédiatement un grand succès avec les applications les plus diverses, parmi lesquelles la plus éclatante est la recherche de formules prédictives pour les marées, formules diffusées par le Service Hydrologique et Océanographique de la Marine et comportant une vingtaine de termes. Curieusement, les travaux de Bohr eurent de nombreuses applications en mécanique céleste, les mouvements des planètes étant considérés comme presque périodiques. L'approximation uniforme par des combinaisons linéaires d'exponentielles revient, dans ce cadre, à pratiquer des approximations de ces mouvements par des superpositions de mouvements circulaires de périodes incommensurables - le système de Ptolémée, en somme !

Courte bibliographie.

[1] Harald Bohr : *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New-York 1947.
[2] Shlomo Sternberg : *Celestial Mechanics*, W.A. Benjamin, 1969.
[3] Roger L. Cooke : *Almost periodic functions*, Amer. Math. Monthly vol.86 n°7 (août 1981), pp.515–525.