

LC 212

J. 2037

SESSION 2002

Filière MP (groupes M/MP/MPI)

(Epreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan)

Filières MP et PC (groupe I)

(Epreuve commune aux ENS de Paris et Lyon)

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

~

Tournez la page S.V.P.

Dans ce problème, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie. Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, la quantité $\langle x, y \rangle$ désignera toujours le produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (en abrégé : evn), on rappelle que l'espace dual E^* est muni canoniquement d'une norme (dite *duale*) définie par $\|f\| := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$. L'espace dual E^* muni de cette norme sera appelé le *dual normé* de E .

Un evn E est dit *isométrique* à un evn F si il existe un isomorphisme linéaire $f : E \rightarrow F$ préservant les normes, c'est à dire tel que $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Une telle f est appelée *isométrie* de E dans F .

Si $p = 1$ ou 2 , on note ℓ_n^p l'espace $\mathbf{R}^n$, muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. De même, on note ℓ_n^∞ l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Première partie : introduction.

Si $y \in \mathbf{R}^n$, on définit $\varphi_y : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$\varphi_y(x) := \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

C'est donc un élément du dual $(\mathbf{R}^n)^*$ de $\mathbf{R}^n$.

1-a) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_2 = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_2$.

b) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_\infty = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_1$.

c) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_1 = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_\infty$.

2) Montrer que l'application $x \rightarrow \varphi_x$ fournit une isométrie entre ℓ_n^2 et son dual normé, une isométrie de ℓ_n^1 sur le dual normé de ℓ_n^∞ , et enfin une isométrie de ℓ_n^∞ sur le dual normé de ℓ_n^1 .

3-a) Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, montrer que

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

b) En déduire que si x et y vérifient $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|\frac{x+y}{2}\|_2$, alors $x = y$.

c) En déduire que pour $n \geq 2$, ℓ_n^2 n'est isométrique ni à ℓ_n^1 , ni à ℓ_n^∞ .

4) Si $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$, On rappelle que A est dit *dense* dans B si B est inclus dans l'adhérence $\overline{A}$ de A , ou encore si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A .

a) Montrer que si U et V sont deux ouverts denses de $\mathbf{R}^n$, alors $U \cap V$ est encore dense dans $\mathbf{R}^n$.

b) Soit E un sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{R}^n$ (i.e. avec $\dim E < n$). Montrer que le complémentaire $\mathbf{R}^n - E$ de E dans $\mathbf{R}^n$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}^n$. [Indication : utiliser une base convenable.]

c) Si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , et si $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$, montrer que l'un au moins des E_i est égal à E .

5) Soit E un sous-espace de dimension n de ℓ_m^∞ . On suppose que $m \geq n \geq 2$.

a) On suppose que E possède (au moins) un élément $a = (a_1, \dots, a_n)$ tel que les $|a_i|$ soient deux-à-deux distincts. Montrer qu'il existe $x \neq y \in E$, avec

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = 1.$$

[Indication : prendre $x = \frac{a}{\|a\|_\infty}$, et choisir y assez proche de x .]

b) Si E ne possède pas d'élément comme ci-dessus, montrer qu'alors E est contenu dans un sous-espace de ℓ_m^∞ , isométrique à ℓ_{m-1}^∞ .

c) Montrer qu'il existe nécessairement $x \neq y \in E$, avec

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = 1.$$

d) En déduire que ℓ_n^2 , lorsque $n \geq 2$, n'est isométrique à aucun sous-espace de ℓ_m^∞ avec m fini. Qu'en est-il pour $n = 1$?

6) On note $\ell_{\mathbf{N}}^\infty$ l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $x_n \in \mathbf{R}$ et $\sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < \infty$. L'espace $\ell_{\mathbf{N}}^\infty$ est clairement un espace vectoriel pour les addition et multiplication scalaire standards, et normé pour la norme $\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\| := \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$.

a) Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ avec $x_k \in \mathbf{R}^n$ et $\|x_k\|_2 = 1$ pour tout k , telle que $\{x_k; k \in \mathbf{N}\}$ soit dense dans la sphère unité euclidienne $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x\|_2 = 1\}$ de $\mathbf{R}^n$.

b) En déduire qu'il existe une application linéaire $f : \ell_n^2 \rightarrow \ell_{\mathbf{N}}^\infty$ isométrique sur son image, c'est-à-dire telle que $\|f(x)\|_\infty = \|x\|_2$ pour tout $x \in \ell_n^2$.

Deuxième partie : distance entre evn.

Si E et F sont deux evn de même dimension, on pose

$$\rho(E, F) := \inf_f \|f\| \cdot \|f^{-1}\|,$$

l'infimum étant pris sur tous les isomorphismes f de E dans F . On pose aussi

Tournez la page S.V.P.

$$d(E, F) := \log \rho(E, F).$$

- 1) Si E, F et G sont trois evn de même dimension, montrer que $d(E, F) = d(F, E)$, et que $d(E, G) \leq d(E, F) + d(F, G)$.
- 2) Si E et F sont de même dimension, montrer que $d(E^*, F^*) \leq d(E, F)$ lorsque les espaces duaux sont munis de leur norme duale.
- 3) Si E et F sont de même dimension, montrer qu'il existe un isomorphisme $f_0 : E \rightarrow F$, tel que $\rho(E, F) = \|f_0\| \cdot \|f_0^{-1}\|$. [Indication : on cherchera f_0 parmi les isomorphismes de norme 1.]
- 4) Montrer que $d(E, F) \geq 0$, avec égalité si, et seulement si, E et F sont isométriques.

Troisième partie : calcul de $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty)$.

- 1) En considérant l'identité de $\mathbf{R}^n$ dans lui même, montrer que $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) \leq \frac{\log n}{2}$.

- 2-a) Si $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{R}^n$, montrer que

$$\sum_{\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1} \|\varepsilon_1 y_1 + \dots + \varepsilon_k y_k\|_2^2 = 2^k (\|y_1\|_2^2 + \dots + \|y_k\|_2^2);$$

[Indication : faire une récurrence pour $k \geq 2$.]

Dans la suite de cette question 2), on suppose qu'il existe n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbf{R}^n$, et des réels strictement positifs α et β , tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on ait

$$\alpha \max_{1 \leq i \leq n} | \langle x_i, x \rangle | \leq \|x\|_2 \leq \beta \max_{1 \leq i \leq n} | \langle x_i, x \rangle |.$$

- b) Montrer que $x_1, \dots, x_n$ est une base de $\mathbf{R}^n$. En conclure qu'il existe $x_1^*, \dots, x_n^*$ tels que $\langle x_i^*, x_j \rangle$ soit égal à 1 si $i = j$, et à 0 sinon.

- c) Montrer que pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$, on a

$$\alpha \max_{1 \leq i \leq n} |t_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n t_i x_i^* \right\|_2 \leq \beta \max_{1 \leq i \leq n} |t_i|.$$

- d) Montrer que $n\alpha^2 \leq \beta^2$. [Indication : on appliquera 2-a pour un choix approprié des y_i .]

- 3) Montrer que $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) = \frac{\log n}{2}$.

4) Calculer $d(\ell_n^2, \ell_n^1)$.

Quatrième partie : espaces ℓ_n^p , $p \in [1, +\infty]$.

A) Inégalités de convexité.

1) Soit $\alpha \geq 0$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^+$.

a) Si $\alpha \leq 1$, montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha.$$

b) Si $\alpha \geq 1$, montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha.$$

2) On se donne $p \in [1, +\infty]$ et on définit $p^* \in [1, +\infty]$ par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ (de sorte que $1^* = +\infty$ et $(+\infty)^* = 1$).

a) Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\exp\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^*}\right) \leq \frac{1}{p} \exp(\alpha) + \frac{1}{p^*} \exp(\beta).$$

b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $x, y \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{p^*} y^{p^*}.$$

B) Espaces ℓ_n^p .

Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. On retrouve bien ainsi les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ pour $p = 1$ et 2 . On rappelle que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

1) On veut montrer l'inégalité dite de *Hölder* : pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}.$$

a) Traiter directement le cas $\{p, p^*\} = \{1, +\infty\}$.

b) Si $p \in]1, +\infty[$, montrer que l'on peut supposer $\|x\|_p = \|y\|_{p^*} = 1$ et que les x_i et les y_i sont tous positifs ou nuls. Dédurre de A-2-b que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$.

Tournez la page S.V.P.

2) On veut montrer l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où tous les x_i et les y_i sont positifs.

b) Si $z \in \mathbf{R}^n$ est défini par $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$, que vaut $\|z\|_{p^*}$?

c) Montrer que $\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p \|z\|_{p^*} + \|y\|_p \|z\|_{p^*}$.

d) Montrer l'inégalité de Minkowski.

e) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$. On note ℓ_n^p l'evn $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

3) On considère à nouveau l'application $\mathbf{R}^n \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ introduite dans l'introduction, qui à x associe la forme linéaire φ_x . Montrer que c'est une isométrie de $\ell_n^{p^*}$ sur le dual de ℓ_n^p (ce dernier étant muni de la norme duale de ℓ_n^p décrite au début du problème).

C) Calcul de $d(\ell_n^p, \ell_n^q)$.

1) Montrer que $d(\ell_n^p, \ell_n^q) = d(\ell_n^{p^*}, \ell_n^{q^*})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

2) Montrer que $d(\ell_n^p, \ell_n^\infty) \leq \frac{\log n}{p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

3-a) Montrer que si $1 \leq p < q < \infty$, alors

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_q n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

b) En déduire que sous l'hypothèse ci-dessus, on a

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \log n.$$

4) Si $2 \leq p \leq q \leq \infty$, montrer que

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \log n.$$

5) En déduire que pour $(p-2)(q-2) \geq 0$, on a

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) = \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right| \log n.$$

6) Pour quelles valeurs de n et de p l'espace ℓ_n^p est-il euclidien ?

7) Montrer que ℓ_2^1 et ℓ_2^∞ sont isométriques. la formule donnée en C-4 est-elle valable pour tout n et tout $1 \leq p, q \leq \infty$?