Corrigé ENS Lyon-Cachan 2003

Première partie

On rappelle pour la suite les résultats élémentaires suivants :

- Si M et N sont deux matrices rectangulaires de formats compatibles, le rang de MN est inférieur ou égal aux rangs de M et de N.
- Le rang d'une matrice ne change pas si on la multiplie (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.
- Le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de la matrice.

1. D'après les remarques préliminaires, si P et Q appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{rg} PAQ = \operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg} {}^tQ^tA^tP = \operatorname{rg} A$, donc $(f \in G \cup G'$ et $\operatorname{rg} A = 1) \Rightarrow \operatorname{rg} f(A) = 1$.

2. Si u est un endomorphisme de rang 1, de matrice A dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$, son image est une droite, dirigée par un certain vecteur e non nul. En appelant X le vecteur colonne représentant e dans B, en posant $u(e_j) = b_j e$ et V le vecteur ligne $(b_1, \ldots b_n)$, on en déduit que $A = CV$.

3. (a) Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel engendré par $({}^tV, {}^tV')$ dans $\mathcal{C}$. Soit e unitaire dans $\mathcal{P}$ orthogonal à ${}^tV'$. On choisit alors $Y = \dfrac{e}{Ve}$ ($Ve \neq 0$ car e n'est pas orthogonal à ${}^tV'$) pour avoir $VY = 1$ et $V'Y = 0$. La méthode est analogue pour construire Y'.

   (b) $(XV + X'V')Y = X$ et $(XV + X'V')Y' = X'$ donc X et X' appartiennent à l'image de $XV + X'V'$ qui est de rang 1, donc X et X' sont liés.

4. Si F n'est inclus ni dans F_1 ni dans F_2, il existe un vecteur x_1 appartenant à $F \setminus F_1$, donc à $F_2 \setminus F_1$ et un vecteur x_2 appartenant à $F \setminus F_2$, donc à $F_1 \setminus F_2$. Mais alors $x_1 + x_2 \in F$, donc par exemple $x_1 + x_2 \in F_1$, or $x_2 \in F_1$, donc $x_1 \in F_1$: contradiction (idem si $x_1 + x_2 \in F_2$).

5. (a) XV est de rang ≤ 1 car l'image de l'endomorphisme associé est incluse dans la droite $\mathbb{C}X$. L'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{M} \\ V & \mapsto & XV \end{array}$ est linéaire, injective, d'image $X\mathcal{L}$, lequel est donc un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension n. Idem concernant $\mathcal{C}V$.

   (b) On considère une base de F de la forme $(X_iV_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $I = \{i \in [1, n]/\ (V_1, V_i) \text{ libre }\}$. Si $i \in I$, $X_1V_1 + X_iV_i \in F$, donc d'après 3, X_1 et X_i sont liés, et si $i \notin I$, V_1 et V_i sont liés. Par conséquent, la famille $(X_iV_1)_{i \notin I} \cup (X_1V_i)_{i \in I}$ est une base de F, i.e $F \subset X_1\mathcal{L} \cup \mathcal{C}V_1$. D'après 4, F est inclus dans l'un des deux et étant tous deux de dimension n d'après 5a, ils sont égaux.

   (c) Si X et X' sont liés, $X\mathcal{L} = X'\mathcal{L} = X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.

   Sinon, soit $A \in X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$: $A = XY = X'Y'$, d'où $XY - X'Y' = 0$ donc par 3, Y et Y' sont colinéaires donc $\exists a \in \mathbb{C},\ Y' = aY$, d'où $(X - aX')Y = 0$, or (X, X') libre, donc $Y = 0$, d'où $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L} = \{0\}$.

   De même, si V et V' sont liés, $\mathcal{C}V = \mathcal{C}V'$, sinon $\mathcal{C}V \cap \mathcal{C}V' = \{0\}$.

   Soit $A \in X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$, $A \neq 0$: $A = XY = UV$, avec Y et U non nulles. $A \in X\mathcal{L} \cap U\mathcal{L}$, donc par ce qui précède, $\exists a \neq 0,\ U = aX$, i.e $X(Y - aV) = 0$, i.e $Y = aV$, d'où $A \in \mathbb{C}XV$. La réciproque étant évidente, $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V = \mathbb{C}XV$.

6. Soit F un tel sous-espace. D'après 5b, on peut supposer que $F = X\mathcal{L}$, avec $X \neq 0$ (la méthode sera analogue si $F = \mathcal{C}V$). Soit $(XL_1, \ldots XL_n)$ une base de F. $f(F)$ est un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension $\leq n$ formé de matrices de rang ≤ 1, donc est inclus dans un $Y\mathcal{L}$ ou un $\mathcal{C}V$. Plaçons-nous dans le premier cas et posons $f(XL_i) = YL'_i$. Si la famille $(YL'_1, \ldots YL'_n)$ est liée, il existe n scalaires non tous nuls (a_k) tels que $\sum a_k YL'_k = 0$, soit $f(X \sum a_k L_k) = 0$. Si $X \sum a_k L_k$ était de rang 1, son

image aussi, ce qui n'est pas le cas, donc cette matrice est nulle, ce qui contredit que $(XL_1,\dots XL_n)$ est une base de F, donc $(YL'_1,\dots YL'_n)$ est une base de $f(F)$, i.e $f(F)=Y\mathcal{L}$. On procède de même si $f(F)\subset\mathcal{C}V$.

7. (a) Soit $(L_1,\dots L_n)$ la base canonique de $\mathcal{L}$, et $Y_1L'_j=f(X_1L_j)$. Supposons $\sum a_kL'_k=0$. Alors $f(X_1\sum a_kL_k)=0$, or $f(\mathcal{R}_1)\subset\mathcal{R}_1$ et $X_1\sum a_kL_k$ est de rang ≤ 1, donc elle est nulle, d'où $\sum a_kL_k=0$, et tous les a_k sont nuls. Finalement, $(L'_1,\dots,L'_n)$ est une base de $\mathcal{L}$. Il existe donc $Q\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k\in[1,n]$, ${}^tL'_k={}^tQ\,{}^tL_k$, i.e $L'_k=L_kQ$, d'où par linéarité, $f(X_1V)=Y_1VQ$ pour tout $V\in\mathcal{L}$.

   (b) Si $f(X_1\mathcal{L})=f(X_2\mathcal{L})$ alors $Y_1\mathcal{L}=Y_2\mathcal{L}$, et d'après 5c, Y_1 et Y_2 sont colinéaires, donc $\exists a\neq 0,\ Y_2=aY_1$. D'après 7a, il existe Q et Q' dans $GL_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall V\in\mathcal{L},\ f(X_1V)=Y_1VQ$ et $f(X_2V)=aY_1VQ'$. Soit λ une valeur propre de la matrice ${}^tQ^{-1}\,{}^tQ'$ et ${}^tV$ un vecteur propre (non nul) associé : ${}^tQ^{-1}\,{}^tQ'\,{}^tV=\lambda{}^tV$ d'où $VQ'=\lambda VQ$, d'où $f((X_2-a\lambda X_1)V)=a\lambda Y_1VQ-a\lambda Y_1VQ=0$. Or $(X_2-a\lambda X_1)V$ est de rang ≤ 1, donc $(X_2-a\lambda X_1)V=0$, d'où $X_2=a\lambda X_1$: contradiction.

   (c) D'après 6, $f(\mathcal{C}V)$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}U$. Supposons $f(\mathcal{C}V)=Y\mathcal{L}$.

   $\mathcal{C}V\cap X_1\mathcal{L}=\mathbb{C}X_1V$, donc $\mathbb{C}f(X_1V)=f(\mathcal{C}V\cap X_1\mathcal{L})\subset f(\mathcal{C}V)\cap f(X_1\mathcal{L})=Y\mathcal{L}\cap Y_1\mathcal{L}$. D'après 5c, cela impose que Y_1 et Y sont colinéaires. Par le même raisonnement, on montre que Y_2 et Y sont colinéaires, donc $Y_1\mathcal{L}=Y_2\mathcal{L}$, soit $f(X_1\mathcal{L})=f(X_2\mathcal{L})$, en contradiction avec la question 7b.

   (d) $f(X\mathcal{L})$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}U$. Supposons $f(X\mathcal{L})=\mathcal{C}U$.

   Soit V un vecteur ligne non colinéaire à U. $f(\mathbb{C}XV)=f(X\mathcal{L}\cap\mathcal{C}V)\subset f(X\mathcal{L})\cap f(\mathcal{C}V)=\mathcal{C}U\cap\mathcal{C}V=\{0\}$. Ceci est impossible car les éléments non nuls de $\mathbb{C}XV$ sont de rang 1 donc ceux de $f(\mathbb{C}XV)$ également.

   (e) Soit $X\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$. D'après d, il existe $Z\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$ tel que $f(X\mathcal{L})=Z\mathcal{L}$, et d'après a, il existe $Q'\in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall V\in\mathcal{L},\ f(XV)=ZVQ'$.

   Posons avec 7c $f(\mathcal{C}V)=\mathcal{C}U$. $f(X_1V)$ et $f(XV)$ appartiennent à $f(\mathcal{C}V)$, donc il existe L_1 et L tels que $Y_1VQ=f(X_1V)=L_1U$ et $ZVQ'=f(XV)=LU$. Les deux matrices Y_1VQ et ZVQ' s'annulent sur le même hyperplan $(\operatorname{Ker}U)^\perp$, donc les vecteurs lignes VQ et VQ' sont colinéaires, d'où en transposant ${}^tQ'^{-1}\,{}^tQ{}^tV$ est colinéaire à ${}^tV$, ceci pour tout vecteur colonne ${}^tV$. Ceci implique classiquement que $\exists\lambda\neq 0,\ {}^tQ'^{-1}\,{}^tQ=\lambda I_n$, d'où $Q=\lambda Q'$. Par conséquent, $f(XV)=\frac{Z}{\lambda}VQ=YVQ$ en posant $Y=\frac{Z}{\lambda}$.

   (f) Soit $(E_1,\dots E_n)$ la base canonique de $\mathcal{C}$. Pour chaque indice i, il existe $Y_i\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$ tel que $\forall V\in\mathcal{L},\ f(E_iV)=Y_iVQ$. Soit P l'élément de $\mathcal{M}$ tel que pour tout i, $PE_i=Y_i$. Ainsi, $\forall V,\ f(E_iV)=PE_iVQ$. Par linéarité, on en déduit que $\forall X\in\mathcal{C},\forall V\in\mathcal{L},\ f(XV)=PXVQ$. Si P n'est pas inversible, il existe X non nul tel que $PX=0$ d'où $f(XV)=0$, ce qui est impossible car $\operatorname{rg}XV=1$.

   Soit $A\in\mathcal{M}$. On décompose A en $\sum_{i=1}^n X_iV_i$, où X_iV_i est la matrice de rang ≤ 1 dont la $i$ème colonne est celle de A et les autres sont nulles. $f(A)=\sum_i f(X_iV_i)=\sum_i PX_iV_iQ=PAQ$. Ceci prouve que $f\in G$.

8. Supposons maintenant qu'il existe $X_1,X_2\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1\mathcal{L})=\mathcal{C}V_1$ et $f(X_2\mathcal{L})=\mathcal{C}V_2$. Alors $(T\circ f)(X_1\mathcal{L})={}^tV_1\mathcal{L}$ et $(T\circ f)(X_2\mathcal{L})={}^tV_2\mathcal{L}$. On en déduit par 7 que $T\circ f\in G$, soit $f\in G'$.

   Si $f(X_1\mathcal{L})=Y_1\mathcal{L}$ et $f(X_2\mathcal{L})=\mathcal{C}V_2$ avec X_1 et X_2 indépendants, on utilise X_1+X_2 (indépendant de X_1 et de X_2) pour se ramener à l'un des deux cas précédents.

   Si $n=1$, la question est sans intérêt.

Deuxième partie

1. Le produit de 2 matrices inversibles est inversible et la transposée d'une matrice inversible est inversible, donc $f\in\mathcal{G}$ et $A\in GL_n(\mathbb{C})\implies f(A)\in GL_n(\mathbb{C})$.

2. (a) • Soit $A_r=\begin{pmatrix}0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Alors $I_n-\lambda A_r$ est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 donc est inversible pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

- Si A est de rang $r \leq n-1$, alors A et A_r ont même rang donc il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PA_rQ$, d'où $PQ - \lambda A = P(I_n - \lambda A_r)Q \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b)
- Soit $B_r \in \mathcal{M}$ diagonale à coefficients diagonaux $1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{r}, 0, \dots 0$. $I_n - \lambda B_r$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots r\}$
- Si A est de rang $r \leq n-1$, il existe comme plus haut P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PB_rQ$, donc $PQ - \lambda A = P(I - \lambda B_r)Q$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots r\}$.

3. (a) A est de rang $r \leq n-1$. D'après 2a, $\exists M \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{C},\ M - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $f(M) - \lambda f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $f(A)$ est inversible, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, f(A)^{-1}f(M) - \lambda I_n$ est inversible, ce qui est faux en prenant pour λ une valeur propre complexe de $f(A)^{-1}f(M)$.

(b)
- Si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg} f(A) = n$ par hypothèse.
- Sinon, on pose $r = \operatorname{rg} A$ et on applique 2b. Il existe N inversible telle que $N - \lambda A$ est inversible sauf pour exactement r valeurs de λ. Or M inversible équivaut à $f(M)$ inversible, d'où $f(N) - \lambda f(A)$ est non inversible pour r valeurs de λ, or $f(N)$ est inversible, donc en mettant $\lambda f(N)$ en facteur, $\lambda^{-1}I_n - f(N)^{-1}f(A)$ vérifie la même propriété. Le polynome caractéristique de $f(N)^{-1}f(A)$ admettra r racines distinctes non nulles, et 0 est aussi racine, il s'écrit donc $X^{\alpha_0}\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Ce polynome est de degré n, donc $\alpha_0 \leq n-r$. Or $\dim \operatorname{Ker}\big(f(N)^{-1}f(A)\big) \leq \alpha_0$, d'où $\operatorname{rg} f(A) = \operatorname{rg} f(N)^{-1}f(A) \geq n - \alpha_0 \geq r$.

(c) $f(A) = 0 \Rightarrow A = 0$ d'après 3b, ce qui prouve l'injectivité de f, donc sa bijectivité. $f(GL_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ d'après 3a, donc f^{-1} vérifie la même propriété que f. En lui appliquant 3b, il vient $\forall B,\ \operatorname{rg} f^{-1}(B) \geq \operatorname{rg} B$, en l'appliquant à $B = f(A)$, on conclut que f préserve le rang.

(d) Si $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$, alors f préserve le rang, donc $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, donc $f \in \mathcal{G}$ par la partie 1. La question 1 assure l'équivalence cherchée.

Troisième partie

1. $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$. $\forall x,\ ((u^* \circ u)(x), x) = \|u(x)\|^2 \geq 0$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$, donc $u^* \circ u$ est hermitien positif de même rang que u.

$I_E = (u^* + \overline{\lambda}v^*) \circ (u + \lambda v) = u^* \circ u + \lambda u^* \circ v + \overline{\lambda}v^* \circ u + v^* \circ v$. En prenant pour λ les valeurs 1 et -1 et en ajoutant, on obtient $u^* \circ u + v^* \circ v = I_E$, d'où $\lambda u^* \circ v + \overline{\lambda}v^* \circ u = 0$. On choisit alors $\lambda = 1$ puis $\lambda = i$, ce qui donne en ajoutant $u^* \circ v = 0$.

2. (a) Soit $u = \lambda_1 u_1 + \dots \lambda_{p-1}u_{p-1}$. $u + \lambda u_p$ est unitaire pour tout complexe λ de module 1, donc par 1a, $(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i u_i)^* \circ u_p = 0$ et (2) $\quad (\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i u_i)^* \circ (\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i u_i) + u_p^* \circ u_p = I_E$.
En prenant $(\lambda_1, \dots \lambda_{p-1}) = (1, 1, \dots 1)$ puis $(1, -1, \dots -1)$ et en ajoutant, on obtient $u_1^* \circ u_p = 0$. Les indices jouant le même rôle, il en résulte que pour tous i, j distincts, $u_i^* \circ u_j = 0$. En remplaçant dans (2), on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} u_i^* \circ u_i = I_E$.

(b) Pour tous vecteurs x et y et pour tous indices i et j distincts, $(u_j(x), u_i(y)) = (u_i^* \circ u_j(x), y) = 0$ donc $\operatorname{Im} u_i$ et $\operatorname{Im} u_j$ sont orthogonaux.

(c) L'adjoint d'un endomorphisme unitaire est unitaire, donc on peut remplacer chaque u_i par u_i^* en conservant les hypothèses du 2. On obtient alors $I_E = \sum u_i \circ u_i^*$, soit $E = \sum \operatorname{Im} u_i$. Ces espaces vectoriels étant deux à deux orthogonaux, la somme est directe, donc en passant aux dimensions, on obtient $n = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} u_i$.

(d) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes de module 1. $\sum \lambda_i f(u_i \circ w) = f(\sum \lambda_i u_i \circ w) = f((\sum \lambda_i u_i) \circ w)$. Cet endomorphisme est unitaire car $\sum \lambda_i u_i$ et w le sont, donc l'image par f de leur composé aussi. En appliquant la question 2c aux endomorphismes $f(u_i \circ w)$, on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} f(u_i \circ w) = n$.

(e) L'énoncé nous demande d'admettre la connexité par arcs de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, qui se démontre en diagonalisant w dans le groupe unitaire, les valeurs propres étant de module 1.
D'après 2d, $\forall t \in [0, 1],\ \sum \operatorname{rg} \varphi_i(t) = n$, où on a posé φ_i la fonction continue $t \mapsto f(u_i \circ \varphi(t))$.
Soit $t_0 \in [0, 1]$ et $r = \operatorname{rg} \varphi_i(t_0)$. Il existe donc un déterminant extrait de $\varphi_i(t_0)$ de taille r non nul, donc par continuité de φ_i, il existe un voisinage de t_0 sur lequel la propriété est encore vérifiée et donc $\operatorname{rg} \varphi_i(t) \geq r$. On procède ainsi pour chaque indice i et on sait que $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} \varphi_i(t) = n$, donc on en déduit que sur un intervalle $]t_0 - \alpha(t_0), t_0 + \alpha(t_0)[$ (inclus dans

l'intersection des voisinages précédents), toutes les fonctions φ_i sont de rang constant. On recouvre le compact $[0,1]$ par ces ouverts, on en extrait un sous recouvrement fini, dont les intervalles se chevauchent, et en regardant les valeurs de φ_i sur ces intersections, on en déduit que chaque fonction φ_i est constante sur $[0,1]$, d'où $\operatorname{rg} f(u_i \circ w) = \operatorname{rg} \varphi_i(1) = \operatorname{rg} \varphi_i(0) = \operatorname{rg} f(u_i)$, donc le rang de $f(u_i \circ w)$ reste constant.

(f) Remarquons qu'en prenant $w = I_E$ et en appliquant 2e, on obtient $\operatorname{rg} f(u_i \circ w) = \operatorname{rg} f(u_i)$. En procédant comme aux questions 2d et 2e, on démontre que $\forall w \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}),\ \operatorname{rg} f(w \circ u_i) = \operatorname{rg} f(u_i)$. Si w_2 est unitaire et $(\lambda_1, \dots \lambda_p)$ sont de module 1, $(\sum_i \lambda_i u_i \circ w_2)^*(\sum_i \lambda_i u_i \circ w_2) = w_2^* \circ (\sum \lambda_i u_i)^* \circ (\sum \lambda_i u_i) \circ w_2 = w_2^* \circ I_E \circ w_2 = I_E$, donc les endomorphismes $(u_1 \circ w_2, \dots u_p \circ w_2)$ vérifient l'hypothèse de la question 2.

On en déduit que pour w_1 unitaire, $\operatorname{rg} f(w_1 \circ u_i \circ w_2) = \operatorname{rg} f(u_i \circ w_2)$. Or $\operatorname{rg} f(u_i \circ w_2) = \operatorname{rg} f(u_i)$, donc $\operatorname{rg} f(w_1 \circ u_i \circ w_2) = \operatorname{rg} f(u_i)$.

3. $\underline{e}$ désigne la base canonique de E. Soit u_i le projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{C}e_i$, pour $1 \le i \le n$. $\lambda_1, \dots \lambda_n$ étant des complexes de module 1, $\sum_{i=1}^n$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dans la base $\underline{e}$ et est donc clairement unitaire.

4. Soit u un endomorphisme de rang 1. Il existe un vecteur unitaire e et une forme linéaire non nulle l tels que $\forall x \in E,\ u(x) = l(x)e$.

Si w_1 et w_2 sont deux endomorphismes, $(w_1 \circ u \circ w_2)(x) = l(w_2(x))w_1(e)$.

On introduit alors w_1 unitaire tel que $w_1(e) = e_i$ et w_2 unitaire envoyant l'hyperplan $(\mathbb{C}e_i)^\perp$ sur l'hyperplan $\operatorname{Ker} l$, de sorte que $\operatorname{Ker}(l \circ w_2) = (\mathbb{C}e_i)^\perp$. On en déduit que $\exists \alpha \neq 0, \forall x \in E,\ (l \circ w_2)(x) = \alpha(e_i|x)$.

On a alors $\forall x \in E,\ (w_1 \circ u \circ w_2)(x) = \alpha(e_i|x)e_i$, donc $w_1 \circ u \circ w_2 = \alpha u_i$, i.e $u = \alpha w_1^{-1} \circ u_i \circ w_2^{-1}$. D'après 2 et 3, $\operatorname{rg} f(u) = \operatorname{rg} f(w_1^{-1} \circ u_i \circ w_2^{-1}) = \operatorname{rg} f(u_i)$. Or $\sum_{i=1}^n \operatorname{rg} f(u_i) = n$ d'après 2d, donc $\operatorname{rg} f(u) = n$, d'où $\operatorname{rg} f(u) = 1$. Par conséquent $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, et grâce à la partie 1, $f \in \mathcal{G}$.

N.B : Si $f = \varphi_{P,Q}$, on peut démontrer (à l'aide d'une décomposition polaire) que $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ P \in \lambda \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.