CENTRALE 2003. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.
Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Étude d'un premier exemple.

I.A. Une primitive de $t \longmapsto e^{(-1+i)t}$ étant $t \longmapsto -\dfrac{1+i}{2}e^{-t}(\cos t+i\sin t)$ il en résulte immédiatement, par séparation des parties réelles et imaginaires, que :

$$e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) \quad \text{et} \quad e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x). \quad \square$$

I.B. La solution générale de $y' - y = 0$ est $y = \lambda e^x$ et $\lambda(x)e^x$ est solution de $y' - y = -\cos x$ si et seulement si $\lambda'(x)e^x = -\cos x$. On peut donc en particulier choisir, compte-tenu de la convergence de l'intégrale en $+\infty$, $\lambda(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}\,t$ de sorte que $\dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$ est solution particulière.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \cos x = 0$ est donc $Y_\lambda = \lambda e^x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$. $\square$

Remarquons que $Y_0(x)$ est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.

De même la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \sin x = 0$ est $Z_\lambda = \lambda e^x + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. $\square$

I.C.1. D'après la première question Φ est bien définie. Elle est en outre clairement linéaire et, toujours d'après la première question, les images des fonctions *cosinus* et *sinus* appartiennent à Π. Il en découle que Φ définit bien un endomorphisme de Π.

D'après la première question, la matrice de Φ dans la base (*cosinus, sinus*) est $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

I.C.2. Si $f(x) = a\cos x + b\sin x$ il vient que $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ de sorte que $||f||_\infty = \sqrt{a^2+b^2}$.

Alors $f_1(x) = \dfrac{a+b}{2}\cos x + \dfrac{b-a}{2}\sin x$ de sorte que $||f_1||_\infty = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}||f||_\infty$. $\square$

Il en résulte que $||f_n||_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}^n}||f||_\infty$.

Ainsi, pour toute fonction $f \in \Pi$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. $\square$

Partie II. Étude d'un deuxième exemple.

II.A. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t$ converge car $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(\dfrac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$. Il en résulte, par la méthode de la variation de la constante de la même manière exactement qu'en I.B., que la solution générale sur $]0,+\infty[$ de $y' - y + \dfrac{1}{x} = 0$ est :

$Y_\lambda(x) = \lambda e^x + e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t$. $\square$

Par intégration par parties, il vient que $0 \leqslant Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{1}{x}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Y_0(x) = 0$.

De l'expression de la solution générale, il en découle que Y_0 est la seule solution bornée au voisinage de $+\infty$ (en fait elle tend même vers 0). $\square$

On a, au voisinage de 0^+, $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t} > 0$ de sorte que, par la règle des équivalents pour la convergence des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t = +\infty$.

De l'expression de la solution générale, il en découle que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} Y_\lambda(x) = +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

II.B.1 D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on dispose bien de l'existence et de l'unicité de la solution Y_m telle que $Y_m(x_m) = y_m$ pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$.

On a en particulier $Y_m(x_m) - Y_m'(x_m) + \dfrac{1}{x_m} = 0$ donc $Y_m'(x_m) = 0$ si et seulement si $y_m = \dfrac{1}{x_m}$.

Donc $\mathcal{H}$ est la branche d'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$. C'est l'ensemble des points des courbes intégrales à tangente horizontale. $\square$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ il en résulte classiquement que toute solution est de classe $\mathcal{C}^2$ et ainsi on a en particulier $Y_m''(x_m) - Y_m'(x_m) - \dfrac{1}{x_m^2} = 0$ donc $Y_m''(x_m) = 0$ si et seulement si $Y_m'(x_m) + \dfrac{1}{x_m^2} = 0$ soit si et seulement si $Y_m(x_m) - \dfrac{1}{x_m} + \dfrac{1}{x_m^2} = 0$.

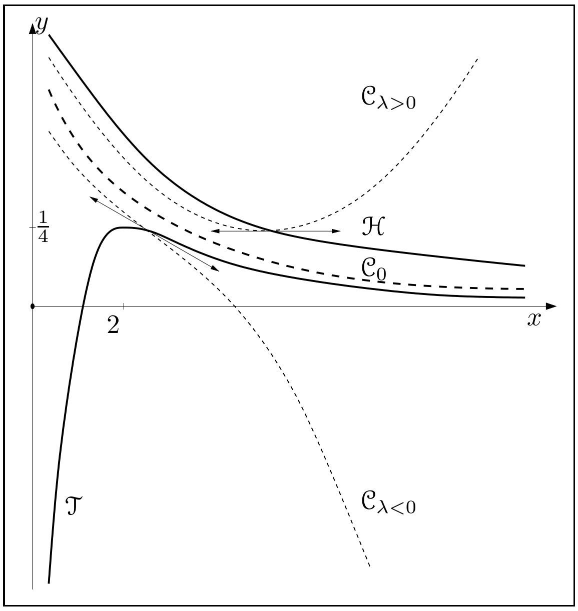
Donc $\mathcal{T}$ est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ pour $x > 0$. C'est l'ensemble des points d'inflexion analytique des courbes intégrales (on peut noter qu'en un tel point la dérivée est forcément négative égale à $-\dfrac{1}{x_m^2}$). $\square$

II.B.2 On a déjà noté que $Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ donc $Y_0(x) < \dfrac{1}{x}$.

Par parties à nouveau, il vient que $Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{2e^{-t}}{t^3}\,\mathrm{d}\,t$ donc $Y_0(x) > \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi la courbe intégrale $\mathcal{C}_0$ est strictement comprise entre les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$. $\square$

II.B.3



- Les graphes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ sont clairs.
- Comme $Y_0(x) < \dfrac{1}{x}$ d'après ci-dessus, Y_0 est toujours décroissante. D'où l'allure de $\mathcal{C}_0$.
- $Y_{\lambda_1}(x) > Y_0(x)$, tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, et tangente horizontale en un point de $\mathcal{H}$. Et en un seul point sinon, par le théorème de Rolle, Y_{λ_1}'' s'annulerait ce qui est impossible car $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_0$ elle-même strictement au dessus de $\mathcal{T}$. D'ou l'allure de $\mathcal{C}_{\lambda_1}$.
- $Y_{\lambda_2}(x) < Y_0(x)$ donc $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ est toujours en dessous de $\mathcal{C}_0$ donc a fortiori de $\mathcal{H}$ et donc la dérivée est toujours négative. On dispose des limites en 0^+ et en $+\infty$ d'où l'allure de $\mathcal{C}_{\lambda_2}$. Elle coupe $\mathcal{T}$ en son point d'inflexion.

Partie III. La transformation Φ.

III.A. Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^{-\alpha_i} f_i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Alors $x^{-\alpha}\big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ avec $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$ donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. $\square$

III.B. Pour $f \in \mathcal{E}$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge car $e^{-t} f(t) = o(e^{-t} t^\alpha) = o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$. Il en résulte, de la même manière que précédemment par la méthode de la variation de la constante, que la solution générale sur I de l'équation E_f est $y = \lambda e^x + f_1(x)$ avec $f_1(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Pour prouver que f_1 est l'unique solution appartenant à $\mathcal{E}$, il suffit donc clairement de prouver que $f_1 \in \mathcal{E}$.

Comme $f \in \mathcal{E}$, il existe un entier n_0 tel que $f(x) = o(x^{n_0})$ au voisinage de $+\infty$. Par principe d'intégration de la relation o dans le cas de la convergence, il vient que $f_1(x) = o\big(\varphi(x)\big)$ avec $\varphi(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{n_0}\,\mathrm{d}\,t$.

Or $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-(t-x)} t^{n_0}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} e^{-u}(x+u)^{n_0}\,\mathrm{d}\,u = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n_0} \mathrm{C}_{n_0}^k\, x^k e^{-u} u^{n_0-k}\,\mathrm{d}\,u = \sum_{k=0}^{n_0} \mathrm{C}_{n_0}^k (n_0-k)!x^k$

donc $\varphi(x) = O(x^{n_0})$ ce qui entraîne que $f_1(x) = o\Big(O(x^{n_0})\Big) = o(x^{n_0})$. $\square$

III.C. Compte-tenu de ce qui précède on a $f_n' - f_n + f_{n-1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Désignons par K un compact quelconque de I. On ne restreint clairement pas la généralité du problème en supposant que K est un intervalle (fermé borné) puisque tout compact de I est inclus dans un tel intervalle.

- Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur K vers une fonction g. Alors la suite (f'_n) égale à la suite $(f_n - f_{n-1})$ converge uniformément sur K vers la fonction nulle. Le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions s'applique alors et prouve que la fonction g est dérivable sur K de dérivée la fonction nulle. Ce qui prouve que g est constante sur K puisque K est un intervalle. Ainsi (1) implique (2).
La réciproque étant évidemment vraie il en découle que (1) $\iff$ (2).

- Par ailleurs la convergence d'une suite dans un espace normé étant équivalente à la convergence de la série télescopique associée, en particulier dans l'espace $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$ muni de la norme uniforme, il vient que (1) est équivalente à (3) puisque la série télescopique associée à la suite (f_n) n'est autre que la série $\sum f'_n$ comme déjà noté.

- En conclusion (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\square$

III.D. On raisonne par récurrence sur n, la formule proposée étant vraie pour $n=0$ par définition de Φ.
Supposons la formule vraie au rang n.
En notant que $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$, il vient par hypothèse de récurrence que $f_{n+1}(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f_1(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.
Intégrons par parties entre x et A en dérivant $f_1(t)e^{-t} = \displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}\,u$ (de dérivée $-e^{-t}f(t)$) :
$$\int_x^A \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f_1(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{(A-x)^n}{n!} f_1(A)e^{-A} + \int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t.$$
Or il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f_1(A) = o(A^\alpha)$ lorsque $A\to+\infty$. Donc $\dfrac{(A-x)^n}{n!} f_1(A)e^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$.
Il en découle que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f_1(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ ce qui prouve que la formule est vraie au rang $n+1$.
En conclusion $f_{n+1}(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u)e^{-u}\,\mathrm{d}\,u \quad \forall x\in I \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ $\square$

III.E. • Si $f\in\operatorname{Ker}\Phi$ alors $x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est identiquement nulle donc de dérivée nulle ce qui implique que f est identiquement nulle. Ainsi Φ est injective de $\mathcal{E}$ dans lui-même. $\square$

- Si $g = \Phi(f)$ alors g vérifie l'équation différentielle $y' - y + f = 0$ donc, comme déjà noté, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g' = g - f \in \mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Ainsi $\operatorname{Im}\Phi$ est inclus dans l'ensemble des applications g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que g et g' appartiennent à $\mathcal{E}$.
Réciproquement soit g une application de cet espace. Alors f définie par $f = g - g'$ appartient $\mathcal{E}$ (car sous-espace) et g vérifie l'équation $y' - y + f = 0$. Or g appartient à $\mathcal{E}$ donc $g = \Phi(f)$ d'après la question III.B.

En conclusion Φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des applications g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que g et g' appartiennent à $\mathcal{E}$ et Φ^{-1} est définie par $\Phi^{-1}(g) = g - g'$. $\square$

Partie IV. Fonctions bornées.

IV.A. La solution générale de E_f sur $\mathbb{R}$ est comme précédemment $y = \lambda e^x + f_1(x)$ avec $f_1(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.
Or f_1 est bornée sur $\mathbb{R}$ car $|f_1(x)| \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} ||f||_\infty e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = ||f||_\infty$ pour tout réel x (au passage notons que $||f_1||_\infty \leqslant ||f||_\infty$). Il en découle clairement que f_1 est la seule solution de E_f qui soit bornée sur $\mathbb{R}$. $\square$

IV.B. On a noté précédemment que $||f_1||_\infty = ||\Phi(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ ce qui prouve que Φ est continue par caractérisation de la continuité des applications linéaires. $\square$
Remarque : cela prouve également que $|||\Phi|||_\infty \leqslant 1$. En fait $|||\Phi|||_\infty = 1$ comme on le voit en considérant la fonction constante égale à 1.

IV.C. • $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{K}$ est évidemment réduit à la fonction nulle ce qui prouve que la somme est directe et si $f\in\mathcal{L}$ admet ℓ comme limite en $+\infty$ alors $f = (f-\ell)+\ell$ appartient bien à $\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{K}$. Ainsi $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{K}$. $\square$

- Soit $f\in\mathcal{L}_0$ et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe A tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$. Alors pour $x \geqslant A$ il vient que $|f_1(x)| \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \varepsilon e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \varepsilon$. Donc $f_1\in\mathcal{L}_0$. Par ailleurs la stabilité de $\mathcal{K}$ par Φ étant claire, il en résulte que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$ stables par Φ. $\square$

IV.D. Soit $f\in\mathcal{L}$ que l'on décompose en $f = g + \ell$ avec $g\in\mathcal{L}_0$ et $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Compte-tenu de ce qui précède $f_n = g_n + \ell$ avec $g_n = \Phi^n(g)$.Soit désormais $a\in\mathbb{R}$ et $J_a = [a,+\infty[$.
Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe $A > 0$ tel que $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$. Soit $B = \max(A, A-a)$. Il vient :
$$|g_{n+1}(x)| \leqslant \Big|\int_0^B \frac{u^n}{n!} g(x+u)e^{-u}\,\mathrm{d}\,u\Big| + \Big|\int_B^{+\infty} \frac{u^n}{n!} g(x+u)e^{-u}\,\mathrm{d}\,u\Big|$$

Pour $x \geqslant a$, dans la seconde intégrale, $|g(x+u)| \leqslant \varepsilon$ car $x+u \geqslant a+B \geqslant A$.
Donc pour $x \in J_a$ on a $|g_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{||g||_\infty}{n!}\displaystyle\int_0^B u^n e^{-u}\,\mathrm{d}\,u + \dfrac{\varepsilon}{n!}\int_B^{+\infty} e^{-u}u^n\,\mathrm{d}\,u$.
Or $\displaystyle\int_0^B u^n e^{-u}\,\mathrm{d}\,u \leqslant \int_0^B u^n\,\mathrm{d}\,u = \frac{B^{n+1}}{n+1}$ et $\displaystyle\int_B^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}\,u \leqslant \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = n!$.
Ainsi pour $x \in J_a$ on a $|g_{n+1}(x)| \leqslant ||g||_\infty \dfrac{B^{n+1}}{(n+1)!} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand car $\dfrac{B^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en tant que terme général d'une série convergente (exponentielle).
Donc la suite (g_n) tend uniformément vers la fonction nulle sur J_a.
Il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ vers $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. □

IV.E. • Compte-tenu de ce qui précède Φ est une application linéaire (continue) de $\mathcal{B}$ dans lui-même et en fait dans l'espace des applications bornées sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est injective en tant que restriction à $\mathcal{B}$ de l'application linéaire injective Φ de la partie précédente définie sur $\mathcal{E}$. □

• Par exactement le même raisonnement que dans la question III.E., il vient que, puisque $\mathcal{B}$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Im}(\Phi)$ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$ telles que g et g' soient bornées sur $\mathbb{R}$. □

• Il en découle que $g : x \longmapsto \sin(x^2)$ n'est pas dans l'image car $g'(x) = 2x\cos(x^2)$ n'est pas bornée comme on le voit en considérant la suite (x_n) définie par $x_n = \sqrt{2n\pi}$. □

Partie V. Fonctions périodiques.

V.A. • Si f est périodique et continue sur $\mathbb{R}$ alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge et il en découle comme précédemment que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de E_f est $y = \lambda e^x + f_1(x)$ avec $f_1(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}\,t$.
On a également $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}f(x+u)\,\mathrm{d}\,u$ ce qui prouve immédiatement que $f_1 \in \mathcal{P}$.
De l'expression de la solution générale, il en résulte que f_1 est l'unique solution de E_f appartenant à $\mathcal{P}$. □

• f_1 est une fonction périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ a fortiori continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de sorte que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers elle-même. □

V.B. Comme f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ il vient par parties que $c_k(f_1') = ik.c_k(f_1)$ pour $k \neq 0$. Vrai également pour $k = 0$.
Par ailleurs $f_1' - f_1 + f = 0$ de sorte que $c_k(f_1') - c_k(f_1) + c_k(f) = 0$.
Ainsi $(-1+ik)c_k(f_1) + c_k(f) = 0$. □

V.C. • $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{K}$ est évidemment réduit à la fonction nulle ce qui prouve que la somme est directe et si $f \in \mathcal{P}$ admet ℓ comme valeur moyenne alors $f = (f-\ell)+\ell$ appartient bien à $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{K}$. Ainsi $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{K}$. □

• Remarque : De la question V.B. résulte en particulier que si la valeur moyenne de f est nulle, il en va de même de celle de f_1. Ainsi $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{K}$ sont deux sous-espace supplémentaires de $\mathcal{P}$ stables par Φ.

• Soit $f \in \mathcal{P}$ que l'on décompose en $f = g + \ell$ avec $g \in \mathcal{P}_0$ et ℓ la valeur moyenne de f. Compte-tenu de ce qui précède $f_n = g_n + \ell$ avec $g_n = \Phi^n(g)$. Nous allons prouver que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, ce qui prouvera que la suite (f_n) converge uniformément vers ℓ.

Pour $n \geqslant 1$, g_n est somme de sa série de Fourier d'après la question V.A. et d'après la remarque ci-dessus sa valeur moyenne est nulle
Donc $g_n(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(g_n)e_k(x)$ en notant $e_k(x) = e^{ikx}$.
Par ailleurs $c_k(g_n) = \dfrac{1}{1-ik}c_k(g_{n-1})$ d'après la question V.B. de sorte que $g_n(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{1}{(1-ik)^{n-1}}c_k(g_1)e_k(x)$.
Or, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $|1-ik| \geqslant \sqrt{2}$ et, comme noté dans la question V.A. la série de Fourier de g_1 converge normalement donc la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(g_1)|$ converge (on note S sa somme).
Il en résulte que $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{S}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ pour tout réel x ce qui prouve bien la convergence uniforme de la suite (g_n) vers la fonction nulle.
En conclusion, pour $f \in \mathcal{P}$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la valeur moyenne de f. □

V.D. En tant que restriction à $\mathcal{P}$ de l'application Φ définie sur $\mathcal{B}$ dans le paragraphe précédent, Φ est injective.
Compte-tenu de ce qui précède elle est à valeurs dans l'espace des fonctions 2π-périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$.
Réciproquement soit g une application de cet espace. Alors f définie par $f = g - g'$ appartient $\mathcal{P}$ et g vérifie l'équation $y' - y + f = 0$. Or g appartient à $\mathcal{P}$ donc $g = \Phi(f)$ d'après la question V.A.
En conclusion, Φ est un isomorphisme de l'espace des applications 2π-périodiques et continues sur celui des applications 2π-périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$ et Φ^{-1} est définie par $\Phi^{-1}(g) = g - g'$. □

V.E. • Si $f \in \mathcal{P}$ alors $|f| \in \mathcal{P}$ également et $N_1(f) = 2\pi c_0(|f|)$.

Or d'après la question V.B., on a $c_0\big(\Phi(|f|)\big) = c_0(|f|)$.

Par ailleurs $\Phi(|f|)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\,\mathrm{d}\,t \geqslant |\Phi(f)(x)|$ donc $c_0\big(|\Phi(f)|\big) \leqslant c_0\big(\Phi(|f|)\big)$ soit $N_1\big(\Phi(f)\big) \leqslant N_1(f)$ ce qui prouve que Φ est continue pour la norme N_1. $\square$

La fonction $e_n : x \longmapsto e^{inx}$ appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\Phi^{-1}(e_n) = (1 - in)e_n$ donc $\dfrac{N_1(\phi^{-1}(e_n)}{N_1(e_n)} = \sqrt{1+n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui prouve que Φ^{-1} n'est pas continue pour la norme N_1. $\square$

• D'après l'égalité de Bessel-Parseval, $N_2(f)^2 = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ et $N_2(f_1)^2 = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f_1)|^2 = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{|c_k(f)|^2}{\sqrt{1+k^2}}$.

Donc $N_2(f_1) \leqslant N_2(f)$ ce qui prouve que Φ est continue pour la norme N_2. $\square$

On prouve exactement de la même manière que ci-dessus que que Φ^{-1} n'est pas continue pour la norme N_2. $\square$

Partie V. Fonctions polynomiales.

VI.A. Pour f et g appartenant à $\mathcal{FP}_d$ et pour tout $\xi_i \in \xi$ on a $|(f+g)(\xi_i)| \leqslant |f(\xi_i)| + |g(\xi_i)| \leqslant N_\xi(f) + N_\xi(g)$ donc $N_\xi(f+g) \leqslant N_\xi(f) + N_\xi(g)$ par définition du sup.

En outre si $N_\xi(f) = 0$ alors f est une fonction polynomiale de degré au pus d s'annulant en $d+1$ points deux à deux distincts donc f est identiquement nulle.

Il en découle immédiatement que N_ξ est une norme sur $\mathcal{FP}_d$. $\square$

VI.B. • Supposons (I) i.e. que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers f. Notons qu'a priori f n'est pas forcément polynomiale.

Pour prouver que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$, il suffit de prouver que cela a lieu sur toute boule fermée de centre O.

Soit K une telle boule et ξ une famille de $d+1$ réels distincts comme précédemment. Notons $\alpha_i = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\xi_i)$ qui existe bien par hypothèse. Soit P le polynôme interpolateur de Lagrange de degré au plus d qui prend la valeur α_i en ξ_i. On note encore P la fonction polynomiale associée.

Alors (f_n) converge vers P pour la norme N_ξ dans l'espace $\mathcal{FP}_d$.

Or $N_K(f) \underset{\text{DEF}}{=} \sup\limits_{z\in K} |f(z)|$ est classiquement une norme sur $\mathcal{FP}_d$ et, comme cet espace est de dimension finie, elle est équivalente à la norme N_ξ. Il en découle que la suite (f_n) converge également vers P pour la norme N_K c'est à dire que la suite (f_n) converge uniformément vers P sur K.

Ainsi (I) implique (II).

• Naturellement (II) implique (III) pour toute famille ξ.

• Supposons (III) et soit P l'élément de $\mathcal{FP}_d$ défini comme ci-dessus de sorte que la suite (f_n) converge vers P pour la norme N_ξ dans l'espace $\mathcal{FP}_d$.

Or $N_\infty(f) \underset{\text{DEF}}{=} \sup\limits_{0\leqslant i\leqslant d} |a_i|$ si $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ est classiquement une norme sur $\mathcal{FP}_d$.

De l'équivalence des normes sur $\mathcal{FP}_d$ on en déduit que la suite (f_n) converge vers P au sens de la norme N_∞ ce qui prouve (IV).

• Supposons (IV) et soit P l'élément de $\mathcal{FP}_d$ défini par $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ où $a_i \underset{\text{DEF}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} a_{i,n}$.

Alors (f_n) converge vers P pour la norme N_∞ dans l'espace $\mathcal{FP}_d$ donc également pour la norme N_K définie précédemment. Ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ donc naturellement converge simplement sur $\mathbb{C}$.

• En conclusion les 4 conditions sont bien équivalentes et la limite est en outre un élément de $\mathcal{FP}_d$.

La démonstration précédente prouve qu'en fait ces conditions sont équivalentes à la convergence de la suite (f_n) dans l'espace normé de dimension finie $\mathcal{FP}_d$ c'est à dire pour n'importe quelle norme sur cet espace. $\square$

VI.C. Pour $f \in \mathcal{FP}_d$, il vient que $f_1(x) \underset{\text{DEF}}{=} e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} f(x+u)e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$.

Or $f(x+u) = \sum\limits_{k=0}^{d} \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}u^k$ par la formule de Taylor, donc $f_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} f^{(k)}(x)$ ce qui prouve que $f_1 \in \mathcal{FP}_d$.

Or comme précédemment la solution générale de E_f est $y = \lambda e^x + f_1(x)$ ce qui prouve que E_f a une unique solution dans $\mathcal{FP}_d$ à savoir $f_1 = \Phi(f)$. $\square$

VI.D. Comme $\mathcal{FP}_d \subset \mathcal{E}$ on a, pour $f \in \mathcal{FP}_d$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u)e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$ donc, par la formule de Taylor comme précédemment, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{n!\;k!} f^{(k)}(x)$.

Or la famille $\left(f^{(k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de $\mathcal{FP}_d$ donc les conditions précédentes sont en particulier équivalentes à la convergence de la suite (f_n) pour la norme N infinie associée à cette base c'est à dire à la convergence des suites des coefficients relativement à cette base c'est à dire à la convergence des $d+1$ suites $(b_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $b_{k,n} = \dfrac{(n+k)!}{n!\;k!}$.

Or $b_{k,n} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$ donc $b_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $k \geqslant 1$.

Il en découle que si f est de degré au moins 1, la suite (f_n) ne converge pas dans l'espace $\mathcal{FP}_d$. $\square$

(Naturellement si f est constante, la suite (f_n) est stationnaire.)

FIN