

Corrigé de Mines-Ponts 2007 PC Première épreuve

I.

□ 1- • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : x \mapsto \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, d'après l'exemple de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, donc la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et continuité pour une série d'applications), on conclut :

$$\boxed{S_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

□ 2- • Puisque $u \in]-1; 1[$, on a : $\forall t \in]0; +\infty[$, $e^t - u > 1 - u > 0$, donc J est continue sur $]0; +\infty[$.

• En 0 : $J(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{1-u} t^{\gamma-1} > 0$. D'après l'exemple de Riemann en 0, l'application $t \mapsto t^{\gamma-1}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\gamma > 0$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles ≥ 0 , il en résulte que J est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\gamma > 0$.

• En $+\infty$: $t^2 J(t) = \frac{t^{\gamma+1}}{e^t - u} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance de l'exponentielle sur les puissances.

On a donc, pour t assez grand : $0 \leq \frac{t^{\gamma+1}}{e^t - u} \leq 1$, d'où $0 \leq J(t) \leq \frac{1}{t^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions à valeurs réelles ≥ 0 , on déduit que J est intégrable sur $[1; +\infty[$, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{J \text{ est intégrable sur }]0; +\infty[\text{ si et seulement si : } \gamma > 0.}$$

□ 3- On a, pour tout $t \in [0; +\infty[$, par sommation géométrique et puisque $|u e^{-t}| \leq |u| < 1$, donc $u e^{-t} \neq 1$:

$$R_N(t, u) = \left(\frac{u}{e^t - u} - u e^{-t} \frac{1 - (u e^{-t})^N}{1 - u e^{-t}} \right) t^{\alpha-1} = \left(\frac{u}{e^t - u} - \frac{u(1 - u^N e^{-Nt})}{e^t - u} \right) t^{\alpha-1} = \frac{u^{N+1} e^{-Nt} t^{\alpha-1}}{e^t - u}.$$

□ 4- **1ère méthode :**

• Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(\cdot, u)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

• La suite $(R_N(\cdot, u))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers l'application nulle sur $]0; +\infty[$, car $|u| < 1$ et $t > 0$, donc $u^{N+1} e^{-Nt} \underset{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

• L'application nulle est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• D'après 2- : $\forall t \in]0; +\infty[$, $|R_N(t, u)| = \frac{|u|^{N+1} e^{-Nt} t^{\alpha-1}}{e^t - u} \leq \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} = J(t)$,

et J est intégrable sur $]0; +\infty[$ d'après 2-, avec α à la place de γ .

D'après le théorème de convergence dominée, on conclut que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable

sur $]0; +\infty[$ et que : $\int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt \underset{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

2ème méthode :

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

* L'application $R_N(\cdot, u)$ est continue sur $]0; +\infty[$, d'après sa définition en 2-, ou d'après l'expression obtenue en 3-.

* En 0 : $R_N(t, u) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^{N+1}}{1-u} t^{\alpha-1} \geq 0$, donc, d'après l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles ≥ 0 , $R_N(\cdot, u)$ est intégrable à la borne 0.

* En $+\infty$: $t^2 R_N(t, u) = \frac{u^{N+1} e^{-Nt} t^{\alpha+1}}{e^t - u} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, donc, comme en 3-, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable à la borne $+\infty$.

Ainsi, $R_N(\cdot, u)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

- On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $|R_N(t, u)| = \frac{|u|^{N+1} e^{-Nt} t^{\alpha-1}}{e^t - u} \leq \frac{|u|^{N+1}}{1-u} e^{-Nt} t^{\alpha-1}$,

donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |R_N(t, u)| dt \leq \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \int_0^{+\infty} e^{-Nt} t^{\alpha-1} dt \\ &\underset{[s=Nt]}{=} \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{N} \right)^{\alpha-1} \frac{ds}{N} = \frac{|u|^{N+1}}{1-u} \frac{1}{N^\alpha} \Gamma(\alpha) \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

car $|u| < 1$ (et $\alpha > 0$).

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0}$$

□ 5- • Le résultat de 2-, avec α à la place de γ , prouve que, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$, l'application $t \mapsto \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• On a, en utilisant le développement en série entière géométrique et la définition de $R_N(t, u)$, pour tout $t \in]0; +\infty[$:

$$\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} = \frac{ut^{\alpha-1} e^{-t}}{1 - u e^{-t}} = ut^{\alpha-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^n + R_N(t, u).$$

Les applications en question étant toutes intégrables sur $]0; +\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \int_0^{+\infty} ut^{\alpha-1} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^n \right) dt + \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt$$

et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} ut^{\alpha-1} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^n \right) dt &= \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} t^{\alpha-1} dt \\ &\underset{[s=(n+1)t]}{=} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{n+1} \right)^{\alpha-1} \frac{ds}{n+1} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \right) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \underset{[n \leftarrow n+1]}{=} \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^N \frac{u^n}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \sum_{n=1}^N \Gamma(\alpha) \frac{u^n}{n^\alpha} + \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} \Gamma(\alpha) \frac{u^n}{n^\alpha}$ converge. De plus, comme $\Gamma(\alpha) \neq 0$ (car $\Gamma(\alpha) > 0$), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{n^\alpha}$ converge, et on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\boxed{\forall \alpha \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}}$$

□ 6- Soit $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe alors $X \in]0; 2\pi[$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = X + 2k\pi$.

On applique (2) à $u = e^{iX}$ (résultat admis dans l'énoncé) :

$$e^{iX} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inX}}{n^\alpha}.$$

Comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inX}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nX}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nX}{n^\alpha},$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) S_\alpha(x) &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{iX} t^{\alpha-1}}{e^t - e^{iX}} dt \right) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{iX} t^{\alpha-1}}{e^t - e^{iX}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{iX} t^{\alpha-1} (e^t - e^{-iX})}{(e^t - e^{iX})(e^t - e^{-iX})} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{iX} t^{\alpha-1} e^t - t^{\alpha-1}}{e^{2t} - 2 \cos X e^t + 1} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin X t^{\alpha-1}}{e^t - 2 \cos X + e^{-t}} dt = \frac{\sin X}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos X} dt. \end{aligned}$$

Finalement, comme $\Gamma(\alpha) \neq 0$ (car $\Gamma(\alpha) > 0$), et que $x \equiv X \pmod{2\pi}$:

$$\boxed{S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt}$$

□ 7- Soit $M \in]0; +\infty[$.

On a, par utilisation d'une série géométrique :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \int_0^M \frac{1}{\operatorname{ch} t} \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \frac{u}{\operatorname{ch} t}} dt = \int_0^M t^{\alpha-1} \frac{1}{\operatorname{ch} t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{u}{\operatorname{ch} t} \right)^n dt = \int_0^M \frac{1}{\operatorname{ch} t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} u^n}{(\operatorname{ch} t)^n} \right) dt,$$

car $\left| \frac{u}{\operatorname{ch} t} \right| \leq |u| < 1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $g_n : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}u^n}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est intégrable sur $]0; M]$, car $\alpha > 0$.
- La série d'applications $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $]0; M]$.
- La somme de cette série d'applications, qui est l'application $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}$, est continue par morceaux (car continue) sur $]0; M]$.
- On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^M |g_n| = \int_0^M \left| \frac{t^{\alpha-1}u^n}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \right| dt \leq \int_0^M t^{\alpha-1} |u|^n dt = |u|^n \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \right]_0^M = \frac{|u|^n M^\alpha}{\alpha}.$$

Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |u|^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^M |g_n|$ converge.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et intégration sur un intervalle quelconque), on déduit que l'application $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}$ est intégrable sur $]0; M]$ (ce que l'on pouvait aussi voir directement), que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^M g_n$ converge, et que l'on peut permuter intégrale et série, d'où le résultat voulu :

$$\boxed{\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt}$$

□ 8- Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \mapsto h_n(M) = \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $h_n(M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$ car l'application $t \mapsto u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, comme plus haut.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $M \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} |h_n(M)| &= \left| \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt \right| \leq \int_0^M \left| u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \right| dt = |u|^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt \\ &\leq |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt \leq |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t} dt. \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est bornée et que :

$$\|h_n\|_\infty \leq |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t} dt.$$

Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |u|^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \|h_n\|_\infty$ converge, donc la série d'applications $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge normalement sur $]0; +\infty[$.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et limite), on peut permuter limite et série, d'où :

$$\boxed{\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt}$$

Il en résulte d'après 7- :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt}$$

□ 9- Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. On applique 7- à $u = \cos x$ (on a bien $u \in]-1; 1[$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt.$$

Puis, en utilisant 6- :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt \right) \cos^n x = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos^n x.$$

On conclut, avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} G_\alpha(\cos x)}$$

II.

□ 10- Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $B(s) = as^{\lambda-1}(1 + o(1))$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall s \in]0; \delta], \quad |B(s) - as^{\lambda-1}| \leq \varepsilon as^{\lambda-1}.$$

On a alors, pour tout $s \in]0; \delta]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}| = |B(s) - as^{\lambda-1}|e^{-ns} \leq \varepsilon as^{\lambda-1}e^{-ns},$$

puis, les fonctions intervenant étant intégrables sur $]0; \delta]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) ds \right| &\leq \int_0^\delta |B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}| ds \leq \int_0^\delta \varepsilon as^{\lambda-1}e^{-ns} ds \\ &= \varepsilon a \int_0^\delta s^{\lambda-1}e^{-ns} ds \underset{[t=ns]}{=} \varepsilon a \int_0^{n\delta} \left(\frac{t}{n}\right)^{\lambda-1} e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{n\delta} t^{\lambda-1} e^{-t} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \Gamma(\lambda). \end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^\delta (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) ds \right| \leq \varepsilon \frac{a}{n^\lambda} \Gamma(\lambda)}$$

□ 11- Soit $\delta > 0$ fixé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s) e^{-ns} - as^{\lambda-1} e^{-ns}) ds \right| &\leq \int_{\delta}^{+\infty} |B(s) e^{-ns} - as^{\lambda-1} e^{-ns}| ds \\ &= \int_{\delta}^{+\infty} |B(s) e^{-s} - as^{\lambda-1} e^{-s}| e^{-(n-1)s} ds \leq \left(\int_{\delta}^{+\infty} |B(s) e^{-s} - as^{\lambda-1} e^{-s}| ds \right) e^{-(n-1)\delta}, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé, en notant $C(\delta) = \int_{\delta}^{+\infty} |B(s) e^{-s} - as^{\lambda-1} e^{-s}| ds$ et en remarquant que l'application $s \mapsto B(s) e^{-s} - as^{\lambda-1} e^{-s}$ est bien intégrable sur $[\delta; +\infty[$.

□ 12- Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après 10-, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad \left| \int_0^{\delta} (B(s) e^{-ns} - as^{\lambda-1} e^{-ns}) ds \right| \leq \varepsilon \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$$

Puis, δ étant ainsi fixé, d'après 11-, on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\left| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s) e^{-ns} - as^{\lambda-1} e^{-ns}) ds \right| \leq C(\delta) e^{-(n-1)\delta}.$$

On a donc, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} B(s) e^{-ns} ds - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1} e^{-ns} ds \right| &= \left| \int_0^{+\infty} (B(s) - as^{\lambda-1}) e^{-ns} ds \right| \\ &= \left| \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \right| \leq \left| \int_0^{\delta} \right| + \left| \int_{\delta}^{+\infty} \right| \leq \varepsilon \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda) + C(\delta) e^{-(n-1)\delta}. \end{aligned}$$

Par prépondérance classique :

$$e^{-(n-1)\delta} = o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\lambda}} \right),$$

donc, pour n assez grand :

$$|C(\delta) e^{-(n-1)\delta}| \leq \varepsilon \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$$

Il en résulte, pour n assez grand :

$$\left| \int_0^{+\infty} B(s) e^{-ns} ds - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1} e^{-ns} ds \right| = \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda) o(1).$$

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} as^{\lambda-1} e^{-ns} ds \underset{[t=ns]}{=} a \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n} \right)^{\lambda-1} e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{a}{n^{\lambda}} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} B(s) e^{-ns} ds = a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}} (1 + o_{n \rightarrow \infty}(1))}$$

□ 13- On a, par le changement de variable $v = \operatorname{ch} t$, de classe C^1 et bijectif de $]0; +\infty[$ sur $]1; +\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$v = \operatorname{ch} t, \quad t = \operatorname{Argch} v = \ln(v + \sqrt{v^2 - 1}), \quad dv = \operatorname{sh} t dt, \quad dt = \frac{dv}{\operatorname{sh} t} = \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}},$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(v + \sqrt{v^2 - 1}))^{\alpha-1}}{v^{n+1}} \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}},$$

puis, par le changement de variable $s = \ln v$, de classe C^1 et bijectif de $]1; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$s = \ln v, \quad v = e^s, \quad dv = e^s ds,$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{e^{(n+1)s}} \frac{e^s ds}{\sqrt{e^{2s} - 1}} = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} e^{-ns} ds.$$

□ 14- On a, au voisinage de 0^+ :

$$e^s + \sqrt{e^{2s} - 1} = (1 + s + o(s)) + \sqrt{2s + o(s)} = 1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}),$$

$$\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) = \ln(1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s})) = \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2s}$$

et :

$$\sqrt{e^{2s} - 1} = \sqrt{(1 + 2s + o(s)) - 1} = \sqrt{2s + o(s)} \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2s},$$

d'où :

$$B(s) = \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(\sqrt{2s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2s}} = (\sqrt{2s})^{\alpha-2}.$$

On conclut :

$$\boxed{B(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} (\sqrt{2s})^{\alpha-2}}$$

□ 15- L'application B de 14- satisfait les conditions (4) et (5) (et la continuité) car :

• En 0 : $B(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} (\sqrt{2s})^{\alpha-2} = 2^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{\frac{\alpha}{2}-1} \geq 0$ et $\frac{\alpha}{2} - 1 > -1$, donc, par l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles ≥ 0 , B est intégrable sur $]0; 1]$.

• En $+\infty$:

$$B(s) = \frac{[\ln(e^s[1 + (1 - e^{-2s})^{1/2}])]^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} = \frac{[\ln(e^s[2 + o(1)])]^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} = \frac{[s + \ln(2 + o(1))]^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s^{\alpha-1}}{e^s},$$

donc, comme en 1-, B est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On peut remarquer : $a_0 = \int_0^{+\infty} B(s) ds$.

• En 0^+ , on a vu : $B(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} 2^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{\frac{\alpha}{2}-1}$, donc $B(s) = as^{\lambda-1}(1 + o(1))$, en notant $a = 2^{\frac{\alpha}{2}-1} > 0$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2} > 0$.

D'après 12-, on a donc :

$$a_n = \int_0^{+\infty} B(s) e^{-ns} ds = a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} (1 + o(1)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} = 2^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

d'où :

$$a_n n^{\frac{\alpha}{2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

et finalement :

$$\boxed{a_n n^{\frac{\alpha}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
