CCP 2007. Filière MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE.

a. f est continue (en tant de fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) sur le compact F donc bornée et y atteint sa borne supérieure M en au moins un point A. $\square$

b. Si $A = (a, b) \in \overset{\circ}{F} = \Omega$ alors A est un extremum local de la restriction de f à l'ouvert Ω sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc A est un point critique.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1 - 2xy - x^2}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)}$ et par raison de symétrie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1 - 2xy - y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)^2}$.

Il en découle que $\begin{cases} 1 - 2ab - a^2 = 0 \\ 1 - 2ab - b^2 = 0 \end{cases}$ Par soustraction il vient $a^2 = b^2$ donc $a = b$ puisque a et b sont positifs.

Ainsi $1 - 3a^2 = 0$ et donc $A = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

En résumé si M est atteint sur Ω alors $M = M_0 = f(A) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. $\square$

c. $t \longmapsto \varphi(t) = f(t, 0) = \dfrac{t}{1 + t^2}$ croît sur $[0, 1]$ et son maximum est $M_1 = \varphi(1) = \dfrac{1}{2}$.

$t \longmapsto \psi(t) = f(1, t) = \dfrac{1 + t}{2(1 + t^2)}$ croît sur $[0, \sqrt{2} - 1]$ puis décroît. Son maximum sur $[0, 1]$ est donc $\psi(\sqrt{2} - 1)$ soit $M_2 = \dfrac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}$.

Par raison de symétrie par rapport à la première bissectrice, le maximum de f sur la frontière de F est $\max(M_1, M_2)$ i.e. M_2 car $\sqrt{2} - 1 < 0.5$.

Il découle de ce qui précède que si M est atteint sur Ω alors $M = M_0$ et que sinon, i.e. s'il est atteint sur la frontière, alors $M = M_2$.

Donc $M = \max(M_0, M_2) = M_0$ car $M_0 \simeq 0.65$ et $M_2 \simeq 0.60$. $\square$

PROBLÈME : ÉCHANGE DE LIMITES ET D'INTÉGRALES.

PARTIE PRÉLIMINAIRE.

1. Fonction Gamma d'Euler.

a. Notons $f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$. Pour $x > 0$ fixé quelconque, $t \longmapsto f_x(t) = f(x, t)$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1} > 0$ et $t \longmapsto t^{x-1}$ est intégrable en 0 car $x > 0$ donc $f_x(t)$ également.

Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$ par croissance comparées donc $f_x(t)$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi f_x est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. $\square$

b. Une intégration par parties sur le segment $[\epsilon, A]$ suivie d'un passage à le limite lorsque $\epsilon \to 0$ et $A \to +\infty$ fournit immédiatement $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Or $\Gamma(1) = 1$ donc, par une itération évidente, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout entier $n > 0$. $\square$

2. Fonction zêta de Riemann.

a. Pour $x > 1$ fixé, la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{t^x}$ décroît donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant \varphi(k + 1)$.

Donc $R_n^p(x) \underset{\text{DEF}}{=} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \varphi(k) \leqslant \int_n^p \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x - 1}\Big(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{p^{x-1}}\Big)$.

En faisant tendre p vers $+\infty$ (les deux limites existent bien), il vient $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x - 1)n^{x-1}}$. $\square$

b. Ainsi pour avoir $\Big|\zeta(p) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\Big| \leqslant \varepsilon$, il <u>suffit</u> d'avoir $\dfrac{1}{(p - 1)n^{p-1}} \leqslant \varepsilon$ soit $n \geqslant \exp\Big(\dfrac{-\ln\varepsilon - \ln(p - 1)}{p - 1}\Big)$. $\square$

c. Avec $p = 7$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, il vient qu'il suffit de choisir $n \geqslant \exp\Big(\ln(10) - \dfrac{\ln(6)}{6}\Big) \simeq 7.4$.

Donc $n = 8$ convient. En fait $\dfrac{1}{6 \times 8^6} \simeq 0.64 \times 10^{-6} \leqslant 0.7 \times 10^{-6}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7} \leqslant \zeta(7) \leqslant \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7} + 0.7 \times 10^{-6}$.

Or un programme immédiat fournit $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7} \simeq 1.008\ 348\ 8$ et on peut retenir raisonnablement vu le faible nombre d'opérations $1.008\ 348\ 7 \leqslant \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7} \leqslant 1.008\ 348\ 9$.

Donc $1.008\ 348\ 7 \leqslant \zeta(7) \leqslant 1.008\ 349\ 4$. $\square$

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS.

3. Théorème de convergence uniforme pour une suite de fonctions.

Par le théorème de récupération uniforme de la continuité, f est continue sur $[a, b]$ de sorte que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ est parfaitement défini. Par ailleurs il vient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x) - f_n(x)\right|\mathrm{d}\,x \leqslant \int_a^b \|f - f_n\|_\infty\,\mathrm{d}\,x = (b-a)\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \square$$

4. Exemples et contre-exemples.

a. Soit la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = n$, $f(x) = 0$ pour $x \geqslant \frac{2}{n}$ et par le fait que f_n soit affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$. Alors f_n est bien continue et converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f nulle (en effet pour $x > 0$ fixé on a $f_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 2/x$ et $f_n(0) = 0$ pour tout n).

Mais la convergence n'est pas uniforme car $\|f - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 2n$ et (aire d'un triangle) $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$ ne tend pas vers $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$ $\square$

b. Soit la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = 1$ pour $x \geqslant 1/n$, par $f_n(0) = 0$ et par le fait que f_n soit affine entre 0 et $1/n$. Alors f_n est bien continue sur $[0, 1]$ et la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f continue par morceaux définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. La convergence n'est donc pas uniforme sinon f serait continue par le théorème de récupération uniforme de la continuité.

Cependant $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ $\square$

5. Cas d'un intervalle quelconque.

a. L'étude immédiate des variations de f_n montre que f_n croît entre 0 et n de 0 à $f_n(n)$ puis décroît vers 0. Ainsi $\|f_n\|_\infty = f_n(n)$. Or $f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui prouve que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Or, par la question 1, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'intégrale $\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ qui ne tend pas vers 0.

Ainsi **TH1** est-il faux sur un intervalle non borné. $\square$

b. La définition de la convergence uniforme écrite avec $\varepsilon = 1$ prouve qu'il existe un entier p tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1$ pour $n \geqslant p$. Alors en particulier $\|f - f_p\|_\infty \leqslant 1$ donc $|f(x)| \leqslant 1 + |f_p(x)|$ pour tout $x \in I$.

Ainsi f est une fonction continue (théorème de récupération uniforme de la continuité) dominée sur I par une fonction intégrable sur I donc est bien intégrable sur I.

La suite de la démonstration est exactement la même que dans la question 3 en remplaçant $b - a$ par $\ell(I)$.

Ainsi le **TH1** est-il vrai sur un intervalle borné. $\square$

6. Théorème de la convergence dominée.

a. Les fonctions f_n sont continues par morceaux (ainsi que f) et dominées sur I par la fonction φ (de même que f par passage à la limite) intégrable sur I donc les fonctions f_n et la fonction f sont bien intégrables sur I. $\square$

b. On peut bien sûr reprendre l'exemple de la question 4.b. mais la vérification directe de la propriété de permutation est évidente et utiliser le **TH2** dans ce cas revient à casser un œuf à la coque avec un marteau piqueur ! Voici un exemple qui peut lui aussi se traiter directement mais moins simplement et pour lequel l'usage du **TH2** est commode :

Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $g(0) \neq g(1)$. Alors la suite (f_n) définie par $f_n(x) = g(x^n)$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = g(0)$ si $x \neq 1$ et $f(1) = g(1)$. La convergence n'est pas uniforme car les fonction f_n sont continues mais pas la fonction f qui est bien continue par morceaux néanmoins. Or les fonctions f_n sont dominées sur $[0, 1]$ par la fonction constante égale à $\|g\|_\infty$ qui est évidemment intégrable sur $[0, 1]$.

Le théorème de la convergence dominée permet d'affirmer que $\int_0^1 g(x^n)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = g(0)$. $\square$

La suite (f_n) avec $f_n(x) = \dfrac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et est dominée sur $[0,+\infty[$ par la fonction $\varphi = ef$ intégrable. Ainsi le **TH2** s'applique (car les fonctions f_n et la fonction f sont en outre continues par morceaux -et même continues-) et prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

DEUXIÈME PARTIES : SÉRIES DE FONCTIONS.

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions.

Le théorème **TH3** n'est rien d'autre que le théorème **TH1** appliqué à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. En effet :

Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ et $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$. Comme les fonctions f_k sont continues et la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a,b]$, la suite (S_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers S donc le **TH1** prouve que $\displaystyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x$ i.e., par définition même de la convergence d'une série et de la valeur de sa somme, que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \displaystyle\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x.$ $\square$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier.

a. Le théorème de Parseval affirme que la série de Fourier d'une fonction f périodique et continue par morceaux converge en moyenne quadratique vers f.

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ était la série de Fourier d'une fonction f, on aurait donc $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = \|f\|_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$ ce qui est évidemment impossible puisque la série harmonique diverge. $\square$

Remarque : Grâce à la transformation d'Abel, on peut démontrer que la série proposée converge.

b. Soit une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, de ce fait 2π-périodique et continue. Soit p un entier quelconque et, pour tout entier n, soit $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$. Alors la suite $\Big(S_n(x)\cos(px)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)\cos(px)$.

En effet, pour tout x, on a $\big|f(x)\cos(px) - S_n(x)\cos(px)\big| \leqslant \big|f(x) - S_n(x)\big| \leqslant \|f - S_n\|_\infty$ donc, par définition même du sup, $\|f(x)\cos(px) - S_n(x)\cos(px)\|_\infty \leqslant \|f - S_n\|_\infty$.

Le théorème **TH3** prouve alors que :

$$\frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(x)\cos(px)\,\mathrm{d}\,x = \frac{a_0}{2\pi}\int_{2\pi}\cos(px)\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(a_k\int_{2\pi}\cos(kx)\cos(px)\,\mathrm{d}\,x + b_k\int_{2\pi}\sin(kx)\cos(px)\,\mathrm{d}\,x\Big).$$

Si on note α_k et β_k les coefficients de Fourier de la fonction f, il vient alors, compte tenu des résultats classiques rappelés, $\alpha_0 = a_0$ (pour $p = 0$) et $\alpha_n = a_n$ pour $(p = n \geqslant 1)$.

On prouve de même que $\beta_n = b_n$ pour $n \geqslant 1$.

Ainsi la série de Fourier de f n'est autre que la série trigonométrique de départ.

En d'autres termes la série de Fourier de la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ n'est autre que la série elle-même. $\square$

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions. Application : théorème de Hardy.

a. Notons $u_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{n!}$ et soit $A > 0$ quelconque fixé. Pour $x \in [-A,A]$ on a $|u_n(x)| \leqslant |a_n|\dfrac{A^n}{n!}$. Comme la série $\sum a_n$ converge, la suite (a_n) tend vers 0 donc est bornée mettons par M. Il vient donc, pour tout $x \in [-A,A]$, $|u_n(x)| \leqslant M\dfrac{A^n}{n!}$ terme général d'une série convergente (exponentielle). Ainsi la série $\sum u_n(x)$ converge localement normalement sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori simplement) et sa somme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque : la seule hypothèse que la suite (a_n) est bornée suffit ici à conclure.

b. Il en découle bien sûr que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-x}$ est une série de fonctions continues convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue $f(x)e^{-x}$.
En outre $u_n(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et est intégrable en $+\infty$ puisque $u_n(x)e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées.
Par ailleurs $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|u_n(x)e^{-x}\right| \mathrm{d}\, x = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^x \,\mathrm{d}\, x = |a_n| \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = |a_n|$ et, puisque la série $\sum a_n$ est absolument convergente, le théorème **TH4** s'applique et prouve que :
La fonction $x \longmapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty|$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,\mathrm{d}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

10 Cas où les théorèmes TH3 et TH4 ne s'appliquent pas.

a. Notons $u_n(x) = (-1)^n x^n$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$ sinon le théorème du double passage à la limite s'appliquerait et prouverait que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge (vers $\frac{1}{2}$). □
On peut aussi remarquer que $|S(x) - S_n(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{2}$ donc $\|S - S_n\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2}$. □

b. $\displaystyle\sum \int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}\, x = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge donc le théorème **TH4** ne s'applique pas. □

c. $\displaystyle\left|\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}\, x - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u_k(x)\,\mathrm{d}\, x\right| = \left|\int_0^1 \Big(S(x) - S_n(x)\Big)\,\mathrm{d}\, x\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}\, x\right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}\, x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}\, x$
donc $\displaystyle\left|\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}\, x - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u_k(x)\,\mathrm{d}\, x\right| \leqslant \frac{1}{n+2}$.
Ce qui prouve, par définition même de la convergence, que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^1 u_k(x)\,\mathrm{d}\, x$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}\, x = \ln 2$. □

11 Théorème de la convergence monotone.

La suite (S_n) est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux par hypothèse.
En outre, puisque les fonctions f_k sont positives, il vient $|S_n(x)| = S_n(x) \leqslant f(x)$. Or f est intégrable sur I par hypothèse. Donc la suite (S_n) vérifie les hypothèses du théorème **TH2** qui prouve que $\displaystyle\int_I S_n(x)\; dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,\mathrm{d}\, x$ c'est à dire $\sum\limits_{k=0}^{n}\displaystyle\int_I f_k(x)\,\mathrm{d}\, x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,\mathrm{d}\, x$. Donc par définition même de la convergence d'une série :
La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\displaystyle\int_I f_k(x)\,\mathrm{d}\, x$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_I \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\Big)\,\mathrm{d}\, x$ □

12 Application à la physique.

a. $f(t) = \dfrac{t^3}{e^t - 1}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim t^2$ de sorte que f se prolonge par continuité en 0 qui de ce fait est une fausse borne impropre. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ donc f est intégrable en $+\infty$ et donc finalement sur $]0,+\infty[$.
Par ailleurs pour $t > 0$ on a $\dfrac{1}{e^t-1} = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$ donc $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
Or les fonctions u_n sont positives et intégrables sur $]0,+\infty[$ (Cf 1.a.) donc les hypothèses du théorème de la convergence monotone sont vérifiées et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\, t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}\, t$.

Or, par le changement de variable admissible car $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même $u=(n+1)t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(n+1)^4}\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\Gamma(4)}{(n+1)^4} = \frac{6}{(n+1)^4}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t-1}\,\mathrm{d}\,t = 6\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^4} = 6\,\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$. $\square$

b. Il vient $\displaystyle M = 2\pi hc^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda^5}.\frac{1}{e^{hc/k_BT\lambda}-1}\,\mathrm{d}\,\lambda$. Le changement admissible $\displaystyle u=\frac{hc}{e^{hc/k_BT\lambda}}$ fournit :
$\displaystyle M = 2\pi hc^2\times\frac{(k_BT)^4}{(hc)^4}\int_0^{+\infty}\frac{u^3}{e^u-1}\,\mathrm{d}\,u = 2\pi hc^2\times\frac{(k_BT)^4}{(hc)^4}\times\frac{\pi^4}{15} = \frac{2\ \pi^5\ k_B^4}{15\ h^3\ c^2}\times T^4$. $\square$

13 Généralisation.

a. En remplaçant dans la démonstration de la question 12.a. t^3 par t^{x-1} (ce qui est bien licite car $x>1$), on obtient de même par le théorème de la convergence monotone :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^x}\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x} = \Gamma(x)\zeta(x)$ $\square$

b. En particulier :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1} = \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\square$
$\displaystyle I = \int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(7)\zeta(7) = 720\ \zeta(7)$ donc, d'après la question 2.c. :
$720\times 1.008\ 348\ 7 \simeq 726.011\ 06 \leqslant I \leqslant 720\times 1.008\ 349\ 4 \simeq 726.011\ 57$ donc :
$\displaystyle 726.011\ 0 \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}\,\mathrm{d}\,t \leqslant 726.011\ 6$ $\square$

FIN