Concours ÉNS
Filière MPI
Première composition de mathématiques

25 mai 2008

1 Premiers calculs

1.1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit λ une valeur propre de f. Il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$, non nul, tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque $\|x\| \neq 0$, on peut former le vecteur $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, qui vérifie $f(x_0) = \lambda x_0$ et $\|x_0\| = 1$. De fait, $\langle x_0 \mid f(x_0)\rangle$ appartient à $\mathscr{H}(f)$ par définition de cet ensemble. Mais

$$\langle x_0 \mid f(x_0)\rangle = \langle x_0 \mid \lambda x_0\rangle = \lambda\|x_0\|^2 = \lambda$$

Par suite, $\boxed{\text{Toute valeur propre de } f \text{ appartient à } \mathscr{H}(f).}$

1.2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On a successivement

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathscr{H}(\lambda f + \mu\,\mathrm{Id}) &\iff \exists x \in \mathrm{E} \qquad \big(\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = \langle x \mid \lambda f(x) + \mu x\rangle\big) \\ &\iff \exists x \in \mathrm{E} \qquad \big(\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = \lambda\langle x \mid f(x)\rangle + \mu \underbrace{\|x\|}_{=1}\big) \\ z_0 \in \mathscr{H}(\lambda f + \mu\,\mathrm{Id}) &\iff \exists z \in \mathscr{H}(f) \qquad z_0 = \lambda z + \mu \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{H}(\lambda f + \mu\,\mathrm{Id}) = \{\lambda z + \mu \mid z \in \mathscr{H}(f)\}}$

1.3. Implicitement, on travaille dans la base orthonormée fixée par l'énoncé et on identifie tout vecteur de E au vecteur de $\mathbb{C}^2$ formé de ses coordonnées. Notre base de référence étant orthonormée, le produit scalaire se calcule dans $\mathbb{C}^2$ par les formules usuelles.

La sphère unité de $\mathbb{C}^2$ est formée des vecteurs ${}^t[a \quad b]$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Ou encore, des vecteurs de la forme ${}^t[\varepsilon_1 \cos\theta \quad \varepsilon_2 \sin\theta]$ avec $\theta \in [0\,; 2\pi[$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ complexes de module 1.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on a successivement

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathscr{H}(f) &\iff \exists\theta \in [0\,;2\pi[\quad \exists\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{U} \qquad z_0 = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_1}\cos\theta \\ \overline{\varepsilon_2}\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1\cos\theta \\ \varepsilon_2\sin\theta \end{bmatrix} \right) \\ &\iff \exists\theta \in [0\,;2\pi[\quad \exists\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{U} \qquad z_0 = \cos^2\theta \\ z_0 \in \mathscr{H}(f) &\iff \exists\theta \in [0\,;2\pi[\qquad z_0 = \cos^2\theta \end{aligned}$$

Conclusion : $$\boxed{\mathscr{H}(f) = [0\,;1]}$$

1.4. On se donne $z_0 \in \mathbb{C}$. De la même manière que précédemment, on trouve que

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathscr{H}(f) &\iff \exists\theta \in [0\,;2\pi[\quad \exists\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{U} \qquad z_0 = \overline{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\cos\theta\sin\theta = \overline{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\frac{\sin 2\theta}{2} \\ &\iff \exists\theta \in [0\,;2\pi[\quad \exists\varepsilon \in \mathbb{U} \qquad z_0 = \frac{\sin\theta}{2}\,\varepsilon \end{aligned}$$

donc $$\boxed{\mathscr{H}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \frac{1}{2} \right\}}$$

1.5. On suppose E de dimension finie et on note $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ sa sphère unité. Cet ensemble est compact puisque fermé et borné en dimension finie. On définit alors

$$\forall z \in \mathrm{E} \qquad q(z) = \langle z \mid f(z) \rangle$$

Après développement du produit scalaire,

$$\forall h \in \mathrm{E} \qquad q(z+h) = q(z) + \langle h \mid f(z) \rangle + \langle z \mid f(h) \rangle + \langle h \mid f(h) \rangle$$

d'où $$\forall h \in \mathrm{E} \qquad |q(z+h) - q(z)| \leqslant \underbrace{\big|\langle h \mid f(z) \rangle\big|}_{\leqslant \|f(z)\|\,\|h\|} + \underbrace{\big|\langle z \mid f(h) \rangle\big|}_{\leqslant \|f\|\,\|z\|\,\|h\|} + \underbrace{\big|\langle h \mid f(h) \rangle\big|}_{\leqslant \|f\|\,\|h\|^2}$$

ce qui montre que q est continue sur E. En outre, $\mathscr{H}(f) = q(\mathscr{S}(\mathrm{E}))$ donc

$$\boxed{\mathscr{H}(f) \text{ est compact.}}$$

1.6. Soit $z \in \mathrm{E}$ de norme 1. Par définition de f,

$$\langle z \mid f(z) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}\, z_{n+1}$$

Comme $z \neq 0$, l'ensemble d'entiers $\mathrm{A} = \{p \in \mathbb{N} \mid z_p \neq 0\}$ n'est pas vide. Il admet un plus petit élément noté p_0, qui est l'indice du premier terme non nul de la suite z. De sorte que

$$\langle z \mid f(z) \rangle = \sum_{n=p_0}^{\infty} \overline{z_n}\, z_{n+1}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors

$$\left|\langle z \mid f(z)\rangle\right|^2 \leqslant \underbrace{\sum_{n=p_0}^{\infty} |z_n|^2}_{=\|z\|^2=1} \times \underbrace{\sum_{n=p_0}^{\infty} |z_{n+1}|^2}_{=1-|z_{p_0}|^2} = 1 - |z_{p_0}|^2 < 1$$

Ainsi, $$\forall z \in \mathrm{E} \qquad \left(\|z\| = 1 \implies \left|\langle z \mid f(z)\rangle\right| < 1\right)$$

ce qui montre que $$\mathscr{H}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$$

Pour l'inclusion réciproque, il suffit de remarquer que tout complexe λ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de f. La question **1.1** montrera alors que $\lambda \in \mathscr{H}(f)$. On considère la suite z définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad z_n = \lambda^n$$

Le fait que $|\lambda| < 1$ assure que $\Sigma |z_n|^2$ converge donc $z \in \mathrm{E}$. Et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(z)_n = z_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda z_n$$

donc $$f(z) = \lambda z$$

et λ est bien valeur propre de f. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{H}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}}$$

2 Réduction de certains endomorphismes

2.1. On suppose que f est normal ; on se donne un vecteur propre v de f, associé à une valeur propre λ de sorte que $f(v) = \lambda v$. On développe alors, à l'aide de la sesquilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\left\|f^\star(v) - \overline{\lambda}\, v\right\|^2 &= \left\langle f^\star(v) - \overline{\lambda}\, v \;\middle|\; f^\star(v) - \overline{\lambda}\, v\right\rangle \\ &= \langle f^\star(v) \mid f^\star(v)\rangle - \lambda \langle v \mid f^\star(v)\rangle - \overline{\lambda} \langle f^\star(v) \mid v\rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

Mais par définition de l'adjoint d'un endomorphisme, on a

$$\langle v \mid f^\star(v)\rangle = \langle f(v) \mid v\rangle = \overline{\lambda}\, \|v\|^2$$

puis $$\langle f^\star(v) \mid v\rangle = \overline{\langle v \mid f^\star(v)\rangle} = \lambda\, \|v\|^2$$

et enfin $$\begin{aligned}\langle f^\star(v) \mid f^\star(v)\rangle &= \langle v \mid f f^\star(v)\rangle = \langle v \mid f^\star f(v)\rangle \\ &= \lambda \langle v \mid f^\star(v)\rangle = |\lambda|^2\, \|v\|^2\end{aligned}$$

On réinjecte tout cela dans le calcul de $\left\|f^\star(v) - \overline{\lambda}\, v\right\|^2$ pour trouver que cette grandeur est nulle. Par suite, $f^\star(v) - \overline{\lambda}\, v = 0$ ou encore

$$\boxed{v \text{ est vecteur propre de } f^\star\text{, relatif à la valeur propre } \overline{\lambda}.}$$

2.2. Supposons f normal et que v est vecteur propre de f, relatif à la valeur propre λ. On sait que $(\operatorname{Vect} v)^\perp = \{v\}^\perp$ donc il suffit de montrer que $\{v\}^\perp$ est stable par f. Soit $y \in \mathrm{E}$, orthogonal à v. Alors, d'après la question précédente,

$$\langle f(y) \mid v\rangle = \langle y \mid f^\star(v)\rangle = \overline{\lambda}\underbrace{\langle y \mid v\rangle}_{=0} = 0$$

ce qui montre bien que $f(y) \in \{v\}^\perp$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } v \text{ est un vecteur propre de } f, (\operatorname{Vect} v)^\perp \text{ est stable par } f.}$$

2.3. On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E. Évidemment, si $\dim \mathrm{E} = 1$, tout endomorphisme est normal et diagonal dans n'importe quel base, donc diagonalisable.

On suppose savoir que tout endomorphisme normal d'un espace hermitien de dimension n est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit E hermitien de dimension $n+1$, soit f un endomorphisme normal de E. Il admet des valeurs propres puisque son polynôme caractéristique est scindé ; on se donne l'une d'elle notée λ, ainsi qu'un vecteur propre associé v_{n+1}. Quitte à le diviser par sa norme, on suppose que $\| v_{n+1} \| = 1$.

D'après la question précédente, $\mathrm{F} = (\operatorname{Vect} v_{n+1})^\perp$ est stable par f, qui induit donc un endomorphisme de cet espace hermitien (pour la restriction du produit scalaire sur E) de dimension n. On le note $\tilde{f}$; commençons par calculer son adjoint. On rappelle que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

donc *a fortiori* $\quad \forall x, y \in \mathrm{F} \qquad \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle = \langle x \mid \tilde{f}(y)\rangle$

L'adjoint de $\tilde{f}$ étant uniquement défini par la relation

$$\forall x, y \in \mathrm{F} \qquad \langle \tilde{f}^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \tilde{f}(y)\rangle$$

il s'ensuit que $\quad \forall x \in \mathrm{F} \qquad \tilde{f}^\star(x) = f^\star(x)$

Par suite, $\quad \forall x \in \mathrm{F} \qquad \tilde{f}^\star\,\tilde{f}(x) = f^\star f(x) = f f^\star(x) = \tilde{f}\,\tilde{f}^\star(x)$

ce qui établit que $\tilde{f}$ est normal. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de F formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$. Ils sont donc également vecteurs propres de f. Et ils sont tous orthogonaux à v_{n+1} puisque $\mathrm{F} = \{v_{n+1}\}^\perp$.

Ainsi, $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de f ; c'est une base de E, puisque libre et de cardinal $n+1$. Ce qui achève de montrer que f est diagonalisable dans une base orthonormée.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Tout endomorphisme normal d'un espace hermitien} \\ \text{est diagonalisable dans une base orthonormée.}\end{array}}$$

Réciproquement, soit f un endomorphisme d'un espace hermitien E, diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Par définition de l'adjoint de f, on a

$$\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad \langle f^\star(v_i) \mid v_j\rangle = \langle v_i \mid f(v_j)\rangle = \lambda_j \langle v_i \mid v_j\rangle$$

Mais $\langle v_i \mid v_j\rangle$ est nul lorsque $i \neq j$ donc on peut remplacer le λ_j par λ_i ci-dessus. D'où

$$\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad \langle f^\star(v_i) \mid v_j\rangle = \lambda_i \langle v_i \mid v_j\rangle = \langle \overline{\lambda_i}\, v_i \mid v_j\rangle$$

Ce qui démontre que $f^\star(v_i) = \overline{\lambda_i}\, v_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. Du coup,

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f f^\star(v_i) = \overline{\lambda_i}\, f(v_i) = \overline{\lambda_i}\,\lambda_i v_i = \lambda_i f^\star(v_i) = f^\star(\lambda_i v_i) = f^\star f(v_i)$$

f et $f^\star$ commutent sur une base de E, donc ils commutent tout court : f est normal.

> Un endomorphisme d'un espace hermitien, diagonalisable dans une base orthonormée, est normal.

2.4 Soit f normal, qu'on diagonalise dans une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_n)$. On note $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ les valeurs propres associées. On a montré à la question **2.1** que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f^\star(v_i) = \overline{\lambda_i}\, v_i$$

On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont réelles} &\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f^\star(v_i) = \lambda_i v_i \\
&\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f^\star(v_i) = f(v_i) \\
\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont réelles} &\iff f^\star = f
\end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait qu'un endomorphisme de E est entièrement déterminé par l'image d'une base. Ainsi,

> Un endomorphisme normal de E est hermitien si, et seulement si, ses valeurs propres sont réelles.

De manière similaire,

$$\begin{aligned}
f \text{ est unitaire} &\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f f^\star(v_i) = v_i \\
&\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad |\lambda_i|^2\, v_i = v_i \\
f \text{ est unitaire} &\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad |\lambda_i| = 1
\end{aligned}$$

> Un endomorphisme normal de E est unitaire si, et seulement si, ses valeurs propres sont de module 1.

2.5 Rappelons d'abord que si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, dire que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure équivaut à dire que pour chaque $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f(e_i)$ est combinaison linéaire de $e_1,\ldots,e_i$ uniquement.

Puisque f a son polynôme caractéristique scindé (théorème de d'Alembert) il est trigonalisable : il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. À l'aide du procédé de Schmidt, on trouve une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_n)$ de E, telle que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i) = \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_i)$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Puisque $v_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)$ et dans la mesure où la matrice de f dans $(e_1,\ldots,e_n)$ est triangulaire supérieure, $f(v_i)$ est dans $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)$, qui n'est autre que $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_i)$. Donc la matrice de f est aussi triangulaire supérieure dans la base $(v_1,\ldots,v_n)$.

Il existe une base $(v_1,\ldots,v_n)$, orthonormée, dans laquelle f a une matrice triangulaire supérieure.

Si cette matrice est diagonale, la question **2.3** établit que f est normal.

Réciproquement, supposons f normal de sorte que $f^\star f = f f^\star$. Cherchons à localiser $f^\star(v_i)$ pour chaque $i \in [\![1\,;n]\!]$. Commençons par supposer $i \geqslant 2$. On a

$$\forall j \in [\![1\,;i-1]\!] \qquad \langle f^\star(v_i) \mid v_j\rangle = \langle v_i \mid f(v_j)\rangle = 0$$

puisque $f(v_j) \in \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_{i-1})$ et v_i est orthogonal à ces vecteurs. Par suite, $f^\star(v_i)$ est orthogonal à $v_1,\ldots,v_{i-1}$ et

$$\forall i \in [\![2\,;n]\!] \qquad f^\star(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_i,\ldots,v_n)$$

Évidemment, si $i = 1$, il est trivial que $f^\star(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n)$. Ceci montre que la matrice de $f^\star$ dans la base $(v_1,\ldots,v_n)$ est triangulaire inférieure.

Montrons que c'est aussi le cas de la matrice de f. On sait que f est diagonalisable donc il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs propres de f. Soit λ_i la valeur propre associée à e_i. On rappelle que, d'après la question **2.1**,

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f^\star(e_i) = \overline{\lambda_i}\, e_i$$

Si on note P un polynôme interpolateur de Lagrange tel que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \mathrm{P}\big(\overline{\lambda_i}\big) = \lambda_i$$

on a
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_i) = \lambda_i\, e_i = \mathrm{P}\big(\overline{\lambda_i}\big)\, e_i = \mathrm{P}(f^\star)(e_i)$$

$\mathrm{P}(f^\star)$ et f coïncident sur une base, donc $f = \mathrm{P}(f^\star)$.

Ceci établit bien que la matrice de f dans la base $(v_1,\ldots,v_n)$ est triangulaire inférieure, puisqu'il s'agit d'un polynôme en la matrice de $f^\star$ dans cette même base.

La matrice de f dans $(v_1,\ldots,v_n)$ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure : elle est diagonale.

f est normal si, et seulement si, sa matrice dans $(v_1,\ldots,v_n)$ est en fait diagonale.

3 Le Hausdorffien en dimension 2

3.1. On suppose f normal. Il existe donc une base orthonormée (e_1, e_2) de E dans laquelle f est diagonalisable. On note λ_1, λ_2 les valeurs propres associées respectivement à $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. On note g l'endomorphisme de E tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de sorte que $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad f = (\lambda_1 - \lambda_2)g + \lambda_2 \,\mathrm{Id}$$

D'après la question **1.3**, on sait que $\mathscr{H}(g) = [0\,;1]$. Ceci, la relation ci-dessus et la question **1.2** montrent alors que

$$\mathscr{H}(f) = \big\{(\lambda_1 - \lambda_2)t + \lambda_2 \mid t \in [0\,;1]\big\} = \big\{\lambda_1 t + (1-t)\lambda_2 \mid t \in [0\,;1]\big\}$$

$$\boxed{\mathscr{H}(f) \text{ est le segment reliant } \lambda_1 \text{ à } \lambda_2.}$$

3.2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

On met a et b sous forme trigonométrique en notant a_0 et b_0 leurs modules respectifs :

$$a = a_0\, e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad b = b_0\, e^{i\beta}$$

Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ est un vecteur de E de norme 1, on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ donc il existe $\omega \in [0\,; \frac{\pi}{2}]$ tel que $|x_1| = \cos\omega$ et $|x_2| = \sin\omega$. En suivant l'indication de l'énoncé, on pose

$$\phi = \arg(x_1) - \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \arg x_2 - \phi$$

de sorte que $$x_1 = \cos\omega\, e^{i(\phi + (\alpha-\beta)/2)} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sin\omega\, e^{i(\theta+\phi)}$$

Évidemment, la donnée de ω, ϕ et θ détermine entièrement un x de norme 1. Donnons immédiatement, avec ces notations, la valeur de $\langle x \mid f(x)\rangle$. Tous calculs faits,

$$\langle z \mid f(z)\rangle = a\,\overline{x_1}\,x_2 + b\,\overline{x_2}\,x_1 = \frac{\sin 2\omega}{2}\, e^{i(\alpha+\beta)2}\,((a_0+b_0)\cos\theta + i(a_0-b_0)\sin\theta)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(f) &= \left\{\frac{\sin 2\omega}{2}\, e^{i(\alpha+\beta)2}\,((a_0+b_0)\cos\theta + i(a_0-b_0)\sin\theta) \;\middle|\; \omega \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \quad \theta, \phi \in \mathbb{R}\right\} \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left\{\frac{\sin 2\omega}{2}\,((a_0+b_0)\cos\theta + i(a_0-b_0)\sin\theta) \;\middle|\; \omega \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \quad \theta \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

L'exponentielle complexe qui est en facteur fait subir une rotation à l'ensemble auquel elle est multipliée. Pour chaque $\omega \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ fixé, l'ensemble

$$\mathscr{E}_\omega = \left\{ \frac{\sin 2\omega}{2} \left((a_0 + b_0)\cos\theta + \mathrm{i}(a_0 - b_0)\sin\theta\right) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est l'ellipse de demi grand axe $(a_0 + b_0)\frac{\sin 2\omega}{2}$ sur l'axe réel, et demi petit axe $|a_0 - b_0|\frac{\sin 2\omega}{2}$ sur l'axe imaginaire.

Par suite, $\mathscr{H}(f)$ est la réunion de toutes ces ellipses lorsque ω varie de 0 à $\pi/2$, tournée d'un angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Le sinus variant continument de 0 à 1,

$\boxed{\text{$\mathscr{H}(f)$ est le disque elliptique dont les axes sont de longueurs $|a| + |b|$ et $||a| - |b||$, centré en l'origine, tourné d'un angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$.}}$

3.3. Supposons que $\operatorname{Tr} f = 0$. La trace de f étant la somme des deux valeurs propres de f, celles-ci sont opposées et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λ et $-\lambda$ sont les valeurs propres de f.

On distingue les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si f admet une valeur propre double, cela implique que $\lambda = 0$. Auquel cas, on se donne $e_1 \in \operatorname{Ker} f$ non nul, et e_2 orthogonal à e_1. Quitte à les diviser par leur norme, on suppose que ces vecteurs sont de norme 1. La matrice de f dans la base orthonormée (e_1, e_2) est alors de la forme

  $$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

  Mais comme $\operatorname{Tr} f$ est nul et qu'il s'agit de la trace de toute matrice pouvant représenter f, il s'ensuit que $b = 0$. On a bien une matrice de la forme voulue dans une base orthonormée.

- On suppose que f est normal. Il existe alors une base orthonormée (e_1, e_2) de vecteurs propres de f ; quitte à les échanger, on suppose que $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = -\lambda e_2$. On pose alors

  $$u_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{e_1 - e_2}{2}$$

  On vérifie immédiatement que $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est orthonormée. De plus,

  $$f(u_1) = \frac{\lambda(e_1 - e_2)}{\sqrt{2}} = \lambda u_2 \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = \frac{\lambda(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}} = \lambda u_1$$

  d'où
  $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

  qui est bien de la forme voulue.

- Enfin, on suppose qu'on est dans le dernier cas : les deux valeurs propres de f sont simples (donc $\lambda \neq 0$) et f n'est pas normal. f est donc diagonalisable, mais pas dans une base orthonormée : il existe une base (e_1, e_2) de vecteurs propres, satisfaisant $\langle e_1 \mid e_2\rangle \neq 0$. Quitte à échanger ces vecteurs, on suppose que

$$f(e_1) = \lambda e_1 \qquad \text{et} \qquad f(e_2) = -\lambda e_2$$

Et, quitte à les diviser par leur norme, on suppose qu'ils sont de norme 1. On choisit alors α tel que

$$\alpha^2 = \frac{\langle e_2 \mid e_1\rangle}{\langle e_1 \mid e_2\rangle} = \frac{\overline{\langle e_1 \mid e_2\rangle}}{\langle e_1 \mid e_2\rangle}$$

C'est possible puisque tout nombre complexe admet des racines carrées. La deuxième expression de α^2 montre que ce nombre est de module 1, donc $|\alpha| = 1$. De sorte que $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$. On pose ensuite $u = e_1 + \alpha e_2$ et on constate que

$$\begin{aligned} \langle u \mid f(u)\rangle &= \langle e_1 + \alpha e_2 \mid \lambda e_1 - \lambda\alpha e_2\rangle \\ &= \lambda \underbrace{\|e_1\|^2}_{=1} - \lambda\alpha\langle e_1 \mid e_2\rangle + \lambda\overline{\alpha}\langle e_2 \mid e_1\rangle - \lambda \underbrace{|\alpha|^2\,\|e_2\|^2}_{=1} \end{aligned}$$

$$\langle u \mid f(u)\rangle = \lambda\Big(\frac{\langle e_2 \mid e_1\rangle}{\alpha} - \alpha\langle e_1 \mid e_2\rangle\Big) = \frac{\lambda}{\alpha}\underbrace{\big(\langle e_2 \mid e_1\rangle - \alpha^2\langle e_1 \mid e_2\rangle\big)}_{=0}$$

Enfin, on pose $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et on construit une base orthonormée $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ de E. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

Le zéro en haut à gauche provient du fait que $\langle u_1 \mid f(u_1)\rangle = 0$. Comme f est de trace nulle, il s'ensuit que $c = 0$. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est bien de la forme voulue.

3.4. Soit f un endomorphisme de E. On pose

$$g = f - \frac{\operatorname{Tr} f}{2}\operatorname{Id} \qquad \text{de sorte que} \qquad f = g + \frac{\operatorname{Tr} f}{2}\operatorname{Id}$$

g est de trace nulle ; d'après la question **3.3**, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de g a la forme $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Et d'après la question **3.2**, $\mathscr{H}(g)$ est un disque elliptique.

Mais la question **1.2** établit que

$$\mathscr{H}(f) = \Big\{ z + \frac{\operatorname{Tr} f}{2} \mid z \in \mathscr{H}(g)\Big\}$$

$\mathscr{H}(f)$ est donc le translaté de $\mathscr{H}(g)$ par le vecteur d'affixe $\frac{\operatorname{Tr} f}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{H}(f) \text{ est un disque elliptique.}}$$

On note $\varepsilon = \frac{\operatorname{Tr} f}{2}$. Remarquons que

$$ff^\star = (g+\varepsilon\,\mathrm{Id})(g^\star+\overline{\varepsilon}\,\mathrm{Id}) = gg^\star + \varepsilon\, g^\star + \overline{\varepsilon}\, g + |\varepsilon|^2\,\mathrm{Id}$$

tandis que
$$\begin{aligned} f^\star f = (g^\star+\overline{\varepsilon}\,\mathrm{Id})(g+\varepsilon\,\mathrm{Id}) &= g^\star g + \underbrace{\varepsilon\, g^\star + \overline{\varepsilon}\, g + |\varepsilon|^2\,\mathrm{Id}}_{=ff^\star-gg^\star} \\ &= ff^\star + g^\star g - gg^\star \end{aligned}$$

Ce qui établit que f est normal si, et seulement si, g est normal.

Ensuite, on observe que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(gg^\star) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \overline{b} \\ \overline{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{bmatrix}$$

et
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^\star g) = \begin{bmatrix} 0 & \overline{b} \\ \overline{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui montre que g est normal si, et seulement si, $|a| = |b|$.

Enfin, la question **3.2** donne en fait plus de précisions sur $\mathscr{H}(g)$: c'est un disque elliptique dont les axes sont de longueurs $|a|+|b|$ et $||a|-|b||$, dégénéré si, et seulement si, $|a| = |b|$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est normal si, et seulement si, } \mathscr{H}(f) \text{ est dégénéré.}}$

Enfin, $\mathscr{H}(f)$ est un vrai disque $\iff$ ses axes sont de même longueur

$$\iff |a|+|b| = ||a|-|b|| \iff (|a|+|b|)^2 = (|a|-|b|)^2$$
$$\iff |a|\,|b| = 0$$

$$\mathscr{H}(f) \text{ est un vrai disque} \iff \chi_g = \mathrm{X}^2 \iff \chi_f = \Big(\mathrm{X} - \frac{\operatorname{Tr} f}{2}\Big)^2$$

$$\boxed{\mathscr{H}(f) \text{ est un vrai disque si, et seulement si, } f \text{ admet une valeur propre double.}}$$

3.5. On reprend les notations des questions précédentes : $f = g + \varepsilon\,\mathrm{Id}$ avec $\varepsilon = \frac{\operatorname{Tr} f}{2}$ et g admet, dans une base orthonormée, pour matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \qquad \text{et} \qquad b = |b|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$$

On sait (question **3.2** que $\mathscr{H}(g)$ est l'image par la rotation d'angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$ du disque elliptique dont la frontière est l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation cartésienne

$$\frac{4x^2}{(|a|+|b|)^2} + \frac{4y^2}{(|a|-|b|)^2} = 1$$

Les foyers de $\mathscr{E}$ ont pour affixes c et $-c$, avec

$$c^2 = \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a|-|b|}{2}\right)^2 = |ab|$$

Les foyers de la frontière de $\mathscr{H}(g)$ sont donc les points d'affixes

$$\omega_1 = \sqrt{|a|\,|b|}\,e^{i(\alpha+\beta)/2} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\sqrt{|a|\,|b|}\,e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

C'est-à-dire que ω_1 et ω_2 sont les deux racines carrées de ab. Dans la mesure où le polynôme caractéristique de g est $X^2 - ab$, les foyers de $\mathscr{H}(g)$ sont les valeurs propres de g.

Enfin, on sait (question **3.4**) que $\mathscr{H}(f)$ est le translaté de $\mathscr{H}(g)$ par le vecteur d'affixe ε. Les foyers de $\mathscr{H}(f)$ sont alors $\omega_1+\varepsilon$ et $\omega_2+\varepsilon$. Mais puisque $f = g+\varepsilon\,\mathrm{Id}$, on a

$$\chi_f = \det(f - X\,\mathrm{Id}) = \det(g - (X-\varepsilon)\,\mathrm{Id}) = \chi_g(X-\varepsilon) = (X-\varepsilon-\omega_1)(X-\varepsilon-\omega_2)$$

Les valeurs propres de f sont donc $\omega_1+\varepsilon$ et $\omega_2+\varepsilon$.

$$\boxed{\text{Les foyers de } \mathscr{H}(f) \text{ sont les valeurs propres de } f.}$$

4 Hausdorffien et convexité

4.1 On commence par montrer que π_F est hermitien. Si x et y sont dans E, on les décompose suivant la somme directe $F \oplus F^\perp$:

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad y = y_1 + y_2$$

Ainsi, $$\pi_F(x) = x_1 \qquad \pi_F(y) = y_1$$

Du coup, $$\langle \pi_F(x) \mid y\rangle = \langle x_1 \mid y_1 + y_2\rangle = \langle x_1 \mid y_1\rangle$$

puisque $x_1 \perp y_2$. De la même manière, on montre que $\langle x \mid \pi_F(y)\rangle = \langle x_1 \mid y_1\rangle$. D'où

$$\forall x, y \in E \qquad \langle \pi_F(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \pi_F(y)\rangle$$

Répondons maintenant à la question posée. Soit $\lambda \in \mathscr{H}(\pi_f \circ f_{|F})$. Il existe $z \in F$ de norme 1 tel que

$$\lambda = \langle z \mid \pi_F f(z)\rangle = \langle \pi_F(z) \mid f(z)\rangle = \langle z \mid f(z)\rangle \in \mathscr{H}(f)$$

$$\boxed{\mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F}) \subset \mathscr{H}(f)}$$

4.2 Soient λ_1 et λ_2 dans $\mathscr{H}(f)$. Il existe des vecteurs z_1, z_2 dans E, de norme 1, tels que

$$\lambda_1 = \langle z_1 \mid f(z_1)\rangle \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \langle z_2 \mid f(z_2)\rangle$$

Suposons d'abord que $\dim E \geqslant 2$. On note F un sous-espace de E, de dimension 2, contenant z_1 et z_2. Les résultats de la partie 3 montrent que $\mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F})$ est un disque elliptique, donc convexe. Puisqu'il contient λ_1 et λ_2, il contient le segment reliant ces deux points du plan complexe. Enfin, d'après la question **4.1**, ce segment est aussi contenu dans $\mathscr{H}(f)$.

Si $\dim \mathrm{E} = 1$, alors z_1 et z_2 sont proportionnels. Et comme ils ont tous deux norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = e^{i\theta} z_1$. Du coup,

$$\lambda_2 = \langle e^{i\theta} z_1 \mid f(e^{i\theta} z_1)\rangle = e^{-i\theta} e^{i\theta} \langle z_1 \mid f(z_1)\rangle = \lambda_1$$

Dans ce cas, $\mathscr{H}(f)$ est réduit à un point. Il est évidemment convexe.

$$\boxed{\mathscr{H}(f) \text{ est convexe.}}$$

4.3 On démontre quelque chose de plus fort que ce qui est demandé, car cela ne coûte pas plus cher et rend la suite de la question moins technique.

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$, sous-espaces de E deux-à-deux orthogonaux, tels que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des endomorphismes de $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ respectivement. Si $x \in \mathrm{E}$ se décompose comme

$$x = x_1 + \cdots + x_p \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad x_i \in \mathrm{E}_i$$

on pose

$$f(x) = f_1(x_1) + \cdots + f_p(x_p)$$

On va montrer que $\mathscr{H}(f) = \mathrm{Conv}\big(\mathscr{H}(f_1) \cup \cdots \cup \mathscr{H}(f_p)\big)$. Évidemment, le cas $p = 2$ répond à la question posée.

Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$ et $\lambda \in \mathscr{H}(f_i)$. Il existe $z \in \mathrm{E}_i$ de norme 1 tel que $\lambda = \langle z \mid f_i(z)\rangle$. Mais par définition de f, on a $f(z) = f_i(z)$ donc λ se trouve aussi dans $\mathscr{H}(f)$. Ce qui montre que

$$\mathscr{H}(f_1) \cup \cdots \cup \mathscr{H}(f_p) \subset \mathscr{H}(f)$$

Par suite, $\mathscr{H}(f)$ doit aussi contenir toute combinaison convexe d'éléments de l'ensemble $\mathscr{H}(f_1) \cup \cdots \mathscr{H}(f_p)$, puisqu'il est lui-même convexe d'après la question **4.2**. Ce qui montre la première inclusion

$$\mathrm{Conv}\big(\mathscr{H}(f_1) \cup \cdots \cup \mathscr{H}(f_p)\big) \subset \mathscr{H}(f)$$

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathscr{H}(f)$ et $z \in \mathrm{E}$, de norme 1, tel que $\lambda = \langle z \mid f(z)\rangle$. Dans la mesure où $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$, on décompose z suivant cette somme directe de sorte que

$$z = z_1 + \cdots + z_p \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1\,;p]\!] \quad z_i \in \mathrm{E}_i$$

Par définition de f, on a

$$\begin{aligned}\lambda &= \langle z_1 + \cdots + z_p \mid f_1(z_1) + \cdots + f_p(z_p)\rangle \\ &= \langle z_1 \mid f_1(z_1)\rangle + \cdots + \langle z_p \mid f_p(z_p)\rangle\end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que les $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont deux-à-deux orthogonaux et que chaque E_i est stable par f_i. On pose alors

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \lambda_i = \left\langle \frac{z_i}{\|z_i\|} \,\middle|\, f\Big(\frac{z_i}{\|z_i\|}\Big)\right\rangle \in \mathscr{H}(f_i) \qquad \text{si} \qquad z_i \neq 0$$

on a

$$\lambda = \sum_{\substack{i=0 \\ z_i \neq 0}}^{p} \|z_i\|^2 \lambda_i$$

Mais
$$\sum_{\substack{i=0\\ z_i\neq 0}}^{p} \|z_i\|^2 = \sum_{i=0}^{p} \|z_i\|^2 = \|z\|^2 = 1$$
d'après la relation de Pythagore. Donc λ est bien combinaison convexe d'éléments de $\mathscr{H}(f_1)\cup\cdots\cup\mathscr{H}(f_p)$.

$$\boxed{\mathscr{H}(f) = \mathrm{Conv}\big(\mathscr{H}(f_1)\cup\cdots\cup\mathscr{H}(f_p)\big)}$$

Une remarque : au cours de la question **4.2**, on a montré que si E est de dimension 1, $\mathscr{H}(f)$ est réduit à un point. Dans la mesure où f est alors une homothétie, il est immédiat que ce point est le rapport de l'homothétie, c'est-à-dire l'unique valeur propre de f. Ainsi, en dimension 1, $\mathscr{H}(f)$ est bien l'enveloppe convexe des valeurs propres de f.

On suppose maintenant f normal et E de dimension finie d. Il existe une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$ de E formée de vecteurs propres de f. On note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i. En posant
$$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad \mathrm{E}_i = \mathrm{Vect}(e_i)$$
E est somme directe orthogonale de $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_d$. De plus, f agit comme l'homothétie de rapport λ_i sur chaque E_i. D'après le résultat établi en début de question,
$$\boxed{\mathscr{H}(f) = \mathrm{Conv}\big(\{\lambda_1,\ldots,\lambda_d\}\big)}$$

On a vu à la question **1.4** un exemple d'endomorphisme f d'un espace hermitien de dimension 2, non normal, dont le Hausdorffien est un disque de rayon 1/2. Un tel disque, non dégénéré, n'est certainement pas l'enveloppe convexe des deux valeurs propres de f : cette dernière est le segment qui les relie.

4.4 Le résultat est évident si le convexe polygonal $\mathscr{C}$ n'est l'enveloppe convexe que d'un point : $\mathscr{C}$ est alors un singleton et $\mathscr{E}\subset\mathscr{C}$ implique que $\mathscr{E}$ est un point donc est dégénérée.

On suppose donc que $\mathscr{C} = \mathrm{Conv}(s, v_1,\ldots,v_n)$ avec $n\geqslant 1$ et que $\mathscr{E}$ est un disque elliptique non dégénéré contenu dans $\mathscr{C}$, tel que $s\in\mathscr{E}$. Commençons par observer que s ne peut être intérieur à $\mathscr{E}$: s'il l'est, il y a une boule $\mathscr{B}(s,2\varepsilon)$ avec $\varepsilon>0$ contenue dans $\mathscr{E}$, donc contenue dans $\mathscr{C}$. Et s se trouve au milieu du segment reliant $s-\varepsilon\overrightarrow{\imath}$ et $s+\varepsilon\overrightarrow{\imath}$ ce qui contredit le fait que s est un sommet.

s est donc sur la frontière de $\mathscr{E}$. Quitte à procéder à un changement de repère affine, on peut supposer que s est l'origine du repère et que la tangente à $\mathscr{E}$ en s est horizontale.

Pour tout entier $k\neq 0$, on note $\mathscr{D}_k$ la demi-droite d'équation $y = x/k,\ x>0$. Cette droite n'est pas tangente à $\mathscr{E}$ puisqu'elle n'est pas horizontale. Donc elle intersecte $\mathscr{E}$ en au moins un point qu'on note a_k. Bien sur, $a_k\neq 0$ puisque 0 ne se trouve pas sur la demi-droite $\mathscr{D}_k$. Et a_k est combinaison convexe de $0, v_1,\ldots,v_n$: il existe $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[0\,;1]$, dont la somme vaut 1 et tels que
$$a_k = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p v_p$$

On observe qu'il est exclu que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient tous nuls, puisque cela impliquerait que a_k est nul aussi. Du coup, en posant

$$b_k = \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha_p}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} v_p$$

on voit que b_k appartient à l'enveloppe convexe de $v_1, \dots, v_p$. Comme b_k est proportionnel à a_k, il est sur la demi-droite $\mathscr{D}_k$. Notant x_k et y_k ses coordonnées, on a $y_k = x_k / k$ et $x_k > 0$.

Il est aisé de voir de $\mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ est fermé et borné : c'est bourré d'inégalités larges et de combinaisons linéaires à coefficients bornés par 1 de $v_1, \dots, v_n$. Cet ensemble est donc compact ; on peut extraire de $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une sous-suite $(b_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}^\star}$, convergente de limite $b = (x, y) \in \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$. Dans la mesure où $s = 0$ est un sommet de $\mathscr{C}$, il est exclu qu'il soit dans $\mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ donc $b \neq 0$. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \qquad y_{\varphi(k)} = \frac{x_{\varphi(k)}}{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

D'où $$b = (x, 0) \in \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n) \qquad \text{avec} \qquad x > 0$$

De la même manière, on trouve $b' = (x', 0) \in \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ avec $x' < 0$, en utilisant les demi-droites d'équations $y = x/k, x < 0$.

Mais alors $s = 0$ se trouve sur le segment $[b' ; b]$, ce qui contredit le fait qu'il s'agisse d'un sommet. Ouf ! On a donc montré que

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est dégénéré.}}$$

4.5.1. Observons d'une part que

$$\lambda = \langle x \mid f(x) \rangle = \langle \pi_F(x) \mid f(x) \rangle = \langle x \mid \pi_F f(x) \rangle$$

donc $\lambda \in \mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F})$. Puisque F est de dimension 2 et que $\pi_F \circ f_{|F}$ en est un endomorphisme, on sait d'après la partie 3 que son Hausdorffien est un disque elliptique. Comme il contient λ, sommet d'un convexe polygonal, il est dégénéré. La question **3.4** établit alors que $\pi_F \circ f_{|F}$ est normal ; son Hausdorffien est un segment (question **3.1**) dont les extrémités sont ses valeurs propres. Par suite, λ est une valeur propre de $\pi_F \circ f_{|F}$.

Décomposons $\pi_F \circ f_{|F}(x)$ dans la base (x, y) :

$$\pi_F f_{|F}(x) = ax + by$$

Alors $$\lambda = \langle x \mid \pi_F f(x) \rangle = a\|x\|^2 = a$$

Dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (x, y)$, la matrice de f est donc de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_F f_{|F}) = \begin{bmatrix} \lambda & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \text{et par suite} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((\pi_F f_{|F})^\star) = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{bmatrix}$$

On en déduit $$\chi_{\pi_F f_{|F}} = \det(\pi_F f_{|F} - X\mathrm{Id}) = X^2 - (\lambda + d)X + \lambda d - bc$$

Du coup, $$\chi_{\pi_F f_{|F}}(\lambda) = 0 = -bc$$
d'où l'on déduit que $b = 0$ ou $c = 0$.

Dans le premier cas, c'est que $\pi_F f_{|F}(x) = \lambda x$ et x est vecteur propre de $\pi_F \circ f_{|F}$ de valeur propre λ.

Dans le cas où $c = 0$, on calcule alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\pi_F f_{|F}(\pi_F f_{|F})^\star\big) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \overline{b} \\ 0 & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & \lambda\overline{b} \\ b\overline{\lambda} & |b|^2 + |d|^2 \end{bmatrix}$$

et $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((\pi_F f_{|F})^\star\, \pi_F f_{|F}\big) = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 + |b|^2 & d\overline{b} \\ b\overline{d} & |d|^2 \end{bmatrix}$$

Puisque f est normal, ces matrices sont égales ; l'égalité des coefficients en haut à gauche montre en particulier que $|b|^2 = 0$ donc $b = 0$. Du coup, x est vecteur propre de $\pi_F f_{|F}$, de valeur propre λ.

$$\boxed{\pi_F \circ f_{|F} \text{ est normal et } x \text{ en est vecteur propre, de valeur propre } \lambda.}$$

4.5.2. La question précédente montre que, si $y \in \{x\}^\perp$, $f(x)$ n'a aucune composante suivant y et que la composante suivant x est λ. Autrement dit, $f(x)$ est orthogonal à $\{x\}^\perp$. Donc $f(x)$ est proportionnel à x. Ce rapport de proportionnalité ne peut être que λ.

$$\boxed{x \text{ est vecteur propre de } f \text{ relatif à } \lambda.}$$

4.6. Implicitement, on se place dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ dans laquelle la matrice de f est celle donnée par l'énoncé. On identifiera donc vecteurs de E et $\mathbb{C}^5$. On vérifie par un simple analyse matricielle que f n'est pas normal :

$$\mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(f^\star) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \varepsilon^2 & \\ & & & & \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}(f^\star) \times \mathrm{Mat}(f) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Un calcul de déterminant donne ensuite le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f = -X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$$

dont les racines sont 0, 1, j et j^2. Leur enveloppe convexe est donc toute la surface du triangle équilatéral de sommets 1, j et j^2.

Pour déterminer $\mathscr{H}(f)$, il est plus facile d'utiliser la question **4.3**, en essayant de décomposer l'espace astucieusement. Une belle décomposition s'impose presque ; on note

$$E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$$

de sorte que E_1 et E_2 sont orthogonaux. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de E_1 et E_2 respectivement, de matrices dans les bases données ci-dessus

$$\mathrm{Mat}\,(f_1) = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}\,(f_2) = \begin{bmatrix} & \varepsilon \\ & \end{bmatrix}$$

Ceux-ci permettent bien de recomposer f.

$\mathscr{H}(f_2)$ peut être déterminé à l'aide des questions **1.2** et **1.4** : il s'agit du disque centré en l'origine, de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $\mathscr{H}(f_1)$, on remarque que f_1 est normal à l'aide des calculs de produits matriciels faits en début de question. Ou bien il saute aux yeux que $f_1^2 = f_1^\star$. Quoi qu'il en soit, la question **4.3** établit que $\mathscr{H}(f_1)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f_1, qu'on calcule aisément comme étant 1, j et j^2. $\mathscr{H}(f_1)$ est le triangle équilatéral de sommets 1, j et j^2. Celui-ci contient le disque $\mathscr{H}(f_2)$ puisque son cercle inscrit est centré en 0, de rayon $\frac{1}{2}$ tandis que $\mathscr{H}(f_2)$ est centré en 0, de rayon $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. D'où

$$\mathscr{H}(f) = \mathrm{Conv}\big(\mathscr{H}(f_1) \cup \mathscr{H}(f_2)\big) = \mathrm{Conv}\big(\mathscr{H}(f_1)\big) = \mathrm{Conv}\big(\{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}\big)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathscr{H}(f) \text{ est l'enveloppe convexe des valeurs} \\ \text{propres de } f \text{ mais } f \text{ n'est pas normal.}\end{array}}$$

4.7. Si $\dim E = 1$, tout endomorphisme f est normal (c'est une homothétie) et on a vu que son Hausdorffien est précisément le rapport d'homothétie de f.

Supposons que $\mathscr{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f. On se place dans le cas où E est de dimension $d \geqslant 2$. On commence par établir que, si f n'est pas diagonalisable, il existe un plan F tel que $\pi_F \circ f_{|F}$ n'est pas diagonalisable.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, de sorte que

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_p)^{n_p} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1\,;p]\!] \quad n_i \geqslant 1$$

Dans la mesure où $\chi_f(f) = 0$ et d'après le lemme de décomposition des noyaux,

$$E = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1\,\mathrm{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_p\,\mathrm{Id})^{n_p}$$

de sorte que $$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1\,\mathrm{Id})^{n_1} + \cdots + \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_p\,\mathrm{Id})^{n_p}$$

Du coup, si pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on a $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id})^2$, le lemme des noyaux itérés implique

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id})^{n_i}$$

d'où $$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1\,\mathrm{Id}) + \cdots + \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_p\,\mathrm{Id})$$

ce qui prouve que f est diagonalisable, puisque la somme des sous-espaces propres est égale à la dimension de E.

Par contraposée, si l'on suppose f non diagonalisable, il existe une valeur propre λ telle que $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\lambda) \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{Id})^2$. Posons $g = f - \lambda\,\mathrm{Id}$ et donnons-nous x dans $\operatorname{Ker} g^2$. Alors $g(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \operatorname{Ker} g$ mais $g(x) \neq 0$; la famille $(x, g(x))$ est donc libre. Si F est le sous-espace qu'elle engendre, c'en est une base dans laquelle on a

$$\operatorname{Mat}(\pi_F g_{|F}) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Mat}(\pi_F f_{|F}) = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

En outre, $a \neq 0$ puisque $f(x) \neq 0$. Par suite, $\pi_F \circ f_{|F}$ n'est donc pas diagonalisable.

On suppose en plus que $d = 3$ ou 4 et on a notre sous-espace F de dimension 2, tel que λ soit valeur propre double de $\pi_F f_{|F}$, mais cet endomorphisme de F n'est pas diagonalisable. En particulier, il n'est pas normal et d'après la partie 2, cela signifie que $\mathscr{H}(\pi_F f_{|F})$ est un disque elliptique non dégénéré. Il contient en outre λ, qui est valeur propre de $\pi_F f_{|F}$ (question **1.1**). On a ainsi

$$\lambda \in \underbrace{\mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F})}_{\text{non dégénéré}} \subset \mathscr{H}(f) = \operatorname{Conv}(\lambda, \text{les au plus 2 autres valeurs propres de } f)$$

D'après la question **4.4**, λ ne peut être un sommet du convexe polygonal $\mathscr{H}(f)$. Donc $\mathscr{H}(f)$ est en fait l'enveloppe convexe des valeurs propres de f autres que λ. Mais cela fait de $\mathscr{H}(f)$ un segment, un point ou l'ensemble vide. Ce qui contredit le fait que $\mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F})$ n'est pas dégénéré.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

Reste à établir qu'il est normal. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée (question **2.3**), ou encore que les sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux. On se donne donc x et y, vecteurs propres de f relatifs à des valeurs propres distinctes λ et μ. Alors $F = \operatorname{Vect}(x, y)$ est un plan, stable par f.

Si ni λ, ni μ, n'est un sommet de $\mathscr{H}(f)$, ce dernier est l'enveloppe convexe d'au plus deux sommets (les au plus deux autres valeurs propres de f). Donc $\mathscr{H}(f)$ est un segment ou un point. Du coup, $\mathscr{H}(\pi_F \circ f_{|F})$ est un disque elliptique dégénéré : $\pi_F \circ f_{|F}$ est normal (question **3.4**) ; x et y sont donc orthogonaux.

Si l'un des deux λ ou μ est un sommet de $\mathscr{H}(f)$, la question **4.5.1** établit également que $\pi_F \circ f_{|F}$ est normal ; x et y sont orthogonaux.

Des vecteurs propres de f, relatifs à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux. De fait, f est normal.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \dim E \leqslant 4 \text{ et si } \mathscr{H}(f) \text{ est l'enveloppe convexe} \\ \text{des valeurs propres de } f, \text{ alors } f \text{ est normal.}\end{array}}$$

4.8. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de E. Si $\dim E = 1$ et f est de trace nulle, alors $f = 0$ et sa matrice dans toute base de E est nulle.

Supposons le résultat vrai en dimension $n \geqslant 1$: si E est hermitien de dimension n et f est un endomorphisme de E de trace nulle, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f n'a que des 0 sur la diagonale.

Soient E hermitien de dimension $n+1$ et f un endomorphisme de E dont la trace est nulle. La somme des valeurs propres de f est donc nulle ; ou encore, leur moyenne est nulle. Mais chacune d'elle est dans $\mathscr{H}(f)$ d'après la question **1.1**. Et $\mathscr{H}(f)$ est convexe ; leur moyenne est donc aussi dans $\mathscr{H}(f)$. Il existe $z_{n+1} \in E$, unitaire, tel que $\langle z_{n+1} \mid f(z_{n+1})\rangle = 0$.

On note $F = \{z_{n+1}\}^{\perp}$. C'est un sous-espace de E de dimension n. Si on note π_F la projection orthogonale de E sur F, $g = \pi_F \circ f_{|F}$ est un endomorphisme de F. Si l'on se donne une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de F, on sait que

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{Tr} f &= \sum_{i=1}^{n} \langle \underbrace{e_i}_{=\pi_F(e_i)} \mid f(e_i)\rangle + \underbrace{\langle z_{n+1} \mid f(z_{n+1})\rangle}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid \pi_F f(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid g(e_i)\rangle \\
0 &= \operatorname{Tr} g
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(z_1, \ldots, z_n)$ de F dans laquelle la matrice de g est de diagonale nulle. Autrement dit,

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad 0 = \langle z_i \mid g(z_i)\rangle = \langle z_i \mid \pi_F f(z_i)\rangle = \langle \pi_F(z_i) \mid f(z_i)\rangle = \langle z_i \mid f(z_i)\rangle$$

La diagonale de la matrice de f dans la base orthonormée $(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1})$ est donc nulle, ce qui montre l'hérédité.

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{Tr} f = 0, \text{ il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de } f \text{ a sa diagonale nulle.}}$$

5 L'inégalité de Von Neumann

5.1. Soit f un endomorphisme normal. On le diagonalise dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$ de E et on note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i. Quitte à renommer tout ce beau monde, on suppose que λ_d est une valeur propre de module maximal. Si $x \in E$, on le décompose dans cette base :

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Du coup,
$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i e_i$$

et $$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leqslant |\lambda_d|^2 \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = |\lambda_d|^2 \|x\|^2$$

Si $|\lambda_d| \leqslant 1$, il vient que f est une contraction.

Réciproquement, si f est une contraction, alors

$$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad |\lambda_i| = \|\lambda_i e_i\| = \|f(e_i)\| \leqslant \|e_i\| = 1$$

Toutes les valeurs propres de f sont de module inférieur à 1.

$\boxed{\text{$f$ est une contraction si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes de module inférieur à 1.}}$

On suppose maintenant que f est une contraction normale. Si P est un polynôme, on note

$$\mathrm{M} = \mathrm{Sup}\,\{\mathrm{P}(\lambda) \mid |\lambda| \leqslant 1\}$$

On vérifie aisément que chaque e_i est vecteur propre de $\mathrm{P}(f)/\mathrm{M}$ de valeur propre associée $\mathrm{P}(\lambda_i)/\mathrm{M}$. Donc $\mathrm{P}(f)/\mathrm{M}$ est normal (diagonal dans la base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$) et ses valeurs propres sont toutes inférieures à 1 en module puisque

$$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad \left|\frac{\mathrm{P}(\lambda_i)}{\mathrm{M}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 1$$

$\mathrm{P}(f)/\mathrm{M}$ est alors une contraction :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \left\|\frac{\mathrm{P}(f)(x)}{\mathrm{M}}\right\| \leqslant \|x\|$$

ou encore $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}(f)(x)\| \leqslant \mathrm{Sup}_{|\lambda|\leqslant 1} |\mathrm{P}(\lambda)| \cdot \|x\|$$

$\boxed{\text{L'inégalité de Von Neuman est satisfaite si f est normal.}}$

5.2. $f^\star f$ est hermitien puisque

$$(f^\star f)^\star = f^\star f^{\star\star} = f^\star f$$

Il est en particulier normal, donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$. On note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i. Commençons par observer qu'elles sont toutes réelles et strictement positives :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad \lambda_i &= \lambda_i \langle e_i \mid e_i\rangle = \langle e_i \mid \lambda_i e_i\rangle \\ &= \langle e_i \mid f^\star f(e_i)\rangle = \langle f(e_i) \mid f(e_i)\rangle \\ \lambda_i &= \|f(e_i)\|^2 > 0 \end{aligned}$$

On définit alors un endomorphisme h de E par son action sur la base $(e_1,\ldots,e_n)$:

$$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad h(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$$

de sorte que $$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad h^2(e_i) = \lambda_i e_i = f^\star f(e_i)$$

Du coup, $h = f^\star f$ puisque ces endomorphismes coïncident sur une base. De plus, h est hermitien puisque

$$\forall i,j \in [\![1\,;d]\!] \qquad \begin{aligned} \langle h(e_i) \mid e_j\rangle &= \langle \sqrt{\lambda_i}\, e_i \mid e_j\rangle = \sqrt{\lambda_i}\,\langle e_i \mid e_j\rangle \\ &= \sqrt{\lambda_i}\,\delta_{i,j} = \sqrt{\lambda_j}\,\delta_{i,j} \\ &= \sqrt{\lambda_j}\,\langle e_i \mid e_j\rangle = \langle e_i \mid \sqrt{\lambda_j}\, e_j\rangle \\ \langle h(e_i) \mid e_j\rangle &= \langle e_i \mid h(e_j)\rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il existe } h \in \operatorname{End} \mathrm{E}\text{, hermitien positif, tel que } f^\star f = h^2}$$

Posons $u = (f^{-1})^\star\, h$; on a alors $u^\star = h f^{-1}$ de sorte que

$$u u^\star = (f^{-1})^\star\, h^2 f^{-1} = (f^{-1})^\star\, f^\star f f^{-1} = \mathrm{Id}$$

Ainsi, $u^\star = u^{-1}$ et u est unitaire. De plus, $u^{-1} = h f^{-1}$ donc $f = uh$.

Enfin, on suppose avoir trouvé deux autres endomorphismes ω et g, avec ω unitaire et g hermitien positif, tels que $f = \omega g$. Alors

$$f^\star = g^\star\, \omega^\star = g\omega^{-1}$$

et

$$f^\star f = g\omega^{-1}\,\omega g = g^2$$

Supposons, temporairement, avoir établi que $g = h$. De la relation $f = \omega g = \omega h = uh$, il vient $\omega = u$ puisque h est inversible.

On termine en expliquant pourquoi $g = h$. Soit μ une valeur propre de g et x un vecteur propre associé. Alors

$$f^\star f(x) = g^2(x) = \mu^2 x$$

et x est vecteur propre de $f^\star f$, relatif à la valeur propre μ^2. Si l'on note $0 < \mu_1 < \cdots < \mu_p$ les valeurs propres, deux-à-deux distinctes, de g on a montré que

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \operatorname{Ker}(g - \mu_i\,\mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f^\star f - \mu_i^2\,\mathrm{Id}) \tag{1}$$

Mais g est hermitien, donc normal, donc diagonalisable et il vient

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(g - \mu_i\,\mathrm{Id}) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f^\star f - \mu_i^2\,\mathrm{Id})$$

Si l'une des inclusions dans la relation (**1**) est stricte, on aura aussi une inclusion stricte ci-dessus, ce qui est absurde. Donc

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \operatorname{Ker}(g - \mu_i\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f^\star f - \mu_i^2\,\mathrm{Id})$$

On rappelle que $(e_1,\ldots,e_d)$ est une base orthonormée de diagonalisation de $f^\star f$ et que $\lambda_i > 0$ est la valeur propre de $f^\star f$ relative à chaque e_i. De ce qui précède, e_i est aussi vecteur propre de g, relatif à une valeur propre μ telle que $\mu^2 = \lambda_i$. Soit $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque les valeurs propres de g sont positives. Ainsi,

$$\forall i \in [\![1\,;d]\!] \qquad g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} = h(e_i)$$

g et h coïncident sur une base et sont donc égaux.

$$\boxed{\text{Il existe } u \text{ unitaire et } h \text{ hermitien, uniques, tels que } f = uh.}$$

5.3. On commence par montrer que l'ensemble U des endomorphismes unitaires de E est compact. On munit End E de la norme d'application linéaire définie par

$$\forall f \in \operatorname{End} E \qquad \|f\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

et on commence par montrer que l'application Adj : $f \longmapsto f^\star$ est continue. Si f est un endomorphisme de E et $x \in E$ est de norme 1, on a

$$\|f^\star(x)\|^2 = \langle f^\star(x) \mid f^\star(x)\rangle = \langle x \mid f f^\star(x)\rangle \leqslant \|x\|\,\|f f^\star(x)\|$$

par définition de l'adjoint et d'après Cauchy-Schwarz. Ensuite, par définition de la norme d'application linéaire, il vient

$$\|f^\star\|^2 \leqslant \|f\|\,\|f^\star\|$$

d'où $$\forall f \in \operatorname{End} E \qquad \|f^\star\| \leqslant \|f\|$$

Ensuite, si $f \in \operatorname{End} E$ est fixé, on a

$$\forall h \in \operatorname{End} E \qquad \|(f+h)^\star - f^\star\| = \|h^\star\| \leqslant \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Ceci établit que Adj est continue sur End E. Par suite, P : $f \longmapsto f^\star f$ est continue sur End E (la composition est continue car bilinéaire). Et dans la mesure où $U = P^{-1}(\mathrm{Id})$, il vient que U est fermé.

Ensuite, si $f \in U$, on a

$$\forall x \in E \qquad \|f(x)\|^2 = \langle f(x) \mid f(x)\rangle = \langle x \mid f^\star f(x)\rangle = \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$$

ce qui montre que $\|f\| = 1$. Par suite, U est borné. Comme End E est de dimension finie,

$$\boxed{\text{L'ensemble des endomorphismes unitaires est compact.}}$$

Répondons maintenant à la question posée. On ne suppose plus que f est inversible. Ce n'est pas grave : f admet un nombre fini de valeurs propres donc en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \qquad f_k = f - \frac{1}{k}\,\mathrm{Id}$$

on est sûr que f_k est inversible pour k assez grand, supérieur à un certain K. Toujours sous cette hypothèse, f_k peut se décomposer (de manière unique) sous la forme $f_k = \omega_k h_k$ avec ω_k unitaire et h_k hermitien. On peut extraire de $(\omega_k)_{k\geqslant K}$ une sous-suite convergente $(\omega_{\varphi(k)})_{k\geqslant K}$ de limite $\omega \in U$. Or,

$$\forall k \geqslant K \qquad h_{\varphi(k)} = \omega_{\varphi(k)}^{-1} f_{\varphi(k)} = \omega_{\varphi(k)}^\star f_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \omega^\star f = \omega^{-1} f$$

On a utilisé ici la continuité de Adj et de la composition dans $\operatorname{End} E$. On pose alors $h = \omega^{-1} f$ de sorte que $f = \omega h$. Reste à voir que h est hermitien. Mais l'ensemble des endomorphismes hermitiens est fermé, puisqu'il s'agit de $(\mathrm{Adj} - \mathrm{Id})^{-1}(\{0\})$, image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme h est limite d'endomorphismes hermitiens, il est lui-même hermitien.

$$\boxed{\text{Si } f \in \operatorname{End} E, \text{ il existe } h \text{ hermitien et } \omega \text{ unitaire tels que } f = \omega h.}$$

5.4. On a vu au cours de la preuve de la compacité de U, dans la question **5.3**, que les endomorphismes unitaires préservent la norme. Donc

$$\forall x \in E \qquad \| f(x) \| = \| u h(x) \| = \| h(x) \|$$

Par suite, f est une contraction si, et seulement si, h en est une. Et en utilisant la question **5.2** et le fait qu'un endomorphisme hermitien est normal,

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est une contraction si, et seulement si, les valeurs} \\ \text{propres de } h \text{ sont toutes de module inférieur à 1.} \end{array}}$$

5.5. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$ fixé. La relation à montrer étant linéaire, il suffit de l'établir pour une base de $\mathbb{C}[X]$. Par exemple, pour la famille $\big((X - z_0)^k \mid k \in \mathbb{N}\big)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et prenons $Q = (X - z_0)^k$. On a

$$\int_0^{2\pi} Q(z_0 + r\,e^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quel que soit le cas considéré, on trouve $2\pi Q(z_0)$ dans le membre de droite. D'après l'observation préliminaire,

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{C}[X] \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geqslant 0 \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + r\,e^{i\theta})\,d\theta = Q(z_0)}$$

5.6. Observons d'abord que si Q est un polynôme, en appliquant à Q^2 la relation obtenue à la question **5.5**, on obtient

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geqslant 0 \qquad Q(z_0)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + r\,e^{i\theta})^2\,d\theta$$

d'où

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geqslant 0 \qquad |Q(z_0)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|Q(z_0 + r\,e^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

Il est alors immédiat, par additivité de l'intégrale, que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } Q_1, \ldots, Q_d \text{ sont dans } \mathbb{C}[X], \text{ alors pour tous } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } r \geqslant 0, \\ \displaystyle |Q_1(z_0)|^2 + \cdots + |Q_d(z_0)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\left|Q_1(z_0 + r\,e^{i\theta})\right|^2 + \cdots + \left|Q_d(z_0 + r\,e^{i\theta})\right|^2 \Big)\,d\theta \end{array}}$$

Pour alléger les notations, on note f la fonction $|Q_1|^2 + \cdots + |Q_d|^2$. Faisons une observation : les deux sups à comparer sont, en fait, des max, compte-tenu du fait que f est continue, et que le disque unité fermé ou le cercle unité sont compacts. Le cercle unité étant inclus dans le disque unité de $\mathbb{C}$, il est clair que

$$\operatorname*{Sup}_{|z|=1} f(z) \leqslant \operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1} f(z)$$

Pour la réciproque, supposons que $\operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1} f(z)$ n'est pas atteint sur le cercle unité. Ceci signifie qu'il existe $z_0 = |z_0|\,e^{i\theta_0}$ tel que $|z_0| < 1$ et

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| = 1 \implies f(z) < f(z_0)$$

On pose alors $r = 1 - |z_0| > 0$ et on observe que

$$\forall \theta \in [0\,;2\pi] \qquad |z_0 + r\,e^{i\theta}| \leqslant |z_0| + r = 1 \qquad \text{et} \qquad |z_0 + r e^{i\theta_0}| = 1$$

de sorte que $\qquad \forall \theta \in [0\,;2\pi] \qquad f(z) \leqslant f(z_0) \qquad \text{et} \qquad f(z_0 + r\,i\theta_0) < f(z_0) \qquad$ (**1**)

Enfin, on utilise l'inégalité montrée au début de cette question :

$$f(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{i\theta})\,d\theta$$

ou encore
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(z_0) - f(z_0 + r\,e^{i\theta})\big)\,d\theta \leqslant 0$$

La fonction $\theta \longmapsto f(z_0) - f(z_0 + r\,e^{i\theta})$ est continue sur $[0\,;2\pi]$, positive et non nulle d'après (**1**). Son intégrale sur $[0\,;2\pi]$ est donc strictement positive. On a une contradication. Donc $\operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1} f(z)$ est atteint sur le cercle unité.

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1}\big(|Q_1(z)|^2 + \cdots + |Q_d(z)|^2\big) = \operatorname*{Sup}_{|z|=1}\big(|Q_1(z)|^2 + \cdots + |Q_d(z)|^2\big)}$$

Pour généraliser aux polynômes à plusieurs variables, on observe que le résultat qu'on vient d'établir amorce une récurrence sur le nombre de variables. On suppose donc savoir que, si $Q_1, \ldots, Q_d$ sont des polynômes à coefficients complexes en $n \geqslant 1$ variables, alors

$$\operatorname*{Sup}_{|z_1|,\ldots,|z_n|\leqslant 1} \big(Q_1(z_1,\ldots,z_n)|^2 + \cdots + |Q_d(z_1,\ldots,z_n)|^2\big)$$
$$= \operatorname*{Sup}_{|z_1|,\ldots,|z_n|=1} \big(Q_1(z_1,\ldots,z_n)|^2 + \cdots + |Q_d(z_1,\ldots,z_n)|^2\big)$$

et on se donne $Q_1, \ldots, Q_d$ des polynômes en $n+1$ variables. À nouveau pour alléger les notations, on pose $f = |Q_1|^2 + \cdots + |Q_d|^2$. On fixe un nombre complexe z et on pose

$$g(z) = \operatorname*{Sup}_{|z_1|,\ldots,|z_n|\leqslant 1} f(z_1, \ldots, z_n, z)$$

La fonction $(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto f(z_1, \ldots, z_n, z)$ est de la bonne forme (somme de carrés de modules de polynômes en n variables) pour lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe des complexes $w_1, \ldots, w_n$, de module 1, tels que

$$\forall z_1, \ldots, z_n \qquad |z_1|, \ldots, |z_n| \leqslant 1 \implies f(z_1, \ldots, z_n, z) \leqslant f(w_1, \ldots, w_n, z) = g(z)$$

Mais la fonction g est une somme de carrés de fonctions polynomiales en 1 variable donc il existe w_{n+1}, de module 1, tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| \leqslant 1 \implies g(z) \leqslant g(w_{n+1})$$

Au finale, pour tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_{n+1}$ dans le disque unité, on a

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) \leqslant f(w_1, \ldots, w_n, z_{n+1}) \leqslant f(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$$

Et la récurrence peut se poursuivre puisque $w_1, \ldots, w_{n+1}$ sont de module 1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tous polynômes $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_d$ en n variables, on a

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname*{Sup}_{|z_1|,\ldots,|z_n|\leqslant 1} \left(|\mathrm{Q}_1(z_1, \ldots, z_n)|^2 + \cdots + |\mathrm{Q}_d(z_1, \ldots, z_n)|^2\right) \\ &\qquad = \operatorname*{Sup}_{|z_1|,\ldots,|z_n|=1} \left(|\mathrm{Q}_1(z_1, \ldots, z_n)|^2 + \cdots + |\mathrm{Q}_d(z_1, \ldots, z_n)|^2\right)\end{aligned}}$$

5.7. L'addition et la multiplication matricielles sont des applications dont les coordonnées sont polynomiales en les coefficients. Donc, si x, u, w et P sont fixés, $\mathrm{P}(f_\mu)(x)$ aura pour coefficients des polynômes en $(\mu_1, \ldots, \mu_d)$.

Il existe des polynômes $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_d$ à d indéterminées tels que

$$\mathrm{P}(f_\mu)(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1(\mu_1, \ldots, \mu_d) \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_d(\mu_1, \ldots, \mu_d) \end{bmatrix}$$

Du coup, $$\|\mathrm{P}(f_\mu)(x)\|^2 = \left|\mathrm{Q}_1(\mu_1, \ldots, \mu_d)\right|^2 + \cdots + \left|\mathrm{Q}_d(\mu_1, \ldots, \mu_d)\right|^2$$

et il est immédiat, au vu du résultat de la question **5.6**, que

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{|\mu_1|,\ldots,|\mu_d|\leqslant 1} \|\mathrm{P}(f_\mu)(x)\| = \operatorname*{Sup}_{|\mu_1|,\ldots,|\mu_d|=1} \|\mathrm{P}(f_\mu)(x)\|}$$

5.8. Soient f une contraction, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $x \in \mathrm{E}$. La question **5.3** assure l'existence de h hermitien et u unitaire, tels que $f = uh$. D'après la question **5.4**, les valeurs propres de h sont toutes de module inférieur à 1. On les note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$.

On se place dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ qui diagonalise h. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

Ce qui nous autorise à utiliser la question **5.7**, avec $w = \mathrm{id}$, qui assure l'existence d'un d-uplet de complexes $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ de module 1, tels que

$$\|P(f)(x)\| \leqslant \|P(f_\mu)(x)\|$$

On rappelle que les sup dans ce cas sont des max. Toujours est-il que l'endomorphisme d_μ est alors une isométrie. En effet,

$$\begin{aligned}
\forall (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \qquad \left\| d_\mu(z_1 e_1 + \cdots + z_d e_d) \right\|^2 &= \|\mu_1 z_1 e_1 + \cdots + \mu_d z_d e_d\|^2 \\
&= |\mu_1 z_1|^2 + \cdots |\mu_d z_d|^2 \\
&= |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2 \\
\left\| d_\mu(z_1 e_1 + \cdots + z_d e_d) \right\|^2 &= \|z_1 e_1 + \cdot + z_d e_d\|^2
\end{aligned}$$

Puisque $f_\mu = u d_\mu$, f_μ est également une isométrie ; en particulier, f_μ est normal. D'après la question **5.1**,

$$\|P(f_\mu)(x)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{|z| \leqslant 1} |P(z)| \cdot \|x\|$$

Par suite, $$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \forall x \in E \qquad \|P(f)(x)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{|z| \leqslant 1} |P(z)| \cdot \|x\|}$$