*Les calculatrices **sont autorisées**.*

∗ ∗ ∗

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

∗ ∗ ∗

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et ζ la fonction zeta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

   Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.
3. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
5. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)\ .$$

   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} c_n$ où $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature selon la valeur de x, de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*

   (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme en fonction de F de la série produit $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, lorsque $x > 1$.

   (b) Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

   En déduire pour $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

7. *Cas où $x = 1$*

   On suppose dans cette question 7. que $x = 1$.

   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$.

   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$ où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8. *Développement asymptotique en 1*

   (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

   (b) En déduire deux réels a et b qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$ tels que l'on ait pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

   (a) Justifier que pour $n \geqslant 1$ et $x \in [1, 2]$, on a :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

   (b) Justifier que pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

(c) Exprimer pour $x \in]1,2]$, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

(d) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

(e) En déduire que l'on a pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*
Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de $\ln 2$ et γ de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geqslant 1$. Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.
$\mathbb{R}[X]$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.
On identifie un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1} \;\text{ et }\; \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On **admet** qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n).
On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.
On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

11. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.
12. Calculer pour $n \geqslant 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.
13. *Symétrie*
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
14. *Développement en série de Fourier*
Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

Justifier avec soin qu'il existe une unique suite de réels $(a_n(k))_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout réel x, on ait :

$$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)\cos(nx).$$

15. *Expression des coefficients*

    (a) Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Montrer que l'on a :

$$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\Big(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\Big) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}a_n(k-1).$$

    (b) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geqslant 1$.

    (c) Conclure que pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$, on a :

$$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

    On remarquera pour la suite (sans le redémontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. *Conclusion*
    Déterminer pour $k \geqslant 1$ une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.

17. *Calcul effectif des b_n*

    (a) Démontrer en utilisant une formule de Taylor que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

    (b) En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés. Écrire, dans un des langages au programme, un petit algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_n pour un entier n donné.

Fin de l'énoncé