Corrigé Centrale MP Maths 2

I.A

I.A.1) Cours, $\Rightarrow$ en prenant un vecteur propre, $\Leftarrow$ en utilisant le théorème spectral.

I.A.2) Cours, on reprend la démonstration précédente.

I.B

I.B.1) Soit $X_i \in \mathfrak{M}_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul. Posons $X = \binom{X_i}{0} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $X \neq 0$.

Il vient ${}^tX_iA^{(i)}X_i = {}^t XAX > 0$ donc $A^{(i)}$ est définie positive. $\det\left(A^{(i)}\right)$ est le produit des valeurs propres de la matrice $A^{(i)}$ (la matrice symétrique réelle $A^{(i)}$ est diagonalisable par le théorème spectral), comme celles-ci sont toutes > 0, on a bien $\det\left(A^{(i)}\right) > 0$.

I.B.2) $n = 1$. $A = (a)$ définie positive $\Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \det A = a > 0$.

Traitons le cas $n = 2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ avec $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$.

En notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres, on a $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$ donc les deux valeurs propres sont de même signe.

Par le théorème spectral, ${}^tXAX = \lambda_1 x_i'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ avec (x_1', x_2') coordonnées de X dans une base orthonormale de diagonalisation.

Donc pour X non nul, $\operatorname{sgn}\left({}^tXAX\right) = \operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}\left({}^tE_1AE_1\right) = \operatorname{sgn} a$ avec $E_1 = {}^t(1, 0)$

Donc les deux valeurs propres de A sont strictement positives, A est bien définie positive.

I.B.3) a) On sait que $\det A$ est le produit des valeurs propres et que $\det A > 0$ donc si A n'est pas définie positive alors il existe un nombre pair $\geqslant 2$ de valeurs propres strictement négatives. A étant diagonalisable, on en déduit l'existence de deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à deux de ces valeurs propres.

b) On peut choisir ces deux vecteurs propres orthogonaux (c'est en particulier automatique si les valeurs propres sont distinctes) et de dernière composante égale à 1.

En effet, la dernière composante d'un vecteur Y du **a)** ne peut être nulle, sinon on aurait

$$ {}^t\widetilde{Y}A^{(n)}\widetilde{Y} = {}^t YAY < 0 $$

avec $Y = \binom{\widetilde{Y}}{0}$ ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ soit définie positive et donc on peut alors multiplier les vecteurs par un coefficient non nul adapté.

On dispose alors de X_1 et X_2 vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, orthogonaux, de dernière composante égale à 1.

Soit $X = X_1 - X_2$. La dernière composante de X est nulle et

$$ {}^tXAX = \lambda_1 \left\|X_1\right\|^2 + \lambda_2 \left\|X_2\right\|^2 < 0. $$

c) Il vient ${}^t\widetilde{X}A^{(n)}\widetilde{X} = {}^t XAX < 0$, en notant $\widetilde{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne X où l'on a supprimé le dernier coefficient.

Ceci contredit la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ d'où l'absurdité.

I.C

$\Leftarrow$ est fausse avec le contre-exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En revanche, le sens direct est vrai (non demandé dans l'énoncé).
On le montre en considérant les matrices définies positives $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$ pour $\varepsilon > 0$ puis en faisant tendre ε vers 0.

I.D

En Maple :

```
with(LinearAlgebra):
defpos:=proc(A,n)
 local i;
 i:=1;
 while i<=n and Determinant(SubMatrix(A,[1..i],[1..i]))>0
 do i:=i+1 od;
 evalb(i=n+1) end:

A:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[1,10,0],[1,0,4]]):

defpos(A,3);
                                   true

A:=Matrix(2,2,[[1,0],[0,-2]]):

defpos(A,2);

                                  false
```

II.A

Aucune difficulté.

II.B

P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(n)}$ est de degré n.
En utilisant la formule de Leibniz, on calcule

$$P_n^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^n)^{(k)}_{|X=1} ((X-1)^n)^{(n-k)}_{|X=1} = \binom{n}{n} (X^n)^{(n)}_{|X=1} = n!.$$

II.C

Notons que $L_n(1) = 1$.
Par intégrations par parties successives, le terme entre crochet ayant toujours 0 et 1 comme racines, on obtient facilement,

$$\begin{aligned} &< Q, P_n^{(n)} >= - < Q', P_n^{(n-1)} >= \cdots = (-1)^n < Q^{(n)}, P_n > \\ &= (-1)^n < 0, P_n >= 0 \text{ car } \deg Q < n. \end{aligned}$$

II.D

II.D.1) En posant $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 X^p (X-1)^q \mathrm{d}X$. On a par intégration par parties pour $q \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$J_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p+1,q-1}$$

II.D.2) Calculons,

$$\begin{aligned} < L_n, L_n > &= \frac{1}{(n!)^2} < P_n^{(n)}, P_n^{(n)} > \\ &= \frac{(-1)^n}{(n!)^2} < P_n, P_n^{(2n)} > \text{ (comme en } \mathbf{II.C}) \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} < P_n, 1 > \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} I_n = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

II.E

$K_n = \sqrt{2n+1}\, L_n$ convient clairement.
On peut justifier l'unicité en expliquant que K_n doit être un vecteur directeur unitaire de la droite supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Il n'existe que deux tels vecteurs, l'hypothèse du coefficient dominant strictement positif (K_n est de degré n de manière évidente) assure alors l'unicité de K_n.

II.F

On trouve $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}\,(2\,X - 1)$, $K_2 = \sqrt{5}\left(1 + 6\,X^2 - 6\,X\right)$.

III A

III.A.1) $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\det H_2 = \dfrac{1}{12} \neq 0$, donc H_2 est inversible et $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $\det H_3 = \dfrac{1}{2160} = \dfrac{1}{12 \times 180} \neq 0$,

donc H_3 est inversible et $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$.

III.A.2) En soustrayant la dernière colonne à toutes les autres, le terme (i,j) devient $\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}$ pour $j \leqslant n$. On factorise alors $\frac{1}{i+n}$ sur chaque ligne i allant de 1 à $n+1$, puis $n-j+1$ sur chaque colonne j variant de 1 à n, ce qui donne $\Delta_{n+1} = \dfrac{n!}{(n+1)\cdots(2n+1)} \det M$, où $M = (M_{i,j})$ avec $M_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et la dernière colonne de M est remplie de 1. On soustrait alors la dernière ligne de M à toutes les autres. Pour $j \leqslant n$ et $i \leqslant n$, le terme (i,j) devient encore $\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}$. La colonne $n+1$ est nulle sauf le terme d'indice $(n+1, n+1)$ égal à 1. On factorise les mêmes termes qu'au-dessus mais cette fois pour les lignes d'indice i allant de 1 à n et les colonnes d'indice j allant de 1 à n. Par développement selon la dernière colonne, il vient $\Delta_{n+1} = \dfrac{n!}{(n+1)\cdots(2n+1)} \dfrac{n!}{(n+1)\cdots(2n)} \Delta_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!} \Delta_n$.

III.A.3) Comme $\Delta_1 = 1$, on obtient en multipliant les relations précédentes

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (i!)^4}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i)! \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)!} = \frac{c_n^4}{\prod_{i=1}^{2n-1} i!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

III.A.4) D'après le calcul précédent, $\det H_n \neq 0$ donc H_n est inversible. En isolant un terme $(2i+1)$ dans le produit, $\det H_n^{-1} = \dfrac{1}{\det H_n} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{(2i)!}{(i!)^2} \right)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \binom{2i}{i} \right)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)$: il s'agit bien d'un entier naturel.

III.A.5) Comme H_n est réelle symétrique de taille $n \times n$, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres avec n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité). On observe que $\Delta_i = \det H_n^{(i)}$ pour i allant de 1 à n. D'après A.3, ce déterminant est toujours strictement positif, donc par la partie I, H_n est définie positive, donc (d'après I.A.2) les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

III B

III.B.1) On pose $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie $(n+1)$ de E, on a $E = \mathbb{R}_n[X] \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}_n[X]^\perp$, donc si on décompose f en $\Pi_n + h$ dans cette somme directe, alors pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|Q - f\|^2 = \|Q - \Pi_n\|^2 + \|h\|^2 \geqslant \|Q - \Pi_n\|^2$ avec égalité si et seulement si $Q = \Pi_n$, donc Π_n est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|\Pi_n - f\| = \min_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$.

III.B.2) Comme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$, a fortiori $\Pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $\|\Pi_{n+1} - f\| = \min_{Q\in\mathbb{R}_{n+1}[X]} \|Q - f\| \leqslant \|\Pi_n - f\|$, donc la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0;1]$, et comme $\|\ \| \leqslant \|_{\|}\infty$, cette suite converge aussi vers f pour la norme $\|\ \|$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\| \leqslant \varepsilon$.

En notant $n_0 = \deg P$, on en déduit $\|\Pi_{n_0} - f\| \leqslant \varepsilon$, donc compte tenu de la décroissance de la suite, $\lim_{n\to\infty} \|\Pi_n - f\| = 0$.

III.B.3) Pour i et j entre 1 et n, $\left\langle X^{i-1}, X^{j-1}\right\rangle = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \frac{1}{i+j-1}$. Dans la base canonique $(X^{i-1})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, la matrice du produit scalaire étudié restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est bien égale à H_n.

III.B.4) Le polynôme Π_n s'écrivant $\sum_{j=0}^n a_j X^j$ est caractérisé par le fait que $\Pi_n - f \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$, c'est-à-dire $\left\langle \Pi_n - f, X^i\right\rangle = 0$ pour i variant de 0 à n, autrement dit $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{i+j-1} = \left\langle f, X^{i-1}\right\rangle$ pour i variant de 1 à $n+1$. En notant V le vecteur ${}^t(a_0,\dots,a_n)$, on obtient $H_{n+1}V = {}^t(\langle f,1\rangle,\dots,\langle f,X^n\rangle)$, d'où $V = H_{n+1}^{-1}\,{}^t(\langle f, X^i\rangle)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

III.B.5) On pose $\Pi_2 = aX^2 + bX + c$ et on applique la question précédente.

$\langle f,1\rangle = \dfrac{\pi}{4}$, $\quad \langle f,X\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{\ln 2}{2}$, $\quad \left\langle f,X^2\right\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 1 - \frac{\pi}{4}$.

${}^t(c,b,a) = H_3^{-1}\,{}^t(\langle f,1\rangle, \langle f,X\rangle, \left\langle f,X^2\right\rangle)$. Avec le calcul fait au III.A, on obtient :

$$c = 30 - 21\frac{\pi}{4} - 18\ln 2,\quad b = -180 + 36\pi + 96\ln 2,\quad a = 180 - 75\frac{\pi}{2} - 90\ln 2\,.$$

IV A

IV.A.1) $s_1 = 1$, $s_2 = 4 - 6 - 6 + 12 = 4$, $s_3 = 9$. On peut conjecturer que $s_n = n^2$.

IV.A.2) **a)** Le système s'écrit $H_n\,{}^t(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{n-1}^{(n)}) = {}^t(1,1,\dots,1)$. Il admet une solution unique car H_n est inversible.

b) La solution s'écrit ${}^t(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{n-1}^{(n)}) = H_n^{-1}\,{}^t(1,1,\dots,1)$; autrement dit, pour p allant de 0 à $n-1$, $a_p^{(n)}$ est la somme des éléments de la ligne $p+1$ de H_n^{-1}, donc en sommant ces valeurs, on obtient que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$.

IV.A.3) $\langle S_n, Q\rangle = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \langle S_n, X^p\rangle$, or $\langle S_n, X^p\rangle = \dfrac{a_0^{(n)}}{p+1} + \dfrac{a_1^{(n)}}{p+2} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{p+n} = 1$ d'après le système du a), donc $\langle S_n, Q\rangle = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$.

IV.A.4) En prenant $Q = S_n$ dans la formule précédente, on obtient d'après 2.b) que $s_n = \langle S_n, S_n\rangle$.

Comme $(K_0, \ldots, K_{n-1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a également $\langle S_n, S_n\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p\rangle^2$.

D'autre part, la formule précédente s'écrit aussi $\langle S_n, Q\rangle = Q(1)$, d'où $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(1)^2$.

IV.A.5) Comme $K_p = \sqrt{2p+1}\, L_p$ et $L_p(1) = 1$, il vient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

IV.A.6) Les deux questions précédentes fournissent $s_n = \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1) = n(n-1) + n = n^2$.

IV B

IV.B.1) Par triangle de Pascal, $\binom{2p}{p} = \binom{2p-1}{p} + \binom{2p-1}{p-1} = 2\binom{2p-1}{p}$ donc est un entier pair.

$\binom{n+p}{p}\binom{n}{p} = \dfrac{(n+p)!}{n!\,p!}\dfrac{n!}{p!\,p!} = \dfrac{(n+p)!}{(n-p)!\,(2p)!}\dfrac{(2p)!}{p!\,p!} = \binom{2p}{p}\binom{n+p}{2p}$.

D'après ce qui précède, on obtient bien un nombre pair.

IV.B.2) D'après la partie II, $K_n = \sqrt{2n+1}\, L_n$ avec $L_n = ((X^2-X)^n)^{(n)}$.

Or $(X^2-X)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^{n-p}X^{n+p}$, et la dérivée n-ième de X^{n+p} est $\binom{n+p}{p}X^p$, donc $\Lambda_n = L_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}(-1)^{n-p}X^p$. Il s'agit bien d'un polynôme à coefficients entiers, de terme constant égal à $(-1)^n$, et dont tous les coefficients de degré compris entre 1 et n sont pairs d'après la question précédente.

IV.B.3) a) et b) Par analogie avec la question IV.A, on pose $S_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} h_{i,j}^{(-1,n)}X^{i-1}$.

Comme $H_n{}^t(h_{1,j}^{(-1,n)}, \ldots, h_{n,j}^{(-1,n)}) = E_j$ (j-ème vecteur colonne de la base canonique), on obtient avec les notations du IV.A et la même méthode la relation $(*)$: $\langle S_{n,j}, Q\rangle = \alpha_{j-1}$.
En particulier, $\langle S_{n,j}, K_p\rangle = K_{p,j-1}$ (coefficient de degré $j-1$ de K_p), d'où, puisque $(K_0, \ldots, K_{n-1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $S_{n,j} = \sum_{p=0}^{n-1} K_{p,j-1}K_p$.

D'après $(*)$, on a $\langle S_{n,j}, S_{n,i}\rangle = h_{j,i}^{(-1,n)} = h_{i,j}^{(-1,n)}$. D'autre part, en décomposant dans la base orthonormée $(K_0, \ldots, K_{n-1})$, on obtient $\langle S_{n,j}, S_{n,i}\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} K_{p,j-1}K_{p,i-1}$.

D'après B.2, $K_{p,i-1} = \sqrt{2p+1}\,(-1)^{p-i+1}\binom{p+i-1}{i-1}\binom{p}{i-1}$ si $p \geqslant i-1$, et $K_{p,i-1} = 0$ si $p < i-1$.

On en déduit $h_{i,j}^{(-1,n)} = (-1)^{i+j} \sum_{p=\max(i-1,j-1)}^{n-1} (2p+1)\binom{p+i-1}{i-1}\binom{p}{i-1}\binom{p+j-1}{j-1}\binom{p}{j-1}$.

Il s'agit donc d'un entier.

En particulier, on trouve $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n+1)\binom{2n-2}{n-1}^2$ et $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1) = n^2$.

c) D'après B.1, pour $p \geqslant i-1$, $\binom{p+i-1}{i-1}\binom{p}{i-1}$ est pair, donc pour i et $j \geqslant 2$ et $p \geqslant i-1$ et $j-1$, le produit $\binom{p+i-1}{i-1}\binom{p}{i-1}\binom{p+j-1}{j-1}\binom{p}{j-1}$ est multiple de 4. L'expression de $h_{i,j}^{(-1,n)}$ trouvée à la question précédente montre alors que c'est un entier multiple de 4.