

I. Oscillations d'un système linéaire

- Q 1. Si $A.x = 0$ alors $\langle A.x; x \rangle = 0$ or $\langle A.x; x \rangle > 0$ pour x non nul. On doit donc avoir $x = 0$ d'où $\ker(A) = \{0\}$ c'est-à-dire A est injective donc inversible.

- Q 2. $\langle A^{-1}.x; y \rangle = \langle A^{-1}.x; A.A^{-1}.y \rangle = \langle A.A^{-1}.x; A^{-1}.y \rangle = \langle x; A^{-1}.y \rangle$.

L'endomorphisme associé à A^{-1} est ainsi symétrique pour le produit scalaire canonique donc sa matrice, A , dans la base canonique, qui est orthonormée, est symétrique.

- Q 3. $(x; y)_A = \langle A.x; y \rangle = \langle x; A.y \rangle = \langle A.y; x \rangle = (y; x)_A : (.;.)_A$ est symétrique.

Comme le produit est trivialement linéaire à droite c'est donc une forme bilinéaire symétrique.

$$\begin{aligned} (E(x); y)_A &= (A^{-1}.K.x; y)_A = \langle A.A^{-1}.K.x; y \rangle = \langle K.x; y \rangle = \langle x; K.y \rangle \\ &= \langle K.y; x \rangle = \langle A.A^{-1}.K.y; x \rangle = (A^{-1}.K.y; x)_A \\ &= (E(y); x)_A = (x; E(y))_A \end{aligned}$$

- Q 4. Ainsi E est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $(.;.)_A$. Il existe donc une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (orthonormée pour ce produit scalaire) telle que $E(e_i) = \lambda_i e_i$ c'est-à-dire $A^{-1}.K.e_i = \lambda_i e_i$.

De plus $(E(e_i); e_i)_A = (\lambda_i e_i; e_i)_A = \lambda_i (e_i; e_i)_A = \lambda_i N_A(e_i)^2$ où N_A est la norme associée au produit scalaire $(.;.)_A$ et on a vu que

$$(E(e_i); e_i)_A = \langle K.e_i; e_i \rangle \text{ avec } \langle K.e_i; e_i \rangle > 0 \text{ par hypothèse.}$$

$$\text{Ainsi on doit avoir } \lambda_i = \frac{\langle K.e_i; e_i \rangle}{N_A(e_i)^2} > 0 \text{ pour tout } i.$$

- Q 5. Le système (1) est équivalent à $x''(t) = -A^{-1}.K.x(t) = -E(x(t))$.

Si on décompose $x(t)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ définie ci-dessus,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n u_i(t) e_i, \text{ le système s'écrit } \sum_{i=1}^n u_i''(t) e_i = - \sum_{i=1}^n u_i(t) E(e_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n u_i(t) \lambda_i e_i. \end{aligned}$$

En identifiant les composantes on en déduit que (1) est équivalent aux n équations scalaires $u_i''(t) = -\lambda_i u_i(t)$, i variant entre 1 et n .

Comme on a $\lambda_i > 0$ les solutions de $u_i''(t) = -\lambda_i u_i(t)$ sont les fonctions $a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i})$ donc les solutions de (1) sont les fonctions telles qu'il existe $2n$ scalaires $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ avec

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}).$$

□ Q 6. C'est une question de cours.

Comme $(.;.)_A$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie la dérivée de $t \mapsto (x(t); y(t))_A$ est $(x'(t); y(t))_A + (x(t); y'(t))_A$ d'où le résultat

$$\frac{d}{dt} \langle A.x(t); y(t) \rangle = \langle A.x'(t); y(t) \rangle + \langle A.x(t); y'(t) \rangle.$$

□ Q 7. $T(x')$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec, en utilisant la question ci-dessus,

$$\begin{aligned} \frac{dT(x')}{dt}(t) &= \frac{1}{2} \langle A.x''(t); x'(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle A.x'(t); x''(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle A.x''(t); x'(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x'(t); A.x''(t) \rangle \\ &= \langle A.x''(t); x'(t) \rangle = -\langle K.x(t); x'(t) \rangle \end{aligned}$$

La question ci-dessus reste valide pour la dérivée de $\langle K.x(t); y(t) \rangle$ donc, avec les mêmes calculs, $\frac{d}{dt} \langle K.x(t); x(t) \rangle = \langle K.x(t); x'(t) \rangle$.

On a donc $\frac{dT(x') + U(x)}{dt}(t) = 0$ on en déduit que la fonction $t \mapsto (T(x') + U(x))(t)$ est constante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

II. Résultats intermédiaires

□ Q 8. Le changement de variable $u = \cos(t)$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \sin(t) dt &= \int_1^{-1} \left(\frac{1+u}{2} \right)^k (-du) = \left[\frac{(1+u)^{k+1}}{2^k(k+1)} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

En raison de la périodicité et de la parité on a

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt = \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt = 2 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt$$

De plus $0 \leq \sin(t) \leq 1$ pour $t \in [0; 1]$ donc

$$\begin{aligned} 1 &= c_k \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt = 2c_k \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt \\ &\geq 2c_k \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \sin(t) dt = \frac{4c_k}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi $c_k \leq \frac{k+1}{4}$.

□ Q 9. Pour $t \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$ on a $-1 \leq \cos(t) \leq \cos(\varepsilon)$ donc

$$R_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \leq \frac{k+1}{4} \left(\frac{1 + \cos(\varepsilon)}{2} \right)^k$$

d'où $d_k(\varepsilon) \leq \frac{k+1}{4} \left(\frac{1 + \cos(\varepsilon)}{2} \right)^k$.

Comme on a $0 \leq \left(\frac{1 + \cos(\varepsilon)}{2} \right)^k < 1$ on en déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k(\varepsilon) = 0$.

□ Q 10. Le changement de variable $t_1 = u - t$ et la périodicité donnent

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt &= \int_u^{u-2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)(-dt_1) \\ &= \int_{u-2\pi}^u R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1 = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \delta_k(u) &= \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u) \\ &= \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt - h(u) \int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1 \\ &= \int_0^{2\pi} R_k(t_1)(h(u-t_1) - h(u))dt_1 \end{aligned}$$

- avec $|h(u-t_1) - h(u)| \leq \|h'\| |t_1| \leq \|h'\| \varepsilon$ pour $t_1 \in [0; \varepsilon]$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis
- $|h(u-t_1) - h(u)| \leq 2\|h\|$ pour $t_1 \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$
- $|h(u-t_1) - h(u)| = |h(u-t_1+2\pi) - h(u)| \leq \|h'\| |2\pi - t_1| \leq \|h'\| \varepsilon$ pour $t_1 \in [2\pi - \varepsilon; 2\pi]$

Donc, en posant $\rho_{k,u}(t_1) = R_k(t_1)|h(u - t_1) - h(u)|$,

$$\begin{aligned} |\delta_k(u)| &\leq \int_0^\varepsilon \rho_{k,u}(t_1) dt_1 + \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \rho_{k,u}(t_1) dt_1 + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \rho_{k,u}(t_1) dt_1 \\ &\leq \int_0^\varepsilon R_k(t_1) \|h'\| \varepsilon dt_1 + \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} d_k(\varepsilon) 2 \|h\| dt_1 + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1) \|h'\| \varepsilon dt_1 \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(t_1) \|h'\| \varepsilon dt_1 + \int_0^{2\pi} d_k(\varepsilon) 2 \|h\| dt_1 = \|h'\| \varepsilon + 2\pi d_k(\varepsilon) 2 \|h\| \end{aligned}$$

III. Un théorème ergodique

□ Q 11. Par la question I, on sait déjà que $x(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i})$.

Si $a_i = b_i = 0$, il suffit de poser $c_i = 0$ et choisir arbitrairement φ_i .

Si $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$, soit $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ et φ_i défini par

$$\cos(\varphi_i) = \frac{a_i}{c_i} \quad \sin(\varphi_i) = \frac{-b_i}{c_i}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}) &= c_i \left(\cos(t\sqrt{\lambda_i}) \cos(\varphi_i) - \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(\varphi_i) \right) \\ &= c_i \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i) \end{aligned}$$

ce qui correspond au résultat.

□ Q 12. Soit (θ_1, θ_2) un élément de $\mathbb{R}^2$. Soit k_i la partie entière de $\frac{\theta_i}{2\pi}$. Comme $\alpha_i = \theta_i - 2k_i\pi \in [0, 2\pi]$ et que $f(\theta_1, \theta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2)$, on obtient que $f(\mathbb{R}^2) = f(K)$ où K est le compact $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. f étant continue, l'image du compact K est bornée et les bornes sont atteintes; ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}^k$ et son maximum est atteint sur K .

□ Q 13. Le terme de droite de l'inégalité est:

$$d = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_1 j} d\theta_1 \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_2 \ell} d\theta_2 \right)$$

Si j (resp ℓ) est non nul, la première (resp deuxième) intégrale est nulle; ainsi le terme de droite est nul si $(j, \ell) \neq (0, 0)$ et vaut 1 si $j = \ell = 0$.

◇ $j = \ell = 0$: la fonction f est constante et vaut 1. Ainsi pour tout T :

$$\int_0^T f \circ \theta(t) dt = 1$$

ce qui permet de vérifier le théorème ergodique dans ce cas précis.

◇ $(j, \ell) \neq (0, 0)$: On vérifie par contraposition que $j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2}$ est non nul. Si cette quantité est nulle, j et ℓ sont simultanément non nuls, d'où:

$$j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2} = 0 \implies \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} = -\frac{j}{\ell} \in \mathbb{Q}$$

comme par hypothèse, $\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}$ n'est pas un rationnel, $j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \theta(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(j(t\sqrt{\lambda_1} + \varphi_1) + \ell(t\sqrt{\lambda_2} + \varphi_2))} dt \\ &= \frac{e^{i(j\varphi_1 + \ell\varphi_2)}}{T} \int_0^T e^{i(j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2})t} dt \\ &= \frac{e^{i(j\varphi_1 + \ell\varphi_2)}}{Ti(j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2})} \underbrace{\left(e^{i(j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2})T} - 1 \right)}_{\text{de module borné par 2}} = \frac{g(T)}{T} \end{aligned}$$

où g est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \theta(t) dt = 0 = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_1 j} d\theta_1 \int_0^{2\pi} e^{i\theta_2 \ell} d\theta_2$$

ce qui prouve le théorème ergodique dans ce second cas.

□ Q 14. Par définition de R_k , en utilisant les exponentielles complexes, on obtient:

$$R_k(u - \theta_1) = \frac{c_k}{2^k} \left(2 + e^{iu} e^{-i\theta_1} + e^{-iu} e^{i\theta_1} \right)^k$$

En développant cette expression, on obtient un polynôme trigonométrique en e^{iu} de degré au plus k soit:

$$R_k(u - \theta_1) = \sum_{j=-k}^k e^{iju} \alpha_j(\theta_1)$$

où chaque $\alpha_j(\theta_1)$ est un polynôme trigonométrique en $e^{i\theta_1}$. De même $R_k(v - \theta_k) = \sum_{j=-\ell}^{\ell} e^{i\ell v} \alpha_\ell(\theta_2)$. Par linéarité des intégrales, on obtient alors après produit que:

$$f_k(u, v) = \sum_{-k \leq j, \ell \leq k} e^{iju} e^{i\ell v} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_j(\theta_1) \alpha_\ell(\theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right)}_{a_{j,\ell}}$$

Soit $\Phi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$.

L'application Φ est linéaire (l'intégration sur un segment et le passage à la limite sont des opérations linéaires). Comme f_k est une combinaison linéaire de fonctions étudiées dans la question précédente pour lesquelles ϕ s'annule, il en est de même de f_k : f_k vérifie donc le théorème ergodique.

□ Q 15. Par parité de la fonction R_k , on a

$$\int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) d\theta_1 = \int_0^{2\pi} R_k(\theta_1 - u) d\theta_1 = \int_u^{2\pi+u} R_k(t) dt$$

puis par périodicité de la fonction R_k

$$\int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) d\theta_1 = \int_0^{2\pi} R_k(t) dt = 1$$

Ainsi:

$$f(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(u, v) d\theta_1 d\theta_2.$$

En écrivant $f(\theta_1, \theta_2) - f(u, v) = f(\theta_1, \theta_2) - f(u, \theta_2) + f(u, \theta_2) - f(u, v)$, on obtient:

$$f_k(u, v) - f(u, v) = J_1 + J_2$$

avec

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) (f(\theta_1, \theta_2) - f(u, \theta_2)) d\theta_1 d\theta_2$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) (f(u, \theta_2) - f(u, v)) d\theta_1 d\theta_2.$$

Par utilisation de la définition de l'intégrale double donnée dans l'énoncé , on peut écrire :

$$J_1 = \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) (f(\theta_1, \theta_2) - f(u, \theta_2)) d\theta_1 \right)}_{A(\theta_2)} d\theta_2$$

On remarque alors que $A(\theta_2) = \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2)$.

En appliquant la question 10 à la fonction $h(u) = f(u, \theta_2)$, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme application partielle de f qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, on a la majoration suivante:

$$|A(\theta_2)| \leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon).$$

Par inégalité de la moyenne , on a alors:

$$|J_1| \leq \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \left(2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \right) d\theta_2 = 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

De même:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) (f(u, \theta_2) - f(u, v)) \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) (f(u, \theta_2) - f(u, v)) d\theta_2 = \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 - f(u, v). \end{aligned}$$

En appliquant une nouvelle fois la question 10 à la fonction $h(v) = f(u, v)$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme application partielle de f), on obtient:

$$|J_2| \leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

En sommant les deux inégalités et par utilisation de l'inégalité triangulaire, on obtient bien que:

$$|f_k(u, v) - f(u, v)| \leq 2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

- Q 16. Par la question 9, on peut affirmer qu'à ε fixé, il existe un nombre k tel que $d_k(\varepsilon) \leq \varepsilon$. On choisit un tel nombre k . Par la question 14 et la définition de la limite, on peut affirmer qu'il existe T_0 tel que

$$T \geq T_0 \implies \left| \frac{1}{T} \int_0^T f_k \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

Pour majorer l'expression $\Delta = \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$, on écrit ce nombre comme somme de trois nombres en comparant à la même expression pour f_k soit $\Delta = \sum_{i=1}^3 \Delta_i$ avec :

$$\Delta_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (f - f_k) \circ \theta(t) dt$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{T} \int_0^T f_k \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

$$\Delta_3 = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_k(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2)) d\theta_1 d\theta_2.$$

Par inégalité de la moyenne:

$$|\Delta_1| \leq \|f - f_k\| \quad \text{et} \quad |\Delta_3| \leq \|f - f_k\|$$

Par la question précédente, compte-tenu du choix de k $\|f - f_k\| \leq M\varepsilon$. Ainsi on trouve:

$$T > T_0 \implies |\Delta| \leq (2M + 1)\varepsilon$$

ce qui prouve que f vérifie le théorème ergodique.

- Q 17. On commence par vérifier que $\Phi_{a,b}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$: le seul problème est en a ou b . Cette fonction est nulle sur $[0, a]$ et sur $[b, 2\pi]$: elle est continue à gauche de a et à droite de b et de dérivée nulle. Sur $[a, b]$, $\Phi_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et cette fonction et sa dérivée s'annulent en a et b . Ainsi $\Phi_{a,b}$ est continue en a et b et y a même dérivée à droite et à gauche. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$, $[a, b]$ et sur $[b, 2\pi]$, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$. Etant nulle à gauche (par périodicité) et à droite de 0 , elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit Ω un ouvert non vide de $] -1, 1[^2$. Par le rappel, cet ouvert non vide contient un pavé ouvert P de la forme $] \cos b, \cos a[\times] \cos c, \cos d[$ où $0 < a < b < \pi$ et $0 < c < d < \pi$.

Posons $\Phi : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \Phi_{a,b}(\theta_1)\Phi_{c,d}(\theta_2)$; . Compte-tenu de l'étude faite précédemment, $\Phi \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Comme $\theta(t)$ est élément de K , on remarque que

$$\Phi(\theta(t)) \neq 0 \iff (\theta_1, \theta_2) \in P$$

Si $x(t)$ n'est jamais élément de Ω , alors $\forall t, \Phi(\theta(t)) = 0$ et le terme de gauche de l'égalité (4) est nul. Soit d le terme de droite de cette égalité. On a alors:

$$\begin{aligned} d &= (2\pi)^{-2} \int_K \Phi(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= (2\pi)^{-2} \int_a^b \sin^2 \left(\frac{\pi}{b-a}(\theta_1 - a) \right) d\theta_1 \int_c^d \sin^2 \left(\frac{\pi}{d-c}(\theta_2 - c) \right) d\theta_2 > 0 \end{aligned}$$

La fonction Φ ne vérifie pas le théorème ergodique ce qui est en contradiction avec la question précédente, ainsi il a été démontré par l'absurde qu'il existe un nombre t tel que $x(t) \in \Omega$.