

Dans la partie I, on démontre le théorème de Stone-Weierstrass au moyen des polynômes de Bernstein. Dans la partie II, on établit deux résultats techniques (calcul d'intégrales et analyticité d'un taux d'accroissement de fonction analytique) pour aboutir, dans la partie III, à une démonstration abrégée du théorème de Müntz (généralisation du théorème de Stone- Weierstrass) relatif à la densité de fonctions puissances.

Dans tout le problème, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ pour tout $f \in E$ où $E = C^0([0,1], \mathbf{R})$.

Partie I

1)

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $B_n(f)$ le polynôme de Bernstein de f défini par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

a)

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $\varphi(t) = (xe^t + 1 - x)^n$ alors

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j (1-x)^{n-j} e^{jt}, \quad \varphi'(t) = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j (1-x)^{n-j} j e^{jt}, \quad \varphi''(t) = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j (1-x)^{n-j} j^2 e^{jt}.$$

En notant u, v, w les fonctions définies sur $[0,1]$ par $u(x) = 1, v(x) = x$ et $w(x) = x^2$, on peut écrire

$$\varphi(0) = B_n(u)(x), \quad \varphi'(0) = nB_n(v)(x), \quad \varphi''(0) = n^2 B_n(w)(x).$$

Un calcul direct donne

$$\varphi'(t) = n(xe^t + 1 - x)^{n-1} x e^t \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \varphi'(t) + n(n-1)(xe^t + 1 - x)^{n-2} x^2 e^{2t}.$$

Il en résulte que $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = nx, \varphi''(0) = nx + n(n-1)x^2$.

On en déduit alors les polynômes de Bernstein de u, v et w :

$$B_n(u) = u, \quad B_n(v) = v, \quad B_n(w) = \frac{v}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)w.$$

b)

La convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(B_n(w))$ vers w résulte de

$$\|w - B_n(w)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

2)

a)

Soit A un endomorphisme positif de E et $f \in E$ alors

$$\begin{cases} \theta \leq |f| - f \\ \theta \leq |f| + f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A(\theta) \leq A(|f|) - A(f) \\ 0 = A(\theta) \leq A(|f|) + A(f) \end{cases} \Rightarrow |A(f)| \leq A(|f|).$$

b)

D'après le théorème de Heine, toute fonction $f \in E$ est uniformément continue sur $[0,1]$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in [0,1] \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Choisissons un réel α tel que $\alpha > \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$, alors

$$\forall x, y \in [0, 1] \quad |x - y| > \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2 \|f\|_{\infty} \leq \alpha \eta^2 \leq \alpha(x - y)^2.$$

En regroupant les deux résultats, on obtient

$$\forall f \in E \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad |f(x) - f(y)| \leq \epsilon + \alpha(x - y)^2. \quad (1)$$

c)

En appliquant un endomorphisme positif A de E aux diverses fonctions en x de la relation (1), on obtient successivement, avec le résultat de **2)a)**

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, 1] \quad A(|f - f(y)u|) &\leq \epsilon A(u) + \alpha A(w - 2yv + y^2u) = \epsilon A(u) + \alpha(A(w) - 2yA(v) + y^2A(u)), \\ \forall y \in [0, 1] \quad |A(f) - f(y)A(u)| &\leq \epsilon A(u) + \alpha(A(w) - 2yA(v) + y^2A(u)). \end{aligned} \quad (2)$$

3)

a)

On pose $\forall n \in \mathbf{N} \quad \varphi_n = A_n(w) - 2vA_n(v) + wA_n(u)$. De l'égalité $\theta = w - 2vv + wu$, il vient

$$\varphi_n - \theta = (A_n(w) - w) - 2v(A_n(v) - v) + w(A_n(u) - u).$$

Les suites $(A_n(u)), (A_n(v)), (A_n(w))$ convergent uniformément sur $[0, 1]$ respectivement vers u, v, w et les fonctions v et w sont bornées sur $[0, 1]$. Il en résulte que la suite (φ_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers θ .

b)

On exclut le cas trivial $f = \theta$. En appliquant (2) au point y avec A_n , on obtient

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, 1] \quad |A_n(f)(y) - f(y)A_n(u)(y)| \\ \leq \epsilon A_n(u)(y) + \alpha(A_n(w)(y) - 2yA_n(v)(y) + y^2A_n(u)(y)) = \epsilon A_n(u)(y) + \alpha \varphi_n(y). \end{aligned}$$

Une inégalité triangulaire, en sachant que $f(y) = f(y)u(y)$, donne

$$|A_n(f)(y) - f(y)| \leq |A_n(f)(y) - f(y)A_n(u)(y)| + |f(y)||A_n(u)(y) - u(y)|.$$

donc

$$\forall y \in [0, 1] \quad |A_n(f)(y) - f(y)| \leq \epsilon A_n(u)(y) + \alpha \varphi_n(y) + |f(y)||A_n(u)(y) - u(y)|.$$

donc

$$\|A_n(f) - f\|_{\infty} \leq \epsilon \|A_n(u)\|_{\infty} + \alpha \|\varphi_n\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \|A_n(u) - u\|_{\infty}.$$

Etablissons alors que la suite $(A_n(f))$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

La suite convergente $(A_n(u))$ est bornée, notons $M = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|A_n(u)\|_{\infty}$.

Soit $\epsilon_1 > 0$. Pour $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{3M}$, il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait (1) et (2).

D'après **3)a)**, pour $\frac{\epsilon_1}{3\alpha}$, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_1 \quad \|\varphi_n\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon_1}{3\alpha}$.

D'après l'hypothèse (ii), pour $\frac{\epsilon_1}{3\|f\|_{\infty}}$ il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_2 \quad \|A_n(u) - u\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon_1}{3\|f\|_{\infty}}$.

On en déduit la relation suivante qui permet de conclure

$$\forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad (n_0 = \max(n_1, n_2)) \quad \forall n \geq n_0 \quad \|A_n(f) - f\|_{\infty} \leq \epsilon_1.$$

4)

Il est clair que B_n est un endomorphisme positif de E . D'après **1)b)** et les égalités $B_n(u) = u$ et $B_n(v) = v$, il possède la propriété (ii). Alors, d'après la question **3)**, la suite de polynômes $(B_n(f))$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

1)

Pour $a \in \mathbf{R}$ tel que $|a| \neq 1$, la propriété, $\forall x \in [0, \pi] \Rightarrow 1 - 2a \cos x + a^2 > 0$, permet de considérer l'intégrale de Riemann

$$I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

a)

Avec le changement de variable $x \rightarrow \pi - x$ et un calcul direct, on obtient successivement

$$I(-a) = I(a), \quad I\left(\frac{1}{a}\right) = I(a) - 2\pi \ln |a|.$$

Avec le changement de variable $x \rightarrow 2x$ dans $I(a) + I(-a)$, on obtient

$$I(a) + I(-a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos 2x + a^4) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx.$$

Avec le changement de variable $x \rightarrow 2\pi - x$, on établit que

$$\int_\pi^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx = \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx.$$

Il en résulte que $2I(a) = I(a^2)$.

b)

A l'aide de ce dernier résultat, on a l'égalité $I(a) = \frac{1}{2^n} I(a^{2^n})$ vérifiée pour $n = 1$ et on établit que si elle est vérifiée pour n alors elle vérifiée pour $n + 1$. Il en résulte, par récurrence sur n , que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad I(a) = \frac{1}{2^n} I(a^{2^n}).$$

c)

La continuité sur $(\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}) \times [0, \pi]$ de la fonction $(a, x) \rightarrow \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ entraîne la continuité de la fonction I sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(a^{2^n}) = I(0) = 0$. Il en résulte, d'après b), que $I(a) = 0$.

Si $|a| > 1$ alors $I\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. Il en résulte, d'après a), que $I(a) = 2\pi \ln |a|$.

d)

Pour deux réels λ et μ tels que $\lambda > 0$ et $|\mu| \neq \lambda$, on note $J(\lambda, \mu) = \int_0^{2\pi} \ln |\mu - \lambda e^{i\theta}| d\theta$.

En partant de $J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln |\mu - \lambda e^{i\theta}|^2 d\theta$, on établit les égalités suivantes

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(\lambda^2 - 2\mu\lambda \cos \theta + \mu^2) d\theta = 2\pi \ln \lambda + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\frac{\mu}{\lambda} \cos \theta + (\frac{\mu}{\lambda})^2) d\theta = 2\pi \ln \lambda + I\left(\frac{\mu}{\lambda}\right).$$

On en déduit, d'après c), que

$$J(\lambda, \mu) = \begin{cases} 2\pi \ln \lambda & \text{si } |\mu| < \lambda \\ 2\pi \ln |\mu| & \text{si } |\mu| > \lambda \end{cases}.$$

2)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence R_f au moins égal à $R > 0$, s'annulant en x_0 un réel non nul tel que $|x_0| < R$.

a)

La fonction g est égale au produit de f par la fonction $z \rightarrow \frac{1}{z - x_0}$ qui admet un développement en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence $|x_0|$.

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |z| < |x_0| \quad \frac{1}{z - x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{x_0^{n+1}} z^n$$

Il en résulte que g admet un développement en série entière $S(z)$ au voisinage de 0, de rayon de convergence $R_S \geq \min(R_f, |x_0|) = |x_0|$.

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(x_0) z^n \text{ où } d_n(x_0) = - \sum_{p=0}^n c_p x_0^{p-n-1}.$$

b)

Pour $N \in \mathbf{N}$ et $z \in D(0, R)$, on pose $S_N(z) = \sum_{n=0}^N d_n(x_0) z^n$.

En utilisant $f(x_0) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p x_0^p = 0$, on obtient $d_n(x_0) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} c_p x_0^{p-n-1}$.

Ainsi $S_N(z)$ apparaît comme la somme d'un nombre fini de séries (convergentes), d'où l'interversion possible des sommations

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} c_p x_0^{p-n-1} \right) z^n = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\inf(p-1, N)} c_p x_0^{p-n-1} z^n \right).$$

On a $\inf(p-1, N) = \begin{cases} p-1 & \text{si } p \leq N \\ N & \text{si } p > N \end{cases}$. On en déduit l'écriture $S_N(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p(N)$ où

$$\gamma_p(N) = \begin{cases} c_p \sum_{n=0}^{p-1} x_0^{p-n-1} z^n & \text{si } p \leq N \\ c_p \sum_{n=0}^N x_0^{p-n-1} z^n = c_p x_0^{p-N-1} \sum_{n=0}^N x_0^{N-n} z^n & \text{si } p > N \end{cases}.$$

c)

Soit r tel que $|x_0| < r < R$ et $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < r$ alors

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad |\gamma_p(N)| \leq |c_p| \sum_{n=0}^{\inf(p-1, N)} |x_0|^{p-n-1} |z|^n \leq |c_p| (1 + \inf(p-1, N)) r^{p-1} \leq p |c_p| r^{p-1}.$$

On a donc une majoration "uniforme" en N des γ_p que l'on va pouvoir exploiter lors du passage à la limite

$N \rightarrow +\infty$ dans la série de fonctions $\sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p$.

Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on note $\ell_p = c_p \sum_{n=0}^{p-1} x_0^{p-n-1} z^n$. On a donc $\gamma_p(N) = \ell_p$ pour tout $N \geq p$. Il en résulte que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \gamma_p(N) = \ell_p.$$

La série entière "dérivée" $\sum_{p=1}^{+\infty} p |c_p| r^{p-1}$ a son rayon de convergence égal à R_f . Pour $r < R$, elle est donc convergente et vérifie ainsi le critère de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbf{N}^* \quad p_2 > p_1 \geq p_0 \quad \sum_{p=p_1}^{p_2} p |c_p| r^{p-1} \leq \epsilon.$$

En utilisant l'inégalité établie au début de c), on en déduit

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbf{N}^* \quad p_2 > p_1 \geq p_0 \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{p=p_1}^{p_2} |\gamma_p(N)| \leq \epsilon.$$

En considérant les limites lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbf{N}^* \quad p_2 > p_1 \geq p_0 \quad \sum_{p=p_1}^{p_2} |\ell_p| \leq \epsilon.$$

Il en résulte que la série complexe $\sum \ell_p$ vérifie le critère de Cauchy, et donc converge.

En considérant les limites lorsque p_2 tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall p_1 \in \mathbf{N}^* \quad p_1 \geq p_0 \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{p=p_1}^{+\infty} |\gamma_p(N)| \leq \epsilon.$$

On a l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p - S_N(z) \right| &= \left| \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p - \sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p(N) \right| \\ &\leq \left| \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p - \sum_{p=1}^{p_0} \ell_p \right| + \left| \sum_{p=1}^{p_0} \ell_p - \sum_{p=1}^{p_0} \gamma_p(N) \right| + \left| \sum_{p=1}^{p_0} \gamma_p(N) - \sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p(N) \right| \\ &= \left| \sum_{p=p_0+1}^{+\infty} \ell_p \right| + \left| \sum_{p=1}^{p_0} \ell_p - \sum_{p=1}^{p_0} \gamma_p(N) \right| + \left| \sum_{p=p_0+1}^{+\infty} \gamma_p(N) \right|. \end{aligned}$$

Le calcul d'une somme de limites pour $\sum_{p=1}^{p_0} \gamma_p(N)$ donne

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbf{N} \quad \forall N \geq N_0 \quad \left| \sum_{p=1}^{p_0} \ell_p - \sum_{p=1}^{p_0} \gamma_p(N) \right| \leq \epsilon.$$

En regroupant les résultats, on en déduit

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbf{N} \quad \forall N \geq N_0 \quad \left| \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p - S_N(z) \right| \leq 3\epsilon,$$

ce qui signifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p$ et établit ainsi l'égalité demandée

$$S(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p.$$

d)

La série entière $S(z)$ étant convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < r$, a donc un rayon de convergence vérifiant $R_S \geq r$. Cette propriété étant valable pour tout r tel que $|x_0| < r < R$, il en résulte que

$$R_S \geq R.$$

$$\text{On a } g(x_0) = f'(x_0) = \sum_{p=1}^{+\infty} c_p p x_0^{p-1} \text{ et pour } z \in D(0, R) \setminus \{x_0\}, \quad g(z) = \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = \sum_{p=1}^{+\infty} c_p \frac{z^p - x_0^p}{z - x_0}.$$

Dans les deux cas, on obtient

$$g(z) = S(z).$$

Nota : les séries entières $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n(x_0) z^n$ ont le même rayon de convergence.

1)

On admet que la non densité de F dans E , pour la norme $\| \cdot \|_2$, assure l'existence d'une fonction $u \in E \setminus \{\theta\}$ telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \int_0^1 t^{\lambda_k} u(t) dt = 0.$$

On note φ la fonction réelle définie par $\varphi(\lambda) = \int_0^1 t^\lambda u(t) dt$.

a)

La continuité sur $]0, +\infty[\times [0, 1]$ de la fonction $(\lambda, t) \rightarrow t^\lambda u(t)$ entraîne la continuité de la fonction φ sur $]0, +\infty[$.

On a $\varphi(0) = \int_0^1 u(t) dt$, alors la continuité de φ en 0 résulte de

$$\forall \lambda > 0 \quad |\varphi(\lambda) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 (t^\lambda - 1) u(t) dt \right| \leq \|u\|_\infty \int_0^1 (1 - t^\lambda) dt = \|u\|_\infty \frac{\lambda}{1 + \lambda} < \|u\|_\infty \lambda.$$

b)

Supposons que u soit une fonction polynôme.

$$u(t) = \sum_{i=0}^p a_i t^i \Rightarrow \varphi(\lambda) = \int_0^1 \sum_{i=0}^p a_i t^{i+\lambda} dt = \sum_{i=0}^p \frac{a_i}{i + \lambda + 1} \Rightarrow |\varphi(\lambda)| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^p |a_i|.$$

On en déduit que $\varphi(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Dans le cas général où $u \in E$, il existe, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, une suite de polynômes (u_n) qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers u .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geq n_0 \quad \|u - u_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

On a les inégalités suivantes

$$|\varphi(\lambda)| \leq \left| \int_0^1 t^\lambda (u(t) - u_{n_0}(t)) dt \right| + \left| \int_0^1 t^\lambda u_{n_0}(t) dt \right| \leq \|u - u_{n_0}\|_\infty + \left| \int_0^1 t^\lambda u_{n_0}(t) dt \right|.$$

On applique à u_{n_0} le résultat obtenu ci-dessus quand λ tend vers $+\infty$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \lambda_0 \in \mathbf{R}^+ \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \quad \lambda \geq \lambda_0 \quad \left| \int_0^1 t^\lambda u_{n_0}(t) dt \right| \leq \epsilon.$$

En regroupant les résultats, on établit que $\varphi(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

c)

Supposons que φ soit identiquement nulle sur $[0, +\infty[$.

Sachant que φ est nulle sur $\mathbf{N}$, on en déduit, à l'aide de combinaisons linéaires, que

$$\forall p \in E \quad p \text{ polynôme} \Rightarrow \int_0^1 p(t) u(t) dt = 0.$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite de polynômes (u_n) qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers u .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geq n_0 \quad \|u - u_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

On a les inégalités suivantes

$$\forall \epsilon > 0 \quad 0 \leq \int_0^1 u^2(t) dt = \int_0^1 (u(t) - u_{n_0}(t)) u(t) dt \leq \|u - u_{n_0}\|_\infty \int_0^1 |u(t)| dt \leq \epsilon \int_0^1 |u(t)| dt.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 u^2(t) dt = 0,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que u^2 est une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

2)

On pose $\psi = \varphi \circ h$ où h est la fonction réelle $z \rightarrow \frac{1+z}{1-z}$.

a)

h est un homéomorphisme strictement croissant de $[-1, 1[$ sur $[0, +\infty[$. On en déduit que ψ est définie, continue et non identiquement nulle sur $[-1, 1[$. Les limites suivantes permettent, en posant $\psi(1) = 0$, de prolonger ψ en une fonction continue sur $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = 0.$$

b)

La fonction φ s'annule sur la suite (λ_k) . On a $h(-1) = 0$ et $h(0) = 1$, donc quitte à supprimer λ_1 s'il est nul et éventuellement le λ_{k_0} égal à 1, la suite $(h^{-1}(\lambda_k))$ éventuellement réindicée est une suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ strictement croissante de zéros non nuls de ψ appartenant à $] -1, 1[$.

3)

On admet que ψ se prolonge en une fonction bornée sur $D(0, 1)$ telle que

$$\forall z \in D(0, 1) \quad \psi(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha_n z^n \quad \text{où } \alpha_{n_0} \neq 0.$$

a)

La fonction $f : z \rightarrow \frac{\psi(z)}{z^{n_0}}$ ne s'annule pas en 0 et est définie par une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. Comme on a $0 < |x_1| < 1$ et $f(x_1) = 0$, la fonction g_1 définie par

$$\forall z \in D(0, 1) \quad z \neq x_1 \quad g_1(z) = \frac{f(z)}{z - x_1}, \quad g_1(x_1) = f'(x_1)$$

est, d'après **II-2**), égale sur $D(0, 1)$ à une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. Comme on a $0 < |x_2| < 1$ et $g_1(x_2) = 0$, on peut à nouveau appliquer le résultat à la fonction g_2 définie par

$$\forall z \in D(0, 1) \quad z \neq x_2 \quad g_2(z) = \frac{g_1(z)}{z - x_2}, \quad g_2(x_2) = g_1'(x_2).$$

Après N étapes, on en déduit que la fonction ψ_N telle que

$$\psi_N(z) = \frac{\psi(z)}{z^{n_0} \prod_{k=1}^N (z - x_k)}$$

est définie sur $D(0, 1)$, non nulle en 0, et égale sur $D(0, 1)$ à une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.

On peut donc appliquer la formule (4) (*inégalité de Jensen*) à ψ_N et $r \in]m_N, 1[$

$$\int_0^{2\pi} \ln |\psi_N(re^{i\theta})| d\theta \geq 2\pi \ln |\psi_N(0)|.$$

Le calcul donne

$$\int_0^{2\pi} \ln |\psi(re^{i\theta})| d\theta - 2\pi n_0 \ln r - \sum_{k=1}^N J(r, x_k) \geq 2\pi \ln |\alpha_{n_0}| - 2\pi \sum_{k=1}^N \ln |x_k|.$$

D'après **II-1**d), l'inégalité $|x_k| < r$ entraîne $J(r, x_k) = 2\pi \ln r$.

La fonction ψ étant bornée sur $D(0, 1)$, posons $M = \sup_{z \in D(0, 1)} |\psi(z)|$. On a $M > 0$ et

$$\forall r \in]0, 1[\quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad \int_0^{2\pi} \ln |\psi(re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi \ln M.$$

Il suffit alors de considérer la constante $C = 2\pi \ln \frac{|\alpha_{n_0}|}{M}$ pour obtenir

$$\forall N \in \mathbf{N}^* \quad \forall r \in]m_N, 1[\quad 2\pi \sum_{k=1}^N \ln |x_k| \geq C + 2\pi(n_0 + N) \ln r.$$

b)

En considérant la limite lorsque r tend vers 1, on obtient

$$\forall N \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=1}^N \ln |x_k| \geq \frac{C}{2\pi}.$$

La série, à termes négatifs, $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln |x_k|$ a ses sommes partielles minorées, elle est donc convergente.

c)

On a $\lambda_k > 0$ pour tout $k \geq 2$ et $\frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{h(x_k)} = \frac{1-x_k}{1+x_k}$. La suite (x_k) étant strictement croissante, on en déduit, d'après b), qu'elle tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$. La convergence de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ résulte alors des équivalences suivantes lorsque k tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{\lambda_k} \sim \frac{1-x_k}{2} \sim -\frac{\ln |x_k|}{2}.$$

4)

On a donc établi que, si la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente alors F est dense dans E (pour la norme $\| \cdot \|_2$). En particulier, en considérant pour suite (λ_k) , la suite des entiers naturels, on en déduit que l'ensemble F des polynômes est dense dans E (pour la norme $\| \cdot \|_2$), ce qui, en apparence, est plus faible que le théorème de Stone-Weierstrass qui assure que F est dense dans E (pour la norme $\| \cdot \|_\infty$), puisque les normes vérifient l'inégalité $\| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_\infty$.

Nota : Le théorème de Müntz assure également que la réciproque est vraie : si F est dense dans $(E, \| \cdot \|_2)$ alors la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

Si $\lambda_1 = 0$, l'équivalence précédente est également vérifiée avec la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$.

Parmi les ouvrages récents dédiés aux Classes Préparatoires, on pourra consulter, pour une démonstration du théorème de Müntz à l'aide de déterminants de Gram, soit l'exercice 13 p. 69 du Cours de Mathématiques (tome 4) de J.M. Arnaudiès et H.Fraysse (Ed. Dunod), soit le problème 21 p. 286 du livre Analyse de X. Gourdon (Ed. Ellipses).

— FIN —