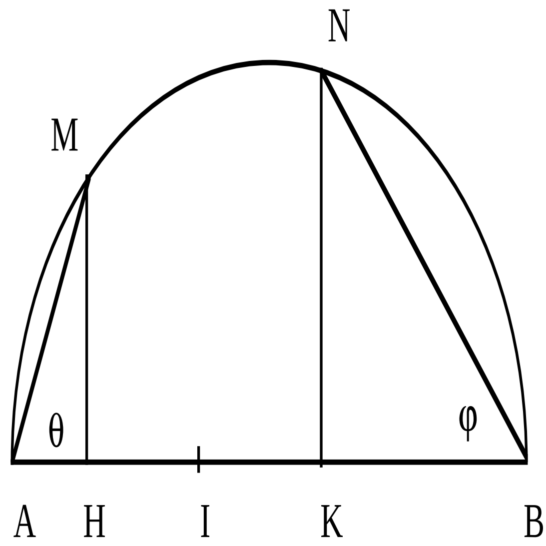
97-21 **Math. II PSI**

CORRIGÉ

I-1°) a. Considérer le cercle de centre A de rayon AM. Il coupe le diamètre AB en un point M*. Il suffit de considérer le cercle de centre B et de rayon BM*. Il coupe le demi-cercle C en N.



Considérons donc les angles : $\theta = (AB, AM)$, $\varphi = (BN, BA)$.

Il vient : $AM = \cos\theta$, $BN = \cos\varphi$.

Donc :

$$AI = \frac{1}{2}(AH + AK) = \frac{1}{2}(AH + 1 - BK) = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + 1 - \cos^2\varphi)$$

Or : $AM + BN = 1$, il vient :

$$\cos\theta + \cos\varphi = 1.$$

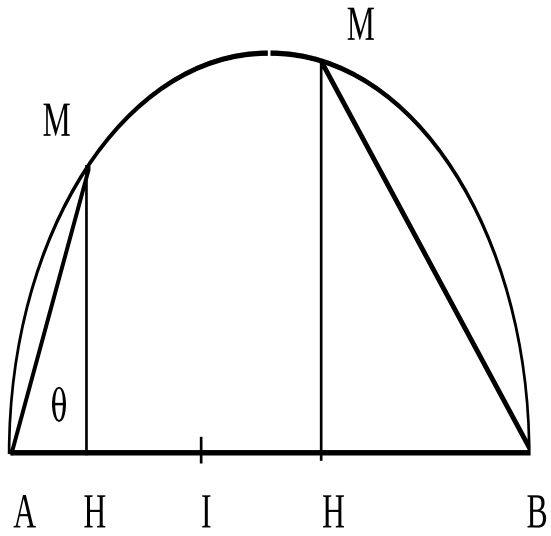
Donc :

$$AI = \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + 1 - (1 - \cos\theta)^2\right) = \cos\theta .$$

Donc :

$$\boxed{AI = AM}$$

b. Posons : $\theta_n = (AB, AM_n)$;



Démontrons que les points A, H_n, H_{n+1} et B sont dans l'ordre A, H_n, H_{n+1}, B :

$$AH_{n+1} - AH_n = 1 - \cos^2(\theta_{n+1}) - \cos^2(\theta_n) = 1 - \cos^2(\theta_n) - (1 - \cos(\theta_n))^2 .$$

Donc :

$$AH_{n+1} - AH_n = 2\cos^2(\theta_n) + 2\cos(\theta_n) + 1 = 2\left(\cos(\theta_n) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 .$$

De plus :

$$AB - AH_{n+1} = 1 - \cos^2(\theta_{n+1}) \geq 0 .$$

Par définition :

$$x_n = AH_n = AM_n \cos(\theta_n) = \cos^2(\theta_n)$$

La suite $x_n = \cos^2(\theta_n)$, $n \geq 0$, est donc monotone croissante et majorée par 1 ; elle est par suite convergente. Recherchons sa limite.

Puisque le point I_n est le milieu du segment M_nM_{n+1} et que les longueurs AI_n et AM_n sont égales, il vient :

$$x_{n+1} + x_n = 2\,\frac{x_n}{\cos(\theta_n)}$$

Par suite :

$$\boxed{x_{n+1} + x_n = 2\sqrt{x_n}}$$

La limite de la suite x_n, $n \geq 0$, est donc égale à 1.

Par suite la longueur du segment AI_n a pour limite 1. Or :

$$\sum_{p=1}^{n} a_p = AI_n .$$

La série de terme général a_n, $n \geq 1$, est donc convergente et de somme égale à 1.

I-2° Puisque la série de terme général $c_n x^n$, $n\geq 1$, est convergente pour $x=1$, le rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.

<u>C. N.</u> : supposons : $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$.

Pour tout réel x du segment [0, 1], $|c_n x^n| \leq c_n$. La série de terme général $c_n x^n$, $n\geq 1$, est donc uniformément convergente sur l'intervalle fermé [0, 1]. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ est continue sur [0, 1]. Par suite :

$$\boxed{\lim_{x<1, x\to 1} C(x) = 1} \quad .$$

<u>C. S.</u> : Supposons $\lim_{x<1, x\to 1} C(x) = 1$.

i/ R > 1 : la restriction de la fonction C, définie sur]–R, R[, au segment [0, 1] est continue. En particulier, la fonction C est continue à gauche en 1 :

$$\lim_{x<1, x\to 1} C(x) = C(1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad .$$

ii/ R = 1 : soient $x\in[0, 1[$ et n entier, $n\geq 1$; puisque tous les réels c_n, $n\geq 1$, sont positifs, il vient :

$$\sum_{p=1}^{n} c_p x^p \leq \sum_{p=1}^{n} c_p \ , \ \sum_{p=1}^{n} c_p x^p \leq C(x) \ .$$

Remarquons :

$$\sum_{p=1}^{n} c_p = \lim_{x<1, x\to 1} \sum_{p=1}^{n} c_p x^p \leq \lim_{x<1, x\to 1} C(x) \ .$$

Il vient :

$$\sum_{p=1}^{n} c_p x^p \leq \sum_{p=1}^{n} c_p \leq \lim_{x<1, x\to 1} C(x) \ .$$

Faisons tendre n vers l'infini, il vient :

$$C(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \lim_{x<1, x\to 1} C(x) \ .$$

Faisons tendre x vers 1 par valeurs inférieures :

$$\boxed{\lim_{x<1, x\to 1} C(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \lim_{x<1, x\to 1} C(x) = 1}$$

D'où le résultat annoncé.

Deuxième partie.

II-1°) a. $a_1 = 1$; $\forall\ k\geq 2$, $a_k = 0$. Par suite : $\forall\ k\geq 1$, $b_k = 1$. Il vient :

$$R_1 \text{ est infini} \ ; R_2 = 1 \ ; A(x) = x \ ; B(x) = \frac{x}{1 - x} \ .$$

b. Évidemment : $b_1 = a_1 \Rightarrow 0 \leq b_1 \leq 1$.

Soit $n \geq 2$; supposons : $\forall$ k, $1 \leq k \leq n–1$, $0 \leq b_k \leq 1$. Il vient :

$$b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k\, b_{n-k} \geq 0 \text{ et } b_n \leq a_n + \sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k \ \leq 1 \ .$$

Donc : $\boxed{0 \leq b_n \leq 1}$

Il vient :

$$\forall\ n \geq 1 \ , |a_n\, x^n| \leq |x|^n \ ; |b_n\, x^n| \leq |x|^n \ ;$$

Par suite : $\boxed{R_1 \geq 1 \ , \ R_2 \geq 1}$

c. Il vient :

$$\text{Pour } n \geq 2 \ ; b_n\, x^n = a_n\, x^n + \sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k\, b_{n-k}\, x^n = a_n\, x^n + \sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k\, x^k\, b_{n-k}\, x^{n-k} \ .$$

Donc :

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n = b_1\, x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n\, x^n = a_1\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(a_n\, x^n + \sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k\, x^k\, b_{n-k}\, x^{n-k}\Big) \ .$$

La somme de la série de terme général $\sum_{k=1}^{n\pm 1} a_k\, x^k\, b_{n-k}\, x^{n-k}$, $n\geq 2$, est la somme du produit de Cauchy des deux séries $a_n\, x^n$, $n\geq 1$ et $b_n\, x^n$, $n\geq 1$; le premier terme du produit est obtenu pour n=2, par suite :

$$B(x) = A(x) + A(x)\, B(x) \ .$$

Donc :

$$\boxed{B(x)\ \big(1 - A(x)\big) = A(x)}$$

La fonction A est continue sur l'intervalle [0, 1] et tend vers 1 lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. Or :

$$\forall\ x \in\ ]-1, 1[\ , B(x) = \frac{A(x)}{1 - A(x)} \ .$$

B(x) croît indéfiniment lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ; le rayon de convergence R_2 ne peut être strictement supérieur à 1 ; donc $R_2 \leq 1$.

En résumé :

$$\boxed{R_1 \ \geq 1 \ , \ R_2 = 1}$$

d. Par hypothèse : $\forall\ n \geq 1,\ a_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1}$. Le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^{n-1}$, $n \geq 1$, est $\dfrac{1}{\alpha}$. Il vient :

$$A(x) = (1-\alpha)\,\frac{x}{1-\alpha\ x} \quad .$$

Par suite :

$$-1 < x < 1\ ,\ \ B(x) = \frac{A(x)}{1-A(x)} \ = (1-\alpha)\,\frac{x}{1-x} \ .$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction dans l'intervalle de convergence, il vient :

$$\forall\ n \geq 1,\ b_n = (1-\alpha)\ .$$

<u>Vérification directe</u> :

$b_1 = a_1 = 1-\alpha$. Supposons :

$$\forall\ k\ ,\ 1 \leq k \leq n-1,\ \ b_k = 1-\alpha.$$

Il vient :

$$b_n = \ a_n + \sum_{k=1}^{n\pm1} a_k\, b_{n-k} = (1-\alpha)\alpha^{n-1} + (1-\alpha)^2 \sum_{k=1}^{n\pm1} \alpha^{k\pm1}.$$

Par suite :

$$b_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1} + (1-\alpha)^2\,\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \ = 1-\alpha\ .$$

II-2° a. Soit x un nombre complexe de module strictement inférieur à 1 ; il vient :

$$|A(x)| \leq \ \sum_{n=1}^{p} a_n\, |x|^k < \sum_{n=1}^{p} a_n = 1.$$

Les racines de l'équation E ont donc un module supérieur ou égal à 1.

La dérivée du polynôme $A(x) - 1$ est le polynôme A' :

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{p} n\ a_n\, x^{n-1}\ .$$

Donc :
$$\boxed{A'(1) \ = \ \sum_{n=1}^{p} n\ a_n > \ 0}$$

<u>Le réel 1 est racine simple</u>.

Supposons que le réel -1 soit racine de l'équation E ; il viendrait : $A(-1) = 1$; c'est-à-dire :

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^p a_p = 1,$$

Or : $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = 1,$$

Par soustraction de ces équations, il vient :

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = 0,$$

Donc : $$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0,$$

Or $a_1 \neq 0$. Donc –1 n'est pas racine.

Plus généralement : $e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, est racine de **E** :

$$a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + a_3 e^{3i\theta} + \ldots + a_p e^{pi\theta} = 1,$$

La partie réelle est nulle ; donc :

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + \ldots + a_p \cos(p\theta) = 1,$$

Or : $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = 1,$$

Donc :

$$a_1 \sin^2(\frac{\theta}{2}) + a_2 \sin^2(\frac{2\theta}{2}) + a_3 \sin^2(\frac{3\theta}{2}) + \ldots + a_p \sin^2(\frac{p\theta}{2}) = 1,$$

Il vient :

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0,$$

Or $a_1 \neq 0$. Donc $e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, n'est pas racine.

b . D'après la question **II-1° c** il vient :

$$B(x) = \frac{A(x)}{1 - A(x)} \; .$$

Puisque A est un polynôme B est une fraction rationnelle. Il vient :

$$B(x) = -1 - \frac{1}{A(x) - 1} \; .$$

Par hypothèse les racines de l'équation **E** sont simples ; par suite :

$$\boxed{B(x) = -1 - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{A'(x_k)\,(x \pm x_k)}}$$

Pour $|x| < 1$, il vient :

$$\frac{1}{x - x_k} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(x_k)^{n+1}}.$$

D'où :

$$B(x) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{A'(x_k)\,(x_k)^{n+1}}$$

B(0) = 0 car A(0) = 0. Par suite :

$$-1+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{A'(x_k)\,x_k}=0\,.$$

Pour tout entier n, n≥1 :

$$b_n=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{A'(x_k)\,(x_k)^{n+1}}.$$

Il vient :

$$b_n=\frac{1}{A'(1)}+\sum_{k=2}^{p}\frac{1}{A'(x_k)\,(x_k)^{n+1}}.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{A'(1)}}$$

Troisième partie.

III-1°) a. La question **I-1° a** a donné les résultats :

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=(1-\alpha)\,\frac{1}{1-\alpha}=1\ ;\ R_1=\frac{1}{\alpha}\ ;\ A(x)=(1-\alpha)\,\frac{x}{1-\alpha x}\,.$$

Il vient :

$$\forall\, n\ge 0,\ r_n=\alpha^n\ ;\quad R_3=\frac{1}{\alpha}\ ;\ R(x)=\frac{1}{1-\alpha x}\,.$$

b. Puisque les réels a_n, n≥1, sont positifs ou nuls et puisque la somme de la série de terme général a_n, n≥1, est égale à 1, le reste d'ordre n, r_n, est positif ou nul et majoré par 1 :

$$0\le r_n\le 1\,.$$

Le rayon de convergence est minoré par 1 :

$$\boxed{R_3\ \ge\ 1}$$

c. Par définition de la suite r_n, n ≥0, il vient : $a_n=r_{n-1}-r_n$; donc :

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(r_{n\pm1}-r_n)\,x^n\,.$$

Par suite :

$$A(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}r_{n\pm1}\,x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}r_n\,x^n=x\,R(x)-(R(x)-r_0)\,.$$

Or $r_0 = 1$; donc :

$$A(x) = (x - 1)R(x) + 1 .$$

Pour $x \in]-1, 1[$, il vient :

$$\boxed{R(x) = \frac{A(x) - 1}{x - 1}}$$

III-2° a Manifestement :

$$|u_n x^n| \leq M \; |x^n| .$$

Le rayon de convergence ρ est par suite supérieur ou égal à 1.

b . Considérons l'expression :

$$U(x) - \ell \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \ell)\, x^n .$$

Soit ε un réel positif donné .

$$\exists\, N : \forall\, n>N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \; .$$

Donc pour x compris entre 0 et 1, il vient :

$$|U(x) - \ell \sum_{n=1}^{\infty} x^n| \leq \sum_{n=1}^{N} |u_n - \ell|\, x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n - \ell|\, x^n .$$

$$|U(x) - \ell \frac{x}{1-x}| \leq \sum_{n=1}^{N} |u_n - \ell|\, x^n + \varepsilon \frac{1}{1 - x} \; .$$

Par suite :

$$|U(x)\,(1-x) - \ell\, x| \leq (1 - x) \sum_{n=1}^{N} |u_n - \ell| + \; \varepsilon.$$

Il existe η : $1 - \eta < x < 1$ implique :

$$|U(x)\,(1-x) - \ell| \leq 3 \; \varepsilon.$$

Le produit $(1 - x)U(x)$ tend vers ℓ ; donc :

$$\boxed{U(x) \sim \frac{\ell}{1-x}}$$

III-3° a Par hypothèse la suite des réels b_n, $n \geq 1$, est convergente et de limite ℓ ($\ell > 0$).

D'après la question **III-2°**, il vient :

$$B(x) \sim \frac{\ell}{1 - x}$$

D'après la question **II-1° c** il vient :

$$A(x) = \frac{B(x)}{1 + B(x)} \; .$$

Par suite :

$$A(x) - 1 = -\frac{1}{1 + B(x)} \ .$$

Puisque B(x) croît indéfiniment lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, il vient :

$$\boxed{A(x) - 1 \sim -\frac{1}{B(x)} \sim \frac{x - 1}{\ell}}$$

b . Utilisons la relation : $R(x) = \dfrac{A(x) - 1}{x - 1}$.

Il vient : $\displaystyle\lim_{x<1, x\to 1} R(x) = \frac{1}{\ell}$.

D'après la question **I-2°**, la série de terme général r_n, $n \geq 0$, est convergente et sa somme est la limite de R(x) lorsque le réel x tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \lim_{x<1, x\to 1} R(x) = \frac{1}{\ell} \ .$$

FIN