ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PSI.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI comporte 5 pages.

Étant donnée une suite de réels positifs ou nuls a_n, $n\geqslant 1$, tels que la série de terme général a_n, $n\geqslant 1$, soit convergente et de somme égale à 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 ,$$

l'objet du problème est d'étudier les suites $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(r_n)_{n\geqslant 0}$ définies par les conditions ci-dessous :

- Les réels b_n, $n\geqslant 1$, sont donnés par les relations suivantes :

$$b_1 = a_1 \text{ ; pour } n\geqslant 2,\quad b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k} .$$

- Les réels r_n, $n\geqslant 0$, sont définis pour tout entier naturel n par les relations suivantes :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

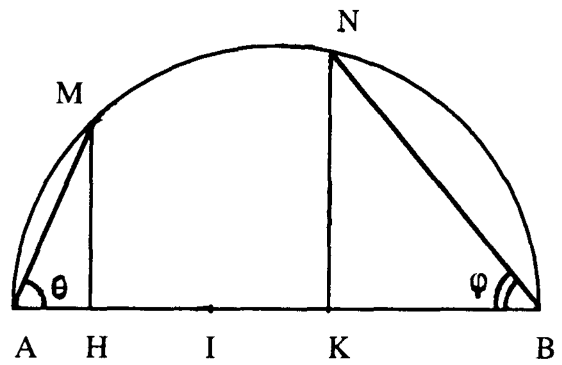
Première partie.

L'objet de cette partie est de donner un exemple, tiré de la géométrie, de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls et dont la somme de la série de terme général a_n, $n\geqslant 1$, est égale à 1 et d'établir un résultat sur la continuité de la somme d'une série entière.

I-1°) Un exemple tiré de la géométrie :

Soit P un plan affine euclidien ; soient A et B deux points dont la distance est égale à 1. Soit C un demi-cercle de diamètre AB (voir la figure ci-dessous).

a. Soit M un point du demi-cercle C distinct des points A et B. Au point M est associé le point N défini par la condition suivante : la somme des longueurs des segments AM et BN est égale à 1. Donner une construction géométrique du point N. Soient H et K les projections orthogonales des points M et N sur le segment AB. Soit I le milieu du segment HK. Comparer les longueurs des segments AM et AI (considérer par exemple les angles θ et φ, angles respectifs des droites AB, AM et BN, BA).



b. Soit la suite de points M_n, $n \in \mathbb{N}$, du demi-cercle C définis par un premier point M_0, différent des points A et B, situé sur le demi-cercle C et par la relation de récurrence suivante : au point M_n est associé le point M_{n+1} tel que la somme des longueurs des segments AM_n et BM_{n+1} soit égale à 1. Soit H_n la projection orthogonale du point M_n sur le diamètre AB. Soit I_n le milieu du segment H_nH_{n+1}. Étudier la convergence de la suite des points H_n, $n \in \mathbb{N}$ (désigner par x_n la longueur du segment AH_n).

Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des réels définis par les relations :

- a_1 est la longueur du segment AI_1 ,
- pour tout $n \geqslant 2$, a_n est la longueur du segment $I_{n-1}I_n$.

Étudier la convergence de la série de terme général a_n, $n \geqslant 1$; quelle est sa somme ?

I-2°) Rayon de convergence d'une série entière associée à une série convergente :

Soit $(c_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs tels que la série de terme général c_n, $n \geqslant 1$, soit convergente. Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_n\, x^n$, $n \geqslant 1$. Démontrer que le rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1 ($R \geqslant 1$). Soit C(x) la somme de cette série entière dans l'intervalle de convergence :

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n .$$

Démontrer que, pour que la somme de la série de terme général c_n, $n \geqslant 1$, soit égale à 1, il faut et il suffit que la limite de $C(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, soit égale à 1 :
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{x<1, x \to 1} C(x) = 1 .$$

Deuxième partie.

Soient $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites vérifiant les propriétés énoncées au début du problème. À chacune de ces suites sont associées des séries entières de termes généraux respectifs : $a_n x^n$, $n \geqslant 1$, et $b_n x^n$, $n \geqslant 1$. Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de ces séries entières, $A(x)$ et $B(x)$ les sommes correspondantes dans les intervalles ouverts de convergence :
$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n , \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n .$$

II-1°) Rayons de convergence :

a. Exemple : Les réels a_n, $n \geqslant 1$, sont tous nuls sauf le réel a_1 qui est égal à 1. Déterminer la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$. Quels sont les rayons de convergence R_1, R_2 et les sommes $A(x)$, $B(x)$ à l'intérieur des intervalles ouverts de convergence ?

b. Démontrer que les réels b_n, $n \geqslant 1$, sont tous positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 1 ($0 \leqslant b_n \leqslant 1$). Démontrer que les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux séries entières de termes généraux $a_n x^n$, $n \geqslant 1$, et $b_n x^n$, $n \geqslant 1$, sont strictement positifs (préciser un minorant commun).

c. Établir la relation ci-dessous entre les sommes $A(x)$ et $B(x)$ lorsque le réel x est compris strictement entre -1 et 1 ($|x| < 1$) :
$$B(x) = A(x) + A(x)\, B(x) .$$
En déduire la valeur du rayon de convergence R_2.

d. Application : soit α un réel donné strictement compris entre 0 et 1 ; soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$, la suite définie par la relation : $a_n = (1-\alpha)\, \alpha^{n-1}$. Déterminer, dans son intervalle de convergence, la somme $A(x)$. En déduire, pour x appartenant à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$, l'expression de $B(x)$ puis la suite des réels b_n, $n \geqslant 1$.

Dans la question suivante, la suite des réels positifs ou nuls a_n, $n \geqslant 1$, est stationnaire à partir d'un certain rang ; plus précisément :

- $a_1 \neq 0$;
- il existe un rang p pour lequel a_p n'est pas nul et au delà duquel tous les réels a_n sont nuls : $a_p \neq 0$; $\forall\, n \geqslant p+1$, $a_n = 0$.

La somme de la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \geqslant 1$, est un polynôme de degré p. Dans ces conditions soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p racines complexes, distinctes ou confondues, de l'équation algébrique **E** :

E : $$A(x) = 1 .$$

Le réel 1 est racine de cette équation ; c'est par convention la racine x_1.

II-2°) Convergence de la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$:

a. Démontrer que les racines de l'équation **E** ont un module supérieur ou égal à 1. Démontrer que la racine $x_1 = 1$ est simple. Démontrer que l'équation **E** n'admet pas la racine -1 ni plus généralement les racines complexes de module égal à 1 qui s'écrivent : $x = e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$.

b. Toutes les racines de l'équation **E** sont supposées simples. Puisque la fonction $x \mapsto A(x)$ est une fonction polynomiale, d'après la question II-1° c, la somme $B(x)$ de la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \geqslant 1$, dans l'intervalle de convergence, est égale à une fraction rationnelle. Déterminer la décomposition en éléments simples sur le corps des complexes de cette fraction rationnelle notée encore $B(x)$. En déduire l'expression de chaque réel b_n, $n \geqslant 1$, en fonction des racines x_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, de l'équation **E** et de valeurs prises par la fonction dérivée A'. Quelle est la limite de la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$?

Troisième partie.

Étant donnée une suite de réels a_n, $n \geqslant 1$, vérifiant les hypothèses exposées dans l'introduction, soit $(r_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par la relation suivante :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Le but de cette partie est d'étudier la série de terme général r_n, $n \geqslant 0$. À la suite $(r_n)_{n \geqslant 0}$ est associée la série entière de terme général $r_n x^n$, $n \geqslant 0$. Soit R_3 son rayon de convergence et soit $R(x)$ la somme de la série entière dans l'intervalle ouvert de convergence.

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n .$$

III-1°) Rayon de convergence R_3 :

a. Exemple : soit α un réel donné strictement compris entre 0 et 1 ; soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par la relation : $a_n = (1-\alpha)\,\alpha^{n-1}$. Les réels R_1 et $A(x)$ ont été déterminés à la question II-1° a ; déterminer les réels r_n, $n \geqslant 0$, R_3 et $R(x)$.

b. Démontrer que la suite des réels r_n, $n \geqslant 0$, est une suite de termes positifs ou nuls. Démontrer que le rayon de convergence R_3 est strictement positif (préciser un minorant).

c. Exprimer, pour x compris entre -1 et 1 ($|x| < 1$), la somme $R(x)$ en fonction de $A(x)$.

III-2°) Un résultat intermédiaire :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls bornés ; soit M un réel tel que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n \leqslant M$. Soit ρ le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n\, x^n$, $n \geqslant 1$.

a. Démontrer que le réel ρ est supérieur ou égal à 1.

Soit $U(x)$ la somme de cette série entière dans l'intervalle de convergence :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, x^n \ .$$

b. Établir que, si la suite des réels u_n, $n \geqslant 1$, est convergente et de limite le réel strictement positif ℓ, le réel $U(x)$ est équivalent à $\frac{\ell}{1-x}$ lorsque le réel x tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$U(x) \sim \frac{\ell}{1-x} \ .$$

Dans la question suivante, la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est supposée convergente et sa limite ℓ est strictement positive. Lorsque la série de terme général r_n, $n \geqslant 0$, est convergente, soit S_3 sa somme :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \, .$$

III-3°) Calcul de la somme S_3 :

a. Donner un équivalent simple de la quantité $A(x)-1$ où $A(x)$ est la somme de la série entière de terme général $a_n\, x^n$, $n \geqslant 1$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b. Démontrer que la série de terme général r_n, $n \geqslant 0$, est convergente. Calculer sa somme S_3.