ENTPE MP Maths 2 — 1997

Préliminaire

La convergence de la *suite* (b_n) équivaut à celle de la *série* de terme général $a_n = b_{n+1} - b_n$. Or

$$b_{n+1} - b_n = \ln\big(\frac{n+1}{n}\big)^{\alpha} + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$$

donc $\sum a_n$ converge (dominée par une série de Riemann convergente) et b_n converge, c'est à dire que $\ln(n^{\alpha}u_n) \to \ell$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$n^{\alpha}u_n \to e^{\ell} = K > 0$$

Première partie

1)a) Distinguons selon que le segment $[a, b]$ est inclus dans $]0, +\infty[$ ou bien dans $]-k-1, -k[$ où $k \in \mathbb{N}$; on a affaire à une série alternée (à partir du rang $n_0 = k+1$ au pire), dont le terme général décroît en valeur absolue vers 0. Le théorème des séries alternées s'applique, ce qui prouve non seulement la convergence de la série mais aussi que son reste est majoré par le premier terme négligé. On a donc (pour $N > k$)

$$\Big|\sum_{n\geq N}\frac{(-1)^n}{n+x}\Big| \leq \frac{1}{N+x} \leq \frac{1}{N-|a|}$$

et ce dernier terme tend vers 0 indépendamment de $x \in [a, b]$, ce qui démontre la convergence uniforme de la série sur $[a, b]$.
Comme toutes les fonctions sommées sont continues, leur limite uniforme l'est. Donc g est continue sur tout segment de E, et par suite en tout point de E.

1)b) Cette fois on a mieux : on a la convergence normale. En effet,

$$\Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big| = \Big|\frac{x}{n(n+x)}\Big| \leq \frac{\max|a|, |b|}{n(n-|a|)}$$

(pour $n > k$ avec les notations précédentes) et le dernier terme est celui d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann.
Pour la même raison que ci-dessus, la somme de la série est continue sur E et donc f est continue sur E.

2) • On écrit par différences de séries convergentes

$$f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x}{2})=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{x+1}{2}}\right)-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{x}{2}}\right)$$
$$=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n+\frac{x+1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{x}{2}}\right)=2\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x+2n}-\frac{1}{x+2n+1}\right)$$

Les sommes partielles de cette série sont *extraites* des sommes partielles de la série définissant $2\times g$, donc convergent vers $2g(x)$.

• De même, on a

$$f(x+1)-f(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)$$

qui est une série télescopique de somme $\frac{1}{x}$.

•
$$\ln n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}=\ln n-(1+\ldots+\frac{1}{n})+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+n}\to f(x)$$

3) On applique une version récurrente du théorème de dérivation terme à terme : la série dérivée r fois est

$$(-1)^{r+1}r!\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(x+n)^{r+1}}$$

qui converge normalement, et donc uniformément, sur tout segment de E pour les mêmes raisons qu'au **1)b**. Comme la série initiale est simplement convergente sur E, cela autorise à dériver terme à terme r fois. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E, et

$$f^{(r)}(x)=(-1)^{r+1}r!\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(x+n)^{r+1}}\qquad (r\geq 1)$$

Vue la convergence uniforme sur $[1,+\infty[$, qui résulte de la décroissance de $x\mapsto\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(x+n)^{r+1}}$, on peut intervertir limite et signe $\sum$, et donc $f^{(r)}(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$.
(En fait il s'agit plutôt ici de convergence monotone).

4) Ici on doit revenir aux sommes partielles.

$$\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})+\ldots+\frac{1}{x+n}-\ln(1+\frac{1}{x+n})=\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{n+x}-\ln\Big(\frac{x+1}{x}\cdots\frac{x+n+1}{x+n}\Big)$$
$$=\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{n+x}+\ln x-\ln(x+n+1)=\frac{1}{x}+\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1}\Big)+\ldots+$$
$$\Big(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\Big)+(1+\ldots+\frac{1}{n})-\ln n-\ln\frac{x+n+1}{n}+\ln x\to\ln x-f(x)=h(x)$$

La fonction $u\mapsto u-\ln(1+u)$ est croissante pour $u>0$, donc

$$\sup_{x>0}\left(\frac{1}{n+x}-\ln(1+\frac{1}{n+x})\right)=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2n^2}$$

donc la série des sup est convergente, c'est à dire que la série converge normalement sur $]0,+\infty[$. En particulier, il y a convergence uniforme, et donc

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim\sum=\sum\lim=0$$

Ce qui démontre qu'en $+\infty$, $f(x)=\ln x+o(1)$.

5)a) On commence par démontrer le

Lemme. La suite double $\left(\frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\right)_{\substack{k\geq 2\\ n\geq 0}}$ est sommable.

En effet, on peut dominer le terme général (en valeur absolue) par $\frac{1}{(n+x)^k}$ qui est le terme général d'une famille sommable positive. On le vérifie en utilisant le critère de sommabilité des séries doubles, on a

$$\sum_{k\geq 2}\frac{1}{(n+x)^k}=\frac{1}{(n+x)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n+x}}=\frac{1}{(n+x)(n+x-1)}$$

et on a trouvé le terme général d'une série télescopique convergente : on a prouvé que $\sum\limits_n\sum\limits_k|\ |$ converge, donc la famille est sommable, cqfd.

En se souvenant que pour $|u|<1$, $u-\ln(1+u)=\sum\limits_{k\geq 2}(-1)^k\,\dfrac{u^k}{k}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}f^{(k-1)}(x)&=f(x)+\sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}=f(x)+\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\\&=f(x)+\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n+x}-\ln(1+\frac{1}{n+x})\right)=f(x)+h(x)=\ln x\end{aligned}$$

où l'interversion des $\sum$ est justifiée par la sommabilité de la suite double, de même que les calculs sur la somme de la série.

5)b) Pour x voisin de 1, la convergence normale semble problématique. Nous allons donc essayer d'utiliser le théorème des séries alternées, puisque

$$\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+x)^k}$$

en est visiblement une.

De plus, il est clair que la suite $k\mapsto\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{k(n+x)^k}$ est décroissante (comme somme de fonctions décroissantes de x,n et k !).

Le terme général $\dfrac{1}{k}\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(n+x)^k}$ tend vers 0 puisque la série converge, donc le théorème des séries alternées s'applique. Il permet de majorer le reste par son premier terme :

$$\left|\sum_{k\geq k_0}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+x)^k}\right|\leq\frac{1}{k_0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+x)^{k_0}}\leq\frac{1}{k_0}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{k_0}\zeta(2)\to 0$$

et on a bien convergence uniforme du reste vers 0.

6)a) Il vient facilement

$$h(x)-h(2x)=-\ln 2+f(x)-f(2x)=-\ln 2+\lim_{n\to+\infty}\left[\ln 2n-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+2x}\right]-\lim_{n\to+\infty}\left[\ln n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}\right]$$

Les bornes de sommation sont diaboliquement[1] choisies pour que le $\ln 2$ s'évapore !

[1] On peut aussi utiliser la définition de f, et non cette expression particulière; en appliquant une astuce similaire, on vaincra le $\ln 2$ à l'aide de la somme de Riemann classique $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Il reste par différence de quantités convergentes à étudier $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+x} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2x}$ ce qui fait, en choisissant $n = 2p+1$ et en extrayant les k pairs de la deuxième somme

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) &+ \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{2x+2p}\right) - \left(\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3+2x} + \ldots + \frac{1}{4p+1+2x}\right) \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2x+2} - \ldots + \frac{1}{4p+1+2x}\end{aligned}$$

qui est bien une somme partielle de la série qui définit $g(2x)$.

6)b) Il vient successivement

$$h(x) = g(2x) + h(2x) = g(2x) + g(4x) + h(4x) = g(2x) + g(4x) + g(8x) + h(8x) = \ldots$$

et cela converge vers $\sum_{n\geq 1} g(2^n x)$ puisque $h(2^n x) \to 0$ d'après **4)**.

Comme pour $x > 0$ on a $0 < g(x) < \frac{1}{x}$, on en déduit pour $\alpha \leq x$

$$g(2^n x) \leq \frac{1}{2^n \alpha} \qquad \text{terme général d'une série convergente.}$$

Il y a donc bien convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$.

Deuxième partie

1)a) En 1, la fonction se prolonge par continuité (avec la valeur x); en 0, on a une fonction équivalente à $-t^x$, qui est de signe constant et intégrable. $J(x)$ est donc parfaitement définie pour $x > -1$.

1)b) On développe pour $0 < t < 1$:

$$\frac{1-t^x}{1-t} = \sum_{n\geq 0} (t^n - t^{n+x})$$

L'intégration terme à terme donne $\sum \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x+1}$. Or un théorème du cours autorise cette intégration terme à terme :

$$\int \sum u_n = \sum \int u_n$$

dès que $\sum \int |u_n|$ converge. C'est le cas ici ($t^n - t^{n+x}$ est de signe constant) et donc

$$J(x) = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (t^n - t^{n+x}) = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 (t^n - t^{n+x})\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x+1}\right) = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma$$

2)a) On somme les valeurs absolues par rapport à k, puis à x, ce qui donne

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(n-x)} \quad \text{qui converge}$$

2)b) La sommabilité autorise à intervertir l'ordre des sommations :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k &= \sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}\, x^k}{n^{k+1}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}\, x^k}{n^{k+1}} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = J(x)\end{aligned}$$

3)a) On développe brillamment la série exponentielle :

$$\frac{1-t^x}{1-t} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(x\ln t)^n}{n!(1-t)}$$

où la fonction $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^n}{1-t}$ est parfaitement continue en 1 (elle y vaut 0 pour $n > 1$ et -1 pour $n = 1$). L'intégration terme à terme est justifiée par la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, qui s'identifie à $\sum |I_n x^n|/n!$ (laquelle convergence résulte de la question suivante, où l'on prouve que $I_n = O(n!)$).

$$J(x) = -\sum_{n\geq 1} \int_0^1 \frac{(x\ln t)^n}{n!(1-t)} dt = -\sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n!} x^n$$

ce qui montre que J est DSE.

3)b) On fait comme au **1)b)** :

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k\geq 0} t^k (\ln t)^n dt = \sum_{k\geq 0} \int_0^1 t^k (\ln t)^n dt = \sum_{k\geq 0} \int_0^1 \frac{-n}{k+1} t^k (\ln t)^{n-1} dt = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^n\, n!}{(k+1)^{n+1}} = (-1)^n\, n!\zeta(n+1)$$

après moult intégrations par parties à crochet nul. Encore une fois, l'interversion de $\sum$ et $\int$ résulte de la convergence de la série des intégrales (des valeurs absolues).

4)a) Changement de variable $t = 1-u$. On pourrait procéder sur l'intégrale de a à b, puis faire tendre a vers 0 et b vers 1, mais ce n'est pas l'esprit des nouveaux programmes.

4)b) On développe en série entière de $u \in]0,1[$:

$$\frac{1-(1-u)^x}{u} = \sum_{n\geq 1} \binom{x}{n} (-1)^{n-1} u^{n-1}$$

Comme $-\binom{x}{n+1} / \binom{x}{n} = \dfrac{n-x}{n+1} = 1 - \dfrac{x+1}{n} + O(1/n^2)$, d'après le préliminaire on a facilement

$$\left|\binom{x}{n}\right| \sim K_x.n^{-x-1}$$

Ce qui nous permet d'intégrer terme à terme (par rapport à u), car

$$\int_0^1 \left|\binom{x}{n} (-1)^{n-1} u^{n-1}\right| du \sim K_x.n^{-x-2}$$

est le terme général d'une série convergente.
Ce qui donne le développement de $J(x)$ en “série de factorielles”.

4)c) Observons que les $\binom{x}{n}, n \geq 0$ forment une base de l'espace des polynômes en x (ils sont échelonnés en degré). Les termes $\sigma(n,k)$ de l'énoncé ne sont pas autre chose (au $n!$ près) que les coefficients de la matrice de changement de base vers la base canonique. Ils sont donc uniquement déterminés, et ce sont bien des entiers comme on le voit en développant les produits $x(x-1)\ldots(x-n+1)$.
Observons que $\dfrac{\sigma(n,k)}{n!} x^k$ a pour $x < 0$ le signe de $(-1)^n$. Il en est de même de $\binom{x}{n}$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $x < 0$:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} |\sigma(n,k) x^k| = (-1)^n \binom{x}{n}$$

On en déduit que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n.n!}\sum_{k=1}^{n}|\sigma(n,k)x^k| = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\binom{x}{n}$$

qui est une série à termes **positifs** convergente, en utilisant le préliminaire (le terme général est un $O(n^{-|x|-1})$).
On a montré la sommabilité de la famille des valeurs absolues, donc la sommabilité de la suite double.

4)d) Cela résulte de l'unicité du DSE de J :

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k = J(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{x}{n} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}\sigma(n,k)x^k = \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}\sigma(n,k)\right)x^k$$

d'où le résultat par identification du terme en x^k.