MINISTÈRE DE L'ÉQUIPEMENT, DU LOGEMENT, DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1997
ENTPE. ENSG. ENTM. ENSTIMD
Banque de notes pour le concours EIVP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

2ème épreuve

Durée : 4 heures - Coefficient : 12

Notations

- $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$.
- La constante d'Euler γ est la limite de la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Les théorèmes utilisés devront être énoncés et les hypothèses explicitées.

Question préliminaire

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} K.n^{-\alpha}$.

On pourra étudier la série de terme général a_n où, à partir d'un certain rang, $b_n = \ln\left(n^\alpha u_n\right)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Première partie

1. a) Montrer que la série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans E. En déduire que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est continue sur E.

   b) Montrer que la série $\left(\sum \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans E. En déduire que la fonction $f : x \mapsto -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ est continue sur E.

   Pour la suite on notera h la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x) - f(x)$.

2. Si $x \in E$, vérifier les relations :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right]\ ;\ f(x+1) = \frac{1}{x} + f(x)\ ;\ f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}\right].$$

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur E et préciser $f^{(r)}(x)$ pour $x \in E$ et $r \geqslant 1$. Déterminer la limite de $f^{(r)}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{x+n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+x}\right)\right]$.

   Étudier la convergence normale de la série de fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. Prouver que $\displaystyle\lim_{+\infty}(h) = 0$.

5. a) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n-1)}(x)$$

   On pourra montrer que la suite double $\left(\dfrac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\right)_{k\geqslant 2, n\geqslant 0}$ *est sommable.*

   b) Étudier la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ de la série de fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n!} f^{(n-1)}(x)$.

6. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) - h(2x) = g(2x)$.

   b) En déduire, en utilisant la question 4. que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(2^n x)$.

   Étudier la convergence normale de la série de fonctions $x \mapsto g(2^n x)$ sur les intervalles $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha \in]0, +\infty[$.

Deuxième partie

1. a) Montrer que pour $x \in E$ tel que $x > -1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^x}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$.

On pose alors : $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt$.

b) Montrer que l'on a : $\forall x \in]-1,+\infty[\backslash\{0\}, J(x) = f(x) + \dfrac{1}{x} + \gamma$.

On pourra utiliser un "développement " de $\dfrac{1}{1-t}$ si $|t| < 1$.

2. a) Montrer que la suite double $\left(\dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{n^{k+1}}\right)_{n\geqslant 1, k\geqslant 1}$ est sommable si $|x| < 1$.

b) En déduire que $\forall x \in]-1,1[, J(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$ où ζ désigne la fonction dzéta de Riemann : $]1,+\infty[\to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

3. a) En remplaçant t^x par $\exp(x\ln(t))$ pour $t \in]0,1]$ dans $J(x)$, montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, J(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n!}x^n \text{ où } I_n = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^n}{1-t}dt$$

On pourra procéder comme à la question 1. de cette partie.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (-1)^n n!\zeta(n+1)$.

4. a) Vérifier que pour $x > -1$, $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}du$.

b) En déduire que : $\forall x > -1, J(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{x}{n}$

où $\dbinom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

On pourra utiliser les résultats de la question préliminaire.

c) Soit $(\sigma(n,k))_{n\geqslant 1,k\geqslant 1}$ une famille d'entiers telle que : $\dbinom{x}{n} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sigma(n,k)x^k$ et $\sigma(n,k) = 0$ si $k > n$.

Montrer que la suite double $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n.n!}\sigma(n,k)x^k\right)_{n\geqslant 1,k\geqslant 1}$ est sommable pour $|x| < 1$.

d) En déduire que : $\forall k \geqslant 1, (-1)^{k+1}\zeta(k+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}\sigma(n,k)$.

FIN