2003 – e4a (PSI) – Maths B

corrigé – par Michel Staïner, le 29/06/2003

Exercice 1

Je note que, par hypothèse, les a_n — et donc les p_n — sont tous non nuls.

Première partie

1º Pour (a_n) constante, (p_n) est une suite géométrique : si $\forall k \in \mathbf{N} \quad a_k = 1/2$, alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n = 1/2^n$.

$$\boxed{\text{En choisissant } a_k = 1/2 \text{ pour tout } k,\ (p_n) \text{ converge vers } p = 0.}$$

2º Je suppose que (p_n) converge vers $p \neq 0$; les p_n étant non nuls, j'ai

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p} = 1.$$

$$\boxed{\text{Si } (p_n) \text{ converge vers } p \text{ différent de 0, alors } (a_n) \text{ converge vers 1.}}$$

3º a) Soit $n > n_0$; avec les notations de l'énoncé, j'ai :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n_0} a_k \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k = p_{n_0} \cdot q_n,$$

d'où, p_{n_0} étant non nul,

$$\boxed{\text{Pour } n > n_0,\ q_n = \frac{p_n}{p_{n_0}}.}$$

b) Je suppose que la série $\sum \ln a_n$ converge ($\ln a_n$ étant défini au moins pour $n > n_0$). Je remarque que

$$\forall n > n_0 \quad \ln q_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln a_n$$

et j'en déduis que la suite $(\ln q_n)$ converge ; soit ℓ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, il en résulte que la suite (q_n) converge vers e^ℓ et donc, d'après a), la suite (p_n) converge vers $p = p_{n_0} \cdot e^\ell$. Or cette dernière limite est non nulle, puisque p_{n_0} est non nul et $e^\ell > 0$.

$$\boxed{\text{Si la série } \textstyle\sum \ln a_n \text{ converge, alors la suite } (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul.}}$$

c) Je suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$). Alors, comme ci-dessus, la suite $(\ln q_n)$ admet pour limite $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) et donc la suite (q_n) admet pour limite $+\infty$ (*resp.* 0). Par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si la suite des sommes partielles de la série } \sum \ln a_n \text{ diverge vers } +\infty, \text{ alors } (p_n) \text{ diverge,}\\ \text{vers } +\infty \text{ si } p_{n_0} > 0 \text{ et vers } -\infty \text{ si } p_{n_0} < 0, \text{ tandis que,}\\ \text{si la suite des sommes partielles de la série } \sum \ln a_n \text{ diverge vers } -\infty, \text{ alors } (p_n) \text{ converge vers 0.}\end{array}}$$

4º Ici, pour tout n, $u_n \geq 0$, $a_n \geq 1$ et $\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$;

– je suppose dans un premier temps que (p_n) converge vers $p > 0$. Alors, par continuité de la fonction ln, $(\ln p_n)$ converge (vers $\ln p$) et d'après la relation précédente la série $\sum \ln a_n$ converge. De plus, (a_n) converge vers 1 (*cf.* 1º), donc (u_n) converge vers 0 ; il en résulte $\ln a_n \sim u_n$. Par conséquent, les deux séries à termes positifs $\sum \ln a_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature, d'où la convergence de $\sum u_n$.

– réciproquement, je suppose que la série $\sum u_n$ converge. Alors la suite (u_n) converge vers 0, donc $\ln a_n \sim u_n$ et $\sum \ln a_n$ converge. J'en déduis que la suite $(\ln p_n)$ converge vers un réel ℓ et donc (p_n) converge vers $p = e^\ell > 0$.

En conclusion,

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si la série } \textstyle\sum u_n \text{ converge.}}$$

5º Puisqu'ici $\sum u_n$ converge, en particulier (u_n) converge vers 0 et donc

$$\ln a_n = \ln(1 + u_n) = u_n + v_n \quad \text{où} \quad v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

a) Si $\sum u_n^2$ converge, alors $\ln a_n$ apparaît comme la somme des termes généraux de deux séries convergentes, donc $\sum \ln a_n$ converge, d'où d'après 3° b) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ converge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0.}$$

b) Si maintenant $\sum u_n^2$ diverge, la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$, donc, puisque $\sum u_n$ converge, la suite des sommes partielles de $\sum \ln a_n$ diverge vers $-\infty$, d'où d'après 3° c) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ diverge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p = 0.}$$

6° Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors en particulier $\sum u_n$ converge et (u_n) converge vers 0, donc $u_n^2 = o(|u_n|)$. Des théorèmes sur la comparaison des séries à termes positifs, je déduis que $\sum u_n^2$ converge. Je peux donc appliquer le résultat du 5° a) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0.}$$

Deuxième partie

1° a) Ici, $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ (par comparaison à la série harmonique), donc le I.3° c) s'applique :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + \frac{1}{n},\ (p_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

b) Ici, $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $u_n^2 = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. Il est clair que $\sum u_n^2$ diverge, par comparaison à la série harmonique. Quant à $\sum u_n$, il s'agit d'une série alternée, dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 ($\ln n = o(\sqrt{n})$) ; pour montrer que c'est en décroissant, je considère la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{+*}$, avec

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x^{3/2}} - \frac{\ln x}{2x^{3/2}} = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

Ainsi φ décroît sur $[e^2, +\infty[$ et la série $\sum\limits_{n \geq 8} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Donc $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge, j'applique le I.5° b) :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ (p_n) \text{ converge vers } 0.}$$

2° Ici,

$$u_n = a_n - 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \,;$$

en remarquant que $1 \leq t/n$ pour tout $t \geq n$ (!), j'obtiens :

$$\forall X > n \quad \int_n^X e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \int_n^X \frac{t}{n} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{e^{-n^2} - e^{-X^2}}{2n}$$

d'où, en faisant tendre X vers $+\infty$,

$$|u_n| \leq \frac{e^{-n^2}}{n\sqrt{\pi}}.$$

Il en résulte, compte tenu des croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles, que $|u_n| = o(1/n^2)$. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente, par comparaison à une série de Riemann ($2 > 1$!). Donc le I.6° s'applique :

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p \text{ non nul.}}$$

3° D'après l'hypothèse, les p_n sont tous non nuls.

a) Soit $n > 1$; j'ai par définition

$$1 + u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{p_n} + v_n = \frac{1}{p_{n-1}}.$$

$$\boxed{\text{Pour } n > 1,\ v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.}$$

J'ai donc — après l'hécatombe — pour $n > 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_n}$.

b) i) Si $\sum u_n$ converge, comme $\sum u_n^2$ converge également par hypothèse, le I.5° a) s'applique : (p_n) converge vers p non nul, donc $(1/p_n)$ converge vers $1/p$; alors d'après la relation précédente la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ converge :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ converge, alors } \sum v_n \text{ converge également.}}$$

ii) Par contre, avec par exemple $u_n = 1/n$, on a vu au 1° a) que (p_n) diverge vers $+\infty$, donc $(1/p_n)$ converge vers 0 et $\sum v_n$ converge, alors que la série harmonique $\sum u_n$ diverge :

$$\boxed{\text{La convergence de } \sum v_n \text{ n'implique pas la convergence de } \sum u_n.}$$

c) Avec $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ comme au 1° b), j'ai vu que (p_n) converge vers 0 et donc $(1/p_n)$ diverge et il en est de même de $\sum v_n$ d'après la relation du a).

$$\boxed{\text{Pour } u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ \sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

4° a) Comme $\alpha > 0$, j'ai $u_n = \sin \dfrac{c}{n^\alpha} \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$. Pour $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, par comparaison à une série de Riemann et donc (p_n) converge vers p non nul, d'après I.6°. Pour $\alpha \leq 1$, la suite des sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$ diverge vers $+\infty$ et donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet pour limite $\operatorname{sgn}(c) \cdot \infty$. Or les a_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang et $\ln a_n \sim u_n$; ainsi le I.3° s'applique et (p_n) converge vers 0 si et seulement si $c < 0$. En conclusion

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers 0 si et seulement si } \alpha \leq 1 \text{ et } c < 0.}$$

b) Ici $\alpha = 1$; d'après ce qui précède,

$$\boxed{\text{Si } c \geq 0, \text{ alors } \sum p_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Je suppose donc $c = -b$, où $b > 0$ et j'écris, pour $n \geq 1$:

$$\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) + \frac{b}{k}\right] - b\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - b\ln n.$$

Or, grâce aux développements limités en 0 de $\ln(1-x)$ et de $\sin x$:

$$\ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) + \frac{b}{k} = -\sin\frac{b}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{b}{k} = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

qui est donc le terme général d'une série absolument convergente. D'après le rappel de l'énoncé, j'en déduis que la suite $(\ln p_n + b\ln n)$ converge. Soit ℓ sa limite. Par continuité de l'exponentielle, la suite $\left(p_n \cdot n^b\right)$ converge vers e^ℓ, qui est non nul, d'où

$$p_n \sim \frac{e^\ell}{n^b}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, $\sum p_n$ converge si et seulement si $b > 1$. En conclusion :

$$\boxed{\sum p_n \text{ converge si et seulement si } c < -1.}$$

Partie I

I-1

I-1-1 C'est une question de cours.
La suite $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante vers 0 donc, la condition suffisante des séries alternées assure que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

I-1-2
1 Un développement de u_n au voisinage de $+\infty$ donne $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{2n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$.
donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ est la somme de trois séries convergentes, par suite elle est convergente.
2 La même méthode donne $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$.
et par suite la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente .

I-2

I-2-1
Si $n \in [pq, pq+p-1]$ alors $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right) = q$.
Par suite $v_q = (-1)^q \displaystyle\sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} a_n = (-1)^q b_q$ où b_q a le signe commun à tous les a_n (et donc la suite $(b_q)_q$ a un signe constant).

I-2-2
Notons $S_n = \displaystyle\sum_0^n u_k$ et $T_q = \displaystyle\sum_0^q v_k$ alors $T_q = S_{pq+p-1}$.
Donc $\left(T_q\right)_{q\in N}$ est une suite extraite de $\left(S_n\right)_{n\in N}$
La convergence de $\sum u_n$ implique donc la convergence de $\sum v_q$.

Réciproquement , supposons que la suite $\left(T_q\right)_{q\in N}$ converge . Soit $n \in N$ et $q = \mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)$ alors $S_n - T_{q-1} = (-1)^q \displaystyle\sum_{k=pq}^{n} a_k$
Donc $|S_n - T_{q-1}| = |\displaystyle\sum_{k=pq}^{n} a_k| = \sum_{k=pq}^{n} |a_k|$ car les a_n ont même signe.
Par suite $|S_n - T_{q-1}| \leq |b_q| = |v_q|$. Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est égale à $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} T_q = \sum_0^\infty v_q$
En effet $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} v_q = 0$ car $\sum v_q$ converge.
Remarque : dans ce cas particulier l'hypothèse $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *est surabondante.*

I-2-3
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ implique $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. (somme de p termes consécutifs).
De plus pour tout $q \geq n_1$ on a :

$$|v_q| = |\sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} u_n| = \sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} |u_n| \leq \sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} |u_{n+p}| = |v_{q+1}|$$

du fait que $|u_n| \leq |u_{n+p}|$.
Ainsi la suite $|v_n|$ est décroissante à partir du rang n_1. Comme on sait déjà que la série de terme v_n est alternée, $\sum v_q$ converge d'après I-1-1.

I-2-4
$v_0 = v_1 = 0$. Pour $q \geq 2$

$$v_q = (-1)^q \sum_{pq}^{pq+p-1} \frac{1}{\sqrt{q+(-1)^q}} = \frac{(-1)^q p}{\sqrt{q+(-1)^q}}$$

D'après I-1-2-1 $\sum v_q$ converge et de plus u_n tend clairement vers 0 donc , d'après I-2-2 $\sum u_n$ converge.

I-2-5
Par un calcul analogue : $v_0 = v_1 = 0$. Pour $q \geq 2$

$$v_q = (-1)^q \sum_{pq}^{pq+p-1} \frac{1}{\sqrt{q}+(-1)^q} = \frac{(-1)^q p}{\sqrt{q}+(-1)^q}$$

et par le même argument $\sum u_n$ diverge.

Partie II

II-1
II-1-1
f_1 est manifestement de classe C^1 sur R.

II-1-2
Pour tout n $a_n = 0$,(fonction impaire) et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi n^3}\Big(1-(-1)^n\Big)$$

D'où

$$b_{2n} = 0 \quad \text{pour tout } n > 0$$
$$b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$$

II-1-3
f_1 est somme de sa série de Fourier sur R. (théorème de convergence normale).

II-2
II-2-1
f_2 est de classe C^1 sur tout intervalle ne contenant pas de points de la forme $\pm b + 2k\pi$ et C^1 par morceaux sur R.

II-2-2
Pour tout $n \geq 1$,$b_n = 0$.
$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^b \cos nt \,\mathrm{d}t$ D'où :

$$a_0 = \frac{2b}{\pi} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2\sin nb}{\pi n} \quad \text{pour } n \geq 1$$